

# Tensores de Terceira Ordem

Pablo Javier Blanco <sup>a</sup>

<sup>a</sup>*e-mail: pjblanco@lncc.br, Ramal: 6169, Sala: 1A-39*

---

## Resumo

Neste trabalho aborda-se o tratamento de tensores de terceira ordem visando estabelecer, em notação intrínseca, as operações usuais e básicas da mecânica do contínuo. Isto devido a que a notação intrínseca permite trabalhar sem levar em consideração o sistema de coordenadas o que constitui uma clara vantagem frente a outras formas de trabalho.

*Palavras chave:* Mecânica do contínuo, álgebra tensorial, cálculo tensorial.

---

## 1 Introdução

A notação intrínseca, isto é, independente do sistema de coordenadas, é usada amplamente na mecânica do contínuo. Se bem esta forma de trabalho oferece numerosas vantagens, os textos clássicos, como por exemplo o livro de M.E. Gurtin<sup>[1]</sup>, limitam a sua apresentação aos casos de tensores de segunda ordem. O tratamento dos tensores de terceira ordem em forma intrínseca não constitui uma extensão trivial do tratamento dos tensores de segunda ordem, embora tais tensores de ordem superior apareçam freqüentemente em diversos campos da mecânica do contínuo aplicada.

Estas notas propõem estabelecer um ponto de partida para trabalhar de forma intrínseca com tensores de terceira ordem. Desta forma será possível levar a cabo diversas definições de operações envolvendo tensores de segunda ordem utilizando as propriedades das operações com tensores de terceira ordem. Um exemplo disto é o caso do divergente de um campo tensorial o qual poderia ser definido a partir do gradiente de tal campo tensorial.

## 2 Álgebra e cálculo tensorial

### 2.1 Preliminares

Denota-se por  $V$  o espaço dos vetores (tensores de primeira ordem), por  $Lin$  o espaço dos tensores de segunda ordem e por último  $\mathcal{W}$  o espaço dos tensores de terceira ordem. Estes tensores de terceira ordem são aplicações lineares da forma

$$\mathbf{S} : Lin \rightarrow V \quad \text{ou} \quad \mathbf{S} : V \rightarrow Lin, \quad (2.1)$$

isto é, podem ser aplicados a elementos de  $V$  (vetores), como a elementos de  $Lin$  (tensores de segunda ordem). Para simplificar a apresentação daqui por diante denotam-se, os elementos de  $V$ , por letras minúsculas (por exemplo  $\mathbf{a}$ ), os elementos de  $Lin$  por letras maiúsculas (por exemplo  $\mathbf{T}$ ) e finalmente os elementos de  $\mathcal{W}$  por maiúsculas em um tipo de letra diferente (por exemplo  $\mathbf{S}$ ). Em relação aos vetores de uma base arbitrária, os elementos de cada um dos espaços acima apresentados pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &\in V & \mathbf{a} &= a_i \mathbf{e}_i, \\ \mathbf{T} &\in Lin & \mathbf{T} &= T_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \\ \mathbf{S} &\in \mathcal{W} & \mathbf{S} &= S_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esta forma de colocar os elementos de cada espaço será utilizada para verificar as expressões intrínsecas das operações entre os elementos dos espaços  $V$ ,  $Lin$  e  $\mathcal{W}$ .

Em componentes, a aplicação de um tensor de terceira ordem em um de segunda ordem lê-se como segue

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\mathbf{T} &= S_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)T_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = S_{ijk}T_{pq}\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_p)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_q) = \\ &= S_{ijk}T_{pq}\delta_{jp}\delta_{kq}\mathbf{e}_i = S_{ijk}T_{jk}\mathbf{e}_i = \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\mathbf{a} &= S_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)a_r\mathbf{e}_r = S_{ijk}a_r(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_r) = \\ &= S_{ijk}a_r\delta_{kr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = S_{ijk}a_k(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Isto significa que a aplicação entre estes elementos implica que os índices *internos* condensam.

## 2.2 A operação transposto de um tensor

De forma natural, dentro do espaço  $Lin$  é possível definir a operação de transposição de tensores de segunda ordem como segue

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \mathbf{b} = \mathbf{T}^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}. \quad (2.5)$$

Tal identidade deve manter-se quando trabalha-se em componentes, portanto note que

$$\begin{aligned} a_i \mathbf{e}_i \cdot T_{jk}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) b_m \mathbf{e}_m &= a_i T_{jk} b_m \delta_{mk} \delta_{ji} = a_i T_{ij} b_j, \\ T_{ij}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i) a_k \mathbf{e}_k \cdot b_m \mathbf{e}_m &= T_{ij} a_k b_m \delta_{ki} \delta_{mj} = a_i T_{ij} b_j. \end{aligned} \quad (2.6)$$

do que se segue-se que a operação de transposição deve estar definida da seguinte forma

$$\mathbf{T}^T = T_{ij}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i). \quad (2.7)$$

Note que a operação de transposição acima apresentada pode ser colocada equivalentemente pela seguinte definição

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \mathbf{T}^T \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}), \quad (2.8)$$

em efeito, por um lado note que

$$\mathbf{T} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = T_{ij} a_p b_q (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = T_{ij} a_p b_q \delta_{pi} \delta_{qj} = T_{ij} a_i b_j, \quad (2.9)$$

enquanto que por outro lado é

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}) &= (\mathbf{T}^T)_{ij} b_p a_q (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = (\mathbf{T}^T)_{ij} b_p a_q \delta_{pi} \delta_{qj} = \\ &= (\mathbf{T}^T)_{ij} b_i a_j = (\mathbf{T}^T)_{ji} a_i b_j, \end{aligned} \quad (2.10)$$

e portanto

$$T_{ij} = (\mathbf{T}^T)_{ji}, \quad (2.11)$$

que é o resultado equivalente ao obtido anteriormente.

Em forma análoga é possível definir a operação de transposição para elementos de  $\mathcal{W}$ . Assim, escreve-se o seguinte

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \mathbf{T}. \quad (2.13)$$

Novamente, tal identidade deve manter-se quando trabalha-se em componentes, portanto note que

$$\begin{aligned} a_m \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{S}_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) T_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) &= a_m S_{ijk} T_{pq} \delta_{pj} \delta_{qk} \delta_{im} \\ &= a_i S_{ijk} T_{jk}, \\ S_{ijk}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) a_m \mathbf{e}_m \cdot T_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) &= S_{ijk} a_m T_{pq} \delta_{mi} \delta_{pj} \delta_{qk} \\ &= S_{ijk} a_i T_{jk}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

do que se segue-se que a operação de transposição deve estar definida da seguinte forma

$$\mathbf{S}^T = S_{ijk}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i). \quad (2.15)$$

Assim como para tensores de segunda ordem deu-se uma definição alternativa totalmente equivalente da operação de transposição, aqui também é factível estabelecer a correspondente definição como segue

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{a}). \quad (2.16)$$

De fato, observe por um lado que

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) &= S_{ijk}a_rb_sc_t(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = \\ &S_{ijk}a_rb_sc_t\delta_{ri}\delta_{sj}\delta_{tk} = S_{ijk}a_ib_jc_k, \end{aligned} \quad (2.17)$$

enquanto que por outro lado

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{a}) &= (\mathbf{S}^T)_{ijk}b_rc_sa_t(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = \\ &(\mathbf{S}^T)_{ijk}b_rc_sa_t\delta_{ri}\delta_{sj}\delta_{tk} = (\mathbf{S}^T)_{ijk}b_ib_jc_k = (\mathbf{S}^T)_{jki}a_ib_jc_k, \end{aligned} \quad (2.18)$$

e portanto

$$S_{ijk} = (\mathbf{S}^T)_{jki}, \quad (2.19)$$

que é o resultado equivalente ao obtido anteriormente.

A partir desta definição que satisfaz a propriedade da transposição no sentido do produto interno é possível obter de forma direta as seguintes relações

$$(\mathbf{S}^T)^T = S_{ijk}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{S}^{\frac{1}{T}}, \quad (2.20)$$

$$((\mathbf{S}^T)^T)^T = S_{ijk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \mathbf{S}. \quad (2.21)$$

Suponha agora que o tensor de terceira ordem é dado pela seguinte combinação entre um elemento de  $V$  e um elemento de  $Lin$

$$\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{S}. \quad (2.22)$$

Da (2.15) segue-se que

$$\mathbf{S}^T = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S})^T = \mathbf{S} \otimes \mathbf{u}. \quad (2.23)$$

Considere agora que o tensor de terceira ordem é dado pela seguinte combinação entre um elemento de  $V$  e um elemento de  $Lin$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{u}. \quad (2.24)$$

Da (2.15) e da (2.20) segue-se que

$$\mathbf{S}^T = (\mathbf{S} \otimes \mathbf{u})^T = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}. \quad (2.25)$$

Desta forma verifica-se que

$$\begin{aligned} ((\mathbf{S}^T)^T)^T &= \mathbf{S} \otimes \mathbf{u} = (((\mathbf{S} \otimes \mathbf{u})^T)^T)^T = \\ &(((\mathbf{u} \otimes \mathbf{S})^{\frac{1}{T}})^T)^T = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S})^T = \mathbf{S} \otimes \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

### 2.3 Álgebra tensorial

Agora é preciso ver como transforma um tensor de terceira ordem dado por  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{T}$  quando aplicado a vetores e a tensores de segunda ordem. Observe então que

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})\mathbf{S} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})\mathbf{u}, \quad (2.27)$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})\mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes (\mathbf{T}\mathbf{v}). \quad (2.28)$$

De fato, em componentes tem-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})\mathbf{S} &= u_i T_{jk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) S_{pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = \\ &u_i T_{jk} S_{pq} \delta_{pj} \delta_{qk} \mathbf{e}_i = u_i T_{jk} S_{jk} \mathbf{e}_i = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.29)$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})\mathbf{v} &= u_i T_{jk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) v_r \mathbf{e}_r = u_i T_{jk} v_r \delta_{rk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \\ &u_i T_{jk} v_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{u} \otimes (\mathbf{T}\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Analogamente, seja o tensor de terceira ordem dado por  $\mathbf{S} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{u}$ . Quando aplicado a vetores e a tensores de segunda ordem resulta então

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u})\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{u}, \quad (2.31)$$

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u})\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{T}. \quad (2.32)$$

De fato, em componentes tem-se

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{u})\mathbf{S} &= T_{ij} u_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) S_{pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = \\ &T_{ij} u_k S_{pq} \delta_{pj} \delta_{qk} \mathbf{e}_i = T_{ij} S_{jk} u_k \mathbf{e}_i = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{u})\mathbf{v} &= T_{ij} u_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) v_r \mathbf{e}_r = T_{ij} u_k v_r \delta_{rk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \\ &T_{ij} u_k v_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{T}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Com as definições dadas acima é possível obter o seguinte

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T \mathbf{a} = (\mathbf{T}^T \mathbf{a}) \otimes \mathbf{v}, \quad (2.35)$$

$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T \mathbf{S} = \mathbf{T}^T \mathbf{S}^T \mathbf{v}, \quad (2.36)$$

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{u}) \mathbf{v} = (\mathbf{S} \mathbf{v})^T \mathbf{u}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{S} \mathbf{u}) \mathbf{v}. \quad (2.38)$$

Para isto, note que

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T \mathbf{a} &= T_{ij} v_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T a_r \mathbf{e}_r = T_{ij} v_k (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) a_r \mathbf{e}_r = \\ &= T_{ij} v_k a_r \delta_{ri} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = T_{ij} a_i v_k (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = (\mathbf{T}^T \mathbf{a}) \otimes \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T \mathbf{S} &= T_{ij} v_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T S_{pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = \\ &= T_{ij} v_k (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) S_{pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = T_{ij} v_k S_{pq} \delta_{pk} \delta_{qi} \mathbf{e}_j = \\ &= T_{ij} S_{ki} v_k \mathbf{e}_j = \mathbf{T}^T \mathbf{S}^T \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{S}^T \mathbf{u}) \mathbf{v} &= S_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T u_r \mathbf{e}_r v_s \mathbf{e}_s = \\ &= S_{ijk} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) u_r \mathbf{e}_r v_s \mathbf{e}_s = S_{ijk} u_r v_s \delta_{ri} \delta_{sk} = \\ &= S_{ijk} v_k u_i = (\mathbf{S} \mathbf{v})^T \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) &= S_{ijk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) v_r u_s (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) = S_{ijk} v_r u_s \delta_{rj} \delta_{sk} = \\ &= S_{ijk} u_k v_j = (\mathbf{S} \mathbf{u}) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Uma operação que será útil no futuro é a seguinte transformação

$$(\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{S}^T = \mathbf{T} \mathbf{S} \mathbf{u} = (\mathbf{T} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{S}. \quad (2.43)$$

Em efeito, em componentes vê-se que

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{S}^T &= T_{ij} u_k ((\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T \otimes \mathbf{e}_k)^T S_{pq} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q)^T = \\ &= T_{ij} u_k (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)^T S_{pq} (\mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_p) = T_{ij} u_k (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_j) S_{pq} (\mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_p) = \\ &= T_{ij} u_k S_{pq} \delta_{qk} \delta_{pj} \mathbf{e}_i = T_{ij} u_k S_{jk} \mathbf{e}_i = T_{ij} S_{jk} u_k \mathbf{e}_i = \mathbf{T} \mathbf{S} \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Vejamos agora algumas operações que podem ser úteis. Da definição dada para o transposto de um tensor de terceira ordem resulta que, sendo  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{S}$  e  $\mathbf{T} = \mathbf{v} \otimes \mathbf{T}$  resulta

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{T}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) (\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}), \quad (2.45)$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{T} \mathbf{S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^{\frac{1}{T}} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T = \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.47)$$

A continuação são provadas estas identidades

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{T}) = u_i S_{jk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot v_r T_{st} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = \\ u_i S_{jk} v_r T_{st} \delta_{ri} \delta_{sj} \delta_{tk} = u_i v_i S_{jk} T_{jk} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}), \quad (2.48)$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = u_i S_{jk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot T_{rs} v_t (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = \\ u_i S_{jk} T_{rs} v_t \delta_{ri} \delta_{sj} \delta_{tk} = T_{ij} S_{jk} v_k u_i = \mathbf{T} \mathbf{S} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \quad (2.49)$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T = u_i S_{jk} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \cdot T_{rs} v_t (\mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t \otimes \mathbf{e}_r) \\ u_i S_{jk} T_{rs} v_t \delta_{si} \delta_{tj} \delta_{rk} = S_{jk} T_{ki} u_i v_j = \mathbf{S} \mathbf{T} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (2.50)$$

## 2.4 Cálculo tensorial

As definições correspondentes às operações de gradiente e divergente sobre campos vetoriais, tensoriais de segunda ordem e tensoriais de terceira ordem são as seguintes

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k), \quad (2.51)$$

$$\nabla \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k), \quad (2.52)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \cdot \mathbf{e}_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}, \quad (2.53)$$

$$\text{div } \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_k} \mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{jk}}{\partial k} \mathbf{e}_j, \quad (2.54)$$

$$\text{div } \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_k} \mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (2.55)$$

Assim sendo, pode-se ver que é válida a seguinte relação para um tensor de segunda ordem que é o gradiente de um vetor

$$(\nabla(\nabla \mathbf{u}))^{\frac{1}{T}} = \nabla((\nabla \mathbf{u})^T). \quad (2.56)$$

De fato observe que

$$(\nabla(\nabla \mathbf{u}))^{\frac{1}{T}} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^{\frac{1}{T}} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \\ \frac{\partial}{\partial x_j} (\nabla \mathbf{u})_{ik} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \nabla((\nabla \mathbf{u})^T), \quad (2.57)$$

onde usou-se o fato de ser  $\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_j}$ . Como consequência direta segue-se que

$$\nabla(\nabla \mathbf{u}) = (\nabla((\nabla \mathbf{u})^T))^T. \quad (2.58)$$

Tendo definido as operações básicas com os tensores de terceira ordem pode-se passar a estabelecer resultados em forma intrínseca envolvendo esta classe

de elementos. Desta forma, no que segue a partir da seção 3 usar-se-ão sucessivamente as definições aqui apresentadas sem detalhar as correspondentes referências para evitar estender o texto.

Vale a pena mencionar que a partir daqui assume-se que os campos envolvidos são suficientemente regulares de forma que as operações realizadas sobre estes estejam bem definidas.

### 2.5 Uma definição alternativa da operação transposto

Observe que na seção 2.2 a operação transposto de um tensor de terceira ordem foi definida da seguinte forma

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{b} \otimes \mathbf{c} \otimes \mathbf{a}), \quad (2.59)$$

equivalente à seguinte

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{S}^T \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}, \quad (2.60)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \mathbf{T}. \quad (2.61)$$

Entretanto aqui vale a pena salientar que outra definição da operação de transposição é possível. Esta outra definição, que é introduzida em [2], é a seguinte

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \otimes \mathbf{c}) = \mathbf{S}^T \cdot (\mathbf{c} \otimes \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}), \quad (2.62)$$

equivalente à seguinte

$$\mathbf{S} \mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^T \mathbf{T}, \quad (2.63)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T} = \mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{T}. \quad (2.64)$$

Comparando as expressões anteriores vê-se que a operação transposto  $(\cdot)^T$  definida pelas (2.60)-(2.61) corresponde à operação inversa de transposto  $(\cdot)^{\frac{1}{T}}$  –ou equivalentemente  $(\cdot)^{TT}$ – segundo a definição dada pelas (2.63)-(2.64). Ao adotar esta definição alternativa obtêm-se resultados equivalentes àqueles encontrados nas seções que seguem onde a diferença aparece na operação transposição dos tensores de terceira ordem. Um exemplo simples disto é o caso do gradiente de um tensor de terceira ordem. O resultado segundo a definição (2.59) é aquele obtido na seção 3.1 que é apresentado com antecedência aqui

$$\nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{a}) = (\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{a}, \quad (2.65)$$

enquanto que a correspondente expressão envolvendo a definição (2.62) seria a seguinte

$$\nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{a}) = (\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{a} = ((\nabla \mathbf{S})^T)^T \mathbf{a}. \quad (2.66)$$

### 3 Resultados envolvendo derivadas

Nesta seção são apresentados alguns resultados já conhecidos sem a necessidade da definição das operações com tensores de terceira ordem. Entretanto, acrescentam-se resultados que requerem necessariamente do conhecimento das transformações envolvidas nas operações com tensores de terceira ordem.

#### 3.1 Gradiente de um tensor de segunda ordem $\mathbf{S}$

o gradiente de um tensor de segunda ordem  $\mathbf{T}$  é aquele tensor de terceira ordem que satisfaz o seguinte

$$\nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{a}) = (\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{a}. \quad (3.1)$$

Para ver que esta operação está bem definida note que

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{a}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ij} a_m) [(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T \mathbf{e}_m] \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} a_m \delta_{mi} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \\ &= \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} a_i (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k), \end{aligned} \quad (3.2)$$

enquanto que por outro lado é

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{a} &= \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T a_m \mathbf{e}_m = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) a_m \mathbf{e}_m = \\ &= \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} a_m \delta_{mi} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} a_i (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim sendo, comparando a (3.2) e a (3.3) resulta que

$$\nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{a}) = (\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{a}. \quad (3.4)$$

Suponha agora que o tensor de segunda ordem é da forma  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ . O seguinte resultado é válido

$$\nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v}) + ((\nabla \mathbf{u})^T \otimes \mathbf{v})^T. \quad (3.5)$$

Para provar este resultado observe que pelo resultado dado pela (3.1) segue que

$$\nabla((\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{a}) = (\nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))^T \mathbf{a}. \quad (3.6)$$

No entanto, sabe-se que

$$\begin{aligned} \nabla((\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{a}) &= \nabla((\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \mathbf{v}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) = \\ &= (\nabla \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{a} + \mathbf{v} \otimes ((\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a}) = [(\nabla \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \otimes (\nabla \mathbf{u})^T)] \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Vendo a (3.6) e a (3.7) obtém-se que

$$(\nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))^T = (\nabla \mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{v} \otimes (\nabla \mathbf{u})^T), \quad (3.8)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= ((\nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))^T)^{\frac{1}{T}} = (\nabla \mathbf{v} \otimes \mathbf{u})^{\frac{1}{T}} + (\mathbf{v} \otimes (\nabla \mathbf{u})^T)^{\frac{1}{T}} = \\ &= (\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v}) + ((\nabla \mathbf{u})^T \otimes \mathbf{v})^T, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde usou-se a (2.23) e a (2.25). Logo, obtém-se que

$$\nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v}) + ((\nabla \mathbf{u})^T \otimes \mathbf{v})^T. \quad (3.10)$$

Vejamos isto em componentes para verificar a expressão encontrada. Note então que

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i v_j) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \\ &= u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \\ &= u_i \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial v_j}{\partial x_k} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) + v_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T = \\ &= u_i \mathbf{e}_i \otimes \frac{\partial v_j}{\partial x_k} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) + \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k)^T \otimes v_j \mathbf{e}_j \right)^T = \\ &= (\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v}) + ((\nabla \mathbf{u})^T \otimes \mathbf{v})^T. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Desta forma verifica-se a expressão encontrada acima.

### 3.2 Divergente de um tensor de segunda ordem $\mathbf{S}$

A partir do resultado da seção anterior é possível obter o seguinte resultado envolvendo o divergente da composição de tensores de segunda ordem. Vejamos a expressão do  $\text{div}(\mathbf{ST})$ , para tanto é

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{ST}) \cdot \mathbf{a} &= \text{div}((\mathbf{ST})^T \mathbf{a}) = \text{div}(\mathbf{T}^T \mathbf{S}^T \mathbf{a}) = \mathbf{T} \cdot \nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{a}) + \mathbf{S}^T \mathbf{a} \cdot \text{div} \mathbf{T} = \\ &= (\nabla \mathbf{S}) \mathbf{T} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{S} \text{div} \mathbf{T} = [(\nabla \mathbf{S}) \mathbf{T} + \mathbf{S} \text{div} \mathbf{T}] \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

do que se obtém

$$\text{div}(\mathbf{ST}) = (\nabla \mathbf{S}) \mathbf{T} + \mathbf{S} \text{div} \mathbf{T}. \quad (3.13)$$

Considere agora  $\mathbf{T} = \mathbf{I}$  o tensor identidade, então da (3.13) segue-se que

$$\text{div} \mathbf{S} = (\nabla \mathbf{S}) \mathbf{I}, \quad (3.14)$$

que estabelece uma definição alternativa para o divergente de um tensor. Em componentes verifica-se que esta expressão esteja correta

$$(\nabla \mathbf{S})\mathbf{I} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)\delta_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}\delta_{jk}\mathbf{e}_i = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}\mathbf{e}_i = \text{div } \mathbf{S}. \quad (3.15)$$

Logo, a definição alternativa é válida.

Considere agora o caso em que  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ , então, utilizando a (3.5) e a relação (2.43), observe que

$$\begin{aligned} \text{div } (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) &= (\nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}))\mathbf{I} = (\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v})\mathbf{I} + ((\nabla \mathbf{u})^T \otimes \mathbf{v})^T \mathbf{I} = \\ &= \mathbf{u}(\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}) + (\nabla \mathbf{u} \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

e portanto reobtem-se o conhecido resultado

$$\text{div } (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \text{div } \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{v}. \quad (3.17)$$

### 3.3 Divergente de um tensor de terceira ordem $\mathbf{S}$

Observe que a seguinte definição do divergente de um tensor de terceira ordem é válida

$$\text{div } (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) = (\text{div } \mathbf{S})^T \mathbf{a}, \quad (3.18)$$

em efeito, vê-se que

$$\begin{aligned} \text{div } (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) &= \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_s}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T a_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_s}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i) a_r \mathbf{e}_r \mathbf{e}_s = \\ &= \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_s} a_r \delta_{ri}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_s = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_s} a_i \delta_{sk} \mathbf{e}_j = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_k} a_i \mathbf{e}_j = (\text{div } \mathbf{S})^T \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Entretanto, note que também é válida a seguinte expressão

$$\text{div } (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \mathbf{A}) = (\text{div } \mathbf{S}) \cdot \mathbf{A}, \quad (3.20)$$

de fato, vê-se que

$$\begin{aligned} \text{div } (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \mathbf{A}) &= \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_s}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^{\frac{1}{T}} A_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \mathbf{e}_s = \\ &= \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_s}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) A_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \mathbf{e}_s = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_s} A_{pq} \delta_{pi} \delta_{qj} \delta_{sk} = \\ &= \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_k} A_{ij} = (\text{div } \mathbf{S}) \cdot \mathbf{A}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Outros resultados envolvendo o divergente de um tensor de terceira ordem podem ser obtidos. A continuação apresentam-se dois destes resultados. Vejamos que o seguinte resultado é válido

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{T}) = \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \operatorname{div} \mathbf{S}. \quad (3.22)$$

Vejamos que o resultado vale quando visto em componentes

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{T}) &= \frac{\partial}{\partial x_s}(S_{ijk}T_{pq})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^{\frac{1}{T}}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q)\mathbf{e}_s = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_s}(S_{ijk}T_{pq})(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q)\mathbf{e}_s = \frac{\partial}{\partial x_s}(S_{ijk}T_{pq})\delta_{pi}\delta_{qj}\delta_{sk} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}(S_{ijk}T_{ij}) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}S_{ijk} + \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_k}T_{ij} = \mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{T} + (\operatorname{div} \mathbf{S}) \cdot \mathbf{T}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Da mesma forma é válido o seguinte resultado

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{u}) = (\operatorname{div} \mathbf{S})^T\mathbf{u} + \mathbf{S}^T(\nabla\mathbf{u})^T. \quad (3.24)$$

Vejamos este resultado de forma intrínseca. Para isto é necessário utilizar sucessivamente vários dos resultados obtidos anteriormente, razão pela qual somente os mais importantes são mencionados. Da definição do divergente de um tensor de segunda ordem e dos resultados dados pelas (3.5) e (3.22) resulta

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{u}) \cdot \mathbf{a} &= \operatorname{div}((\mathbf{S}^T\mathbf{u})^T\mathbf{a}) = \operatorname{div}(((\mathbf{S}^T)^T\mathbf{u})\mathbf{a}) = \operatorname{div}((\mathbf{S}^T)^T(\mathbf{u} \otimes \mathbf{a})) = \\ &= \operatorname{div}(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{a})) = \mathbf{S} \cdot \nabla(\mathbf{u} \otimes \mathbf{a}) + (\operatorname{div} \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{S} \cdot ((\nabla\mathbf{u})^T \otimes \mathbf{a})^T + (\operatorname{div} \mathbf{S})^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \cdot ((\nabla\mathbf{u})^T \otimes \mathbf{a}) + (\operatorname{div} \mathbf{S})^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{u})^T + (\operatorname{div} \mathbf{S})^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^{\frac{1}{T}}(\nabla\mathbf{u})^T + (\operatorname{div} \mathbf{S})^T\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \\ &= [\mathbf{S}^T(\nabla\mathbf{u})^T + (\operatorname{div} \mathbf{S})^T\mathbf{u}] \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde na terceira linha foi aplicado a operação inversa da transposição a ambos os tensores de terceira ordem e onde se usou o fato de ser  $(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^{\frac{1}{T}} = \mathbf{S}^T$ . Logo o resultado (3.24) é válido.

Um outro resultado válido é o seguinte

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{S}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{S}\nabla\varphi. \quad (3.26)$$

Para isto observe que, usando a definição do divergente de um tensor de terceira ordem tem-se

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}(\varphi\mathbf{S})]^T\mathbf{a} &= \operatorname{div}(\varphi\mathbf{S}^T\mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{a}) + \mathbf{S}^T\mathbf{a}\nabla\varphi = \\ &= \varphi(\operatorname{div} \mathbf{S})^T\mathbf{a} + (\mathbf{S}\nabla\varphi)^T\mathbf{a} = [\varphi(\operatorname{div} \mathbf{S}) + (\mathbf{S}\nabla\varphi)]^T\mathbf{a}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

e o resultado segue.

Considere agora o tensor de terceira ordem  $\mathbf{S} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{u}$ , então resulta

$$\operatorname{div}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{u}) = (\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{S} + (\nabla \mathbf{S})\mathbf{u}. \quad (3.28)$$

Para ver isto note que da definição do divergente de um tensor de terceira ordem tem-se

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}(\mathbf{S} \otimes \mathbf{u})]^T \mathbf{a} &= \operatorname{div}((\mathbf{S} \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{a}) = \operatorname{div}((\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \otimes \mathbf{u}) = \mathbf{S}^T \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{u} + \nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{a})\mathbf{u} = \\ &= (\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{S}^T \mathbf{a} + ((\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{a})\mathbf{u} = (\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{S}^T \mathbf{a} + ((\nabla \mathbf{S})\mathbf{u})^T \mathbf{a} = \\ &= [(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{S} + (\nabla \mathbf{S})\mathbf{u}]^T \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Logo, transpondo obtém-se o resultado buscado.

Considere agora o tensor de terceira ordem  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{S}$ , então resulta

$$\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) = \mathbf{u} \otimes \operatorname{div} \mathbf{S} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{S}^T. \quad (3.30)$$

Para ver isto note que da definição do divergente de um tensor de terceira ordem tem-se

$$\begin{aligned} [\operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S})]^T \mathbf{a} &= \operatorname{div}((\mathbf{u} \otimes \mathbf{S})^T \mathbf{a}) = \operatorname{div}((\mathbf{S} \otimes \mathbf{u})\mathbf{a}) = \operatorname{div}((\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\mathbf{S}) = \\ &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) \operatorname{div} \mathbf{S} + \mathbf{S} \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}) = (\operatorname{div} \mathbf{S} \otimes \mathbf{u})\mathbf{a} + \mathbf{S}(\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} = \\ &= [(\mathbf{u} \otimes \operatorname{div} \mathbf{S}) + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{S}^T]^T \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Logo, transpondo obtém-se o resultado buscado.

### 3.4 Gradiente de expressões envolvendo tensores de segunda ordem

Primeiramente observe que a seguinte identidade vale

$$\nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{u} + \mathbf{S}^T \nabla \mathbf{u}. \quad (3.32)$$

De fato, o resultado segue de considerar primeiro constante  $\mathbf{u}$  e aplicar a definição do gradiente de um tensor de segunda ordem e logo considerar  $\mathbf{S}$  constante, obtendo diretamente a expressão de acima. Em componentes a verificação é a seguinte

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{S}^T \mathbf{u}) &= \frac{\partial}{\partial x_k} (S_{ij} u_i) (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} u_i (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} S_{ij} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \\ &= \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T u_r \mathbf{e}_r + S_{ij} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T \frac{\partial u_r}{\partial x_k} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k) = \\ &= (\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{u} + \mathbf{S}^T \nabla \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

De forma análoga, para uma função escalar  $\varphi$  obtém-se o seguinte resultado

$$\nabla(\varphi \mathbf{S}) = \varphi(\nabla \mathbf{S}) + \mathbf{S} \otimes \nabla \varphi. \quad (3.34)$$

Para isto note que

$$\begin{aligned}\nabla(\varphi \mathbf{S}) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(\varphi S_{ij})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \varphi \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \\ &\quad + S_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \varphi(\nabla \mathbf{S}) + \mathbf{S} \otimes \nabla \varphi. \quad (3.35)\end{aligned}$$

Vejamos agora que é válido o seguinte

$$\nabla(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) = (\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{T})^{\frac{1}{T}} \mathbf{S}. \quad (3.36)$$

Para ver isto note que, da (3.22) e da (3.28) e chamando  $\mathbf{S}^{\frac{1}{T}} = (\mathbf{a} \otimes \mathbf{T})$ , tem-se  $\mathbf{S} = \mathbf{T} \otimes \mathbf{a}$ , e portanto resulta

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{a} &= \text{div}((\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})\mathbf{a}) = \text{div}((\mathbf{a} \otimes \mathbf{T})\mathbf{S}) = \\ &= (\mathbf{T} \otimes \mathbf{a}) \cdot \nabla \mathbf{S} + \mathbf{S} \cdot \text{div}(\mathbf{T} \otimes \mathbf{a}) = ((\nabla \mathbf{S})\mathbf{a}) \cdot \mathbf{T} + \mathbf{S} \cdot ((\nabla \mathbf{T})\mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{T})^{\frac{1}{T}} \mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = [(\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{T})^{\frac{1}{T}} \mathbf{S}] \cdot \mathbf{a}, \quad (3.37)\end{aligned}$$

e o resultado segue. Vejamos isto em componentes

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}) &= \frac{\partial}{\partial x_k}(S_{ij}T_{pq})(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = \frac{\partial}{\partial x_k}(S_{ij}T_{pq})\delta_{pi}\delta_{qj} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k}(S_{ij}T_{ij}) = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}T_{ij} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}S_{ij} = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^{\frac{1}{T}}T_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) \\ &\quad + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^{\frac{1}{T}}S_{pq}(\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = (\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{T} + (\nabla \mathbf{T})^{\frac{1}{T}} \mathbf{S}. \quad (3.38)\end{aligned}$$

### 3.5 O laplaceano de um tensor de segunda ordem

A partir daqui é possível estabelecer uma definição para a operação na qual se obtém o laplaceano de um tensor, que é um outro tensor. Do visto até aqui conclui-se que, dado  $\mathbf{S} \in \text{Lin}$ , tal operação denotada por  $\Delta \mathbf{S}$  é definida como sendo

$$\Delta \mathbf{S} = [\nabla(\nabla \mathbf{S})]\mathbf{I}, \quad (3.39)$$

onde vale a pena observar que o tensor  $\nabla(\nabla \mathbf{S})$  é de quarta ordem. Desta forma veja que o tensor  $\Delta \mathbf{S}$  é o seguinte

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{S} &= [\nabla(\nabla \mathbf{S})]\mathbf{I} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_l} \left[ \frac{\partial}{\partial x_k} S_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_k \right] \otimes \mathbf{e}_l \right] \delta_{rs}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) = \\ &= \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \delta_{rs}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) = \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \delta_{kl} = \\ &= \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \quad (3.40)\end{aligned}$$

Note que, em outras palavras, o que se obtém é o laplaceano de cada uma das componentes do tensor  $\mathbf{S}$ . Outra forma equivalente de escrever o laplaceano de um tensor de segunda ordem é a seguinte

$$\Delta \mathbf{S} = \text{div} (\nabla \mathbf{S}), \quad (3.41)$$

em efeito, definindo o divergente de um tensor de terceira ordem como sendo

$$\text{div} \mathbf{S} = (\nabla \mathbf{S}) \mathbf{I}, \quad (3.42)$$

tem-se

$$\text{div} (\nabla \mathbf{S}) = [\nabla (\nabla \mathbf{S})] \mathbf{I} = \Delta \mathbf{S}. \quad (3.43)$$

### 3.6 Um exemplo interessante

Um bom exemplo do potencial de trabalhar de forma intrínseca com tensores de terceira ordem é fornecido pela seguinte identidade

$$\nabla (\text{div} \mathbf{v}) = \text{div} (\nabla \mathbf{v})^T. \quad (3.44)$$

Por um lado sabe-se que, sendo  $\mathbf{A} \in \text{Lin}$  um tensor constante, é

$$\nabla (\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}) = (\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{A}, \quad (3.45)$$

e além disso

$$(\nabla (\nabla \mathbf{u}))^{\frac{1}{T}} = \nabla ((\nabla \mathbf{u})^T), \quad (3.46)$$

e

$$\text{div} \mathbf{S} = (\nabla \mathbf{S}) \mathbf{I}. \quad (3.47)$$

Com estes resultados observe que tomando  $\mathbf{S} = \nabla \mathbf{v}$  resulta

$$\begin{aligned} \nabla (\text{div} \mathbf{v}) &= \nabla (\nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{I}) = \nabla (\mathbf{S} \cdot \mathbf{I}) = (\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{I} = (\nabla (\nabla \mathbf{v}))^{\frac{1}{T}} \mathbf{I} = \\ &= (\nabla (\nabla \mathbf{v})^T) \mathbf{I} = \text{div} (\nabla \mathbf{v})^T. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Logo resulta

$$\nabla (\text{div} \mathbf{v}) = \text{div} (\nabla \mathbf{v})^T, \quad (3.49)$$

que é o resultado buscado.

## 4 Resultados envolvendo derivadas materiais

Nesta seção apresentam-se dois resultados que constituem uma aplicação específica do que foi desenvolvido nas seções anteriores. Tal aplicação aparece usualmente na área de análise de sensibilidade quando abordada de forma axiomática através das ferramentas fornecidas pela mecânica do contínuo.

#### 4.1 Derivada material do divergente de um tensor de segunda ordem

Suponha que se deseja calcular a derivada material do divergente de um tensor de segunda ordem  $\mathbf{S}$ , isto é  $(\text{div } \mathbf{S})$ . Aqui  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidade. Sabendo que

$$\dot{\text{div}} \mathbf{u} = \text{div } \dot{\mathbf{u}} - (\text{grad } \mathbf{u})^T \cdot \text{grad } \mathbf{v} \quad (4.1)$$

resulta

$$\begin{aligned} (\dot{\text{div}} \mathbf{S}) \cdot \mathbf{a} &= (\text{div } (\dot{\mathbf{S}}^T \mathbf{a})) = \text{div } (\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{a}}) - (\text{grad } (\mathbf{S}^T \mathbf{a}))^T \cdot \text{grad } \mathbf{v} = \\ &= \text{div } \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a} - (\text{grad } (\mathbf{S}^T \mathbf{a})) \cdot (\text{grad } \mathbf{v})^T = \text{div } \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a} - (\text{grad } \mathbf{S})^T \mathbf{a} \cdot (\text{grad } \mathbf{v})^T = \\ &= \text{div } \dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot (\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T = [\text{div } \dot{\mathbf{S}} - (\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T] \cdot \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Logo, segue-se que

$$(\dot{\text{div}} \mathbf{S}) = \text{div } \dot{\mathbf{S}} - (\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T. \quad (4.3)$$

#### 4.2 Derivada material do divergente de um tensor de terceira ordem

Suponha agora que se deseja calcular a derivada material do divergente de um tensor de terceira ordem  $\mathbf{S}$ , isto é  $(\text{div } \mathbf{S})$ . Aqui  $\mathbf{v}$  é o campo de velocidade. Sabendo que

$$(\dot{\text{div}} \mathbf{S}) = \text{div } \dot{\mathbf{S}} - (\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T. \quad (4.4)$$

resulta

$$\begin{aligned} (\dot{\text{div}} \mathbf{S})^T \mathbf{a} &= (\text{div } (\dot{\mathbf{S}}^T \mathbf{a})) = \text{div } (\mathbf{S}^T \dot{\mathbf{a}}) - (\text{grad } (\mathbf{S}^T \mathbf{a}))(\text{grad } \mathbf{v})^T = \\ &= (\text{div } \dot{\mathbf{S}})^T \mathbf{a} - ((\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T)^T \mathbf{a} = \\ &= [(\text{div } \dot{\mathbf{S}})^T - ((\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T)^T] \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

do que se obtém

$$(\dot{\text{div}} \mathbf{S})^T = (\text{div } \dot{\mathbf{S}})^T - ((\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T)^T, \quad (4.6)$$

e portanto, transpondo ambos os membros

$$(\dot{\text{div}} \mathbf{S}) = \text{div } \dot{\mathbf{S}} - (\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T. \quad (4.7)$$

Observe que aqui a operação  $(\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T$  envolve a aplicação de um tensor de quarta ordem em um de segunda ordem, resultando um tensor de segunda ordem, pelo que a expressão faz sentido. No processo para achar esta expressão usou-se o seguinte fato

$$(\text{grad } (\mathbf{S}^T \mathbf{a}))(\text{grad } \mathbf{v})^T = ((\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T)^T \mathbf{a}, \quad (4.8)$$

onde  $\text{grad } \mathbf{S}$  é o gradiente de um tensor de terceira ordem, que resulta um de quarta ordem. Para entender melhor esta identidade vejamos em componentes como resulta

$$\begin{aligned}
 (\text{grad } (\mathbf{S}^T \mathbf{a}))(\text{grad } \mathbf{v})^T &= \\
 \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_l} a_r (((\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k)^T \mathbf{e}_r) \otimes \mathbf{e}_l) \frac{\partial v_p}{\partial x_q} (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q)^T &= \\
 \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_l} a_i (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \frac{\partial v_p}{\partial x_q} (\mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_p) &= \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} a_i \mathbf{e}_j = \\
 \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_l} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l) \frac{\partial v_p}{\partial x_q} (\mathbf{e}_q \otimes \mathbf{e}_p) a_r \mathbf{e}_r &= \\
 \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)^T a_r \mathbf{e}_r &= ((\text{grad } \mathbf{S})(\text{grad } \mathbf{v})^T)^T \mathbf{a}. \quad (4.9)
 \end{aligned}$$

## 5 Resultados envolvendo integrais no domínio e no contorno

Nesta seção apresentam-se alguns resultados integrais estendidos a tensores de terceira ordem. Considera-se sempre que  $\Omega$  é um domínio conexo com contorno suficientemente regular de forma que os teoremas da divergência possam ser aplicados.

### 5.1 Teorema da divergência para tensores de terceira ordem

Vejamos que o seguinte resultado é válido

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{S} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \, d\partial\Omega. \quad (5.1)$$

Para isto note que, dado um tensor arbitrário e utilizando o teorema da divergência obtém-se

$$\begin{aligned}
 \left[ \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{S} \, d\Omega \right] \cdot \mathbf{A} &= \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{S} \cdot \mathbf{A} \, d\Omega = \int_{\Omega} \text{div } (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \mathbf{A}) \, d\Omega = \\
 \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}^{\frac{1}{T}} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{A} \cdot \mathbf{S} \mathbf{n} \, d\partial\Omega = \left[ \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \mathbf{n} \, d\partial\Omega \right] \cdot \mathbf{A}, \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

e o resultado segue.

Considere agora que  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{S}$ , então a aplicação direta da (5.1) juntamente à (3.30) resulta

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{S} \, d\Omega = \int_{\Omega} \text{div } (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \, d\Omega = \int_{\Omega} [\mathbf{u} \otimes \text{div } \mathbf{S} + (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}^T] \, d\Omega, \quad (5.3)$$

e

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n} \, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{S})\mathbf{n} \, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \otimes (\mathbf{S}\mathbf{n}) \, d\partial\Omega. \quad (5.4)$$

Logo, segue-se que

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u} \otimes \operatorname{div} \mathbf{S} + (\nabla \mathbf{u})\mathbf{S}^T] \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \otimes (\mathbf{S}\mathbf{n}) \, d\partial\Omega. \quad (5.5)$$

Por outro lado seja  $\mathbf{S} = \mathbf{S} \otimes \mathbf{u}$ , então a aplicação direta da (5.1) juntamente à (3.28) resulta

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{S} \, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} (\mathbf{S} \otimes \mathbf{u}) \, d\Omega = \int_{\Omega} [(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{S} + (\nabla \mathbf{S})\mathbf{u}] \, d\Omega, \quad (5.6)$$

e

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n} \, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{S} \otimes \mathbf{u})\mathbf{n} \, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{S} \, d\partial\Omega. \quad (5.7)$$

Logo, segue-se que

$$\int_{\Omega} [(\operatorname{div} \mathbf{u})\mathbf{S} + (\nabla \mathbf{S})\mathbf{u}] \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})\mathbf{S} \, d\partial\Omega. \quad (5.8)$$

### 5.2 Teorema integral para o gradiente de um tensor de segunda ordem

Vejamos agora que o seguinte resultado é válido

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{S} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \otimes \mathbf{n} \, d\partial\Omega. \quad (5.9)$$

Para isto note que, dado um vetor arbitrário e utilizando o resultado que estabelece que

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \, d\partial\Omega, \quad (5.10)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\Omega} \nabla \mathbf{S} \, d\Omega \right]^T \cdot \mathbf{a} &= \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{a} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \, d\Omega = \\ &= \int_{\partial\Omega} (\mathbf{S}^T \mathbf{a}) \otimes \mathbf{n} \, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{S} \otimes \mathbf{n})^T \mathbf{a} \, d\partial\Omega = \left[ \int_{\partial\Omega} \mathbf{S} \otimes \mathbf{n} \, d\partial\Omega \right]^T \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

e o resultado segue.

### 5.3 O teorema de Green para expressões tensoriais

Lembre que o teorema de Green para campos escalares  $u, v$  estabelece o seguinte

$$\int_{\Omega} u \Delta v - v \Delta u \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (u \nabla v - v \nabla u) \cdot \mathbf{n} \, d\partial\Omega. \quad (5.12)$$

Suponha agora que se tem um campo vetorial  $\mathbf{u}$  e um campo tensorial  $\mathbf{S}$  e se tem a seguinte expressão

$$\int_{\Omega} [(\Delta \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\Delta \mathbf{u})] \, d\Omega, \quad (5.13)$$

que dá como resultado um vetor. A continuação se vê que de alguma forma é possível levar os termos ao contorno assim como foi feito no caso de campos escalares.

Primeiro observe que

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla \mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}) + \mathbf{S} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}), \quad (5.14)$$

e portanto, lembrando que  $\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) = \Delta \mathbf{u}$ , resulta

$$\mathbf{S}(\Delta \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}), \quad (5.15)$$

onde usou-se a expressão obtida anteriormente para  $\operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{T})$ , onde  $\mathbf{S}, \mathbf{T}$  são tensores de segunda ordem. Por outro lado seja  $\mathbf{a} \in V$  arbitrário. Considere a definição do divergente de um tensor de segunda ordem

$$\left( \operatorname{div} \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u})^T \right] \right) \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div} \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u}) \mathbf{a} \right]. \quad (5.16)$$

Utilizando sucessivamente as identidades (2.38), (3.22), (3.5), (3.41) e finalmente aplicando as definições de produto escalar obtém-se o seguinte

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u}) \mathbf{a} \right] &= \operatorname{div} \left[ (\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \right] = \\ &= (\nabla \mathbf{S}) \cdot \nabla (\mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \operatorname{div}(\nabla \mathbf{S}) = \\ &= (\nabla \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{a} \otimes \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \Delta \mathbf{S} = \mathbf{a} \cdot ((\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}) + (\Delta \mathbf{S})\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Assim sendo, da arbitrariedade de  $\mathbf{a}$  resulta o seguinte

$$\operatorname{div} \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u})^T \right] = (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}) + (\Delta \mathbf{S})\mathbf{u}, \quad (5.18)$$

e portanto

$$(\Delta \mathbf{S})\mathbf{u} = \operatorname{div} \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u})^T \right] - (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}). \quad (5.19)$$

Subtraindo a (5.15) da (5.19) tem-se

$$(\Delta \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\Delta \mathbf{u}) = \operatorname{div} \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u})^T \right] - \operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla \mathbf{u}). \quad (5.20)$$

Integrando ambos os membros desta identidade no domínio  $\Omega$  e aplicando o

teorema da divergência resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [(\Delta \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\Delta \mathbf{u})] \, d\Omega &= \\ \int_{\Omega} \left[ \operatorname{div} \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u})^T \right] - \operatorname{div} (\mathbf{S} \nabla \mathbf{u}) \right] \, d\Omega &= \\ \int_{\partial \Omega} \left[ \left[ ((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}} \mathbf{u})^T \right] - (\mathbf{S} \nabla \mathbf{u}) \right] \mathbf{n} \, d\partial \Omega. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ainda é possível simplificar mais a expressão como segue

$$\int_{\Omega} [(\Delta \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\Delta \mathbf{u})] \, d\Omega = \int_{\partial \Omega} [((\nabla \mathbf{S})\mathbf{n})\mathbf{u} - (\mathbf{S} \otimes \mathbf{n})\nabla \mathbf{u}] \, d\partial \Omega, \quad (5.22)$$

que é o resultado buscado. Ou, equivalentemente, em termos das derivadas na direção da normal tanto do campo  $\mathbf{u}$  como do campo  $\mathbf{S}$  é

$$\int_{\Omega} [(\Delta \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\Delta \mathbf{u})] \, d\Omega = \int_{\partial \Omega} [((\nabla \mathbf{S})\mathbf{n})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n}] \, d\partial \Omega. \quad (5.23)$$

Esta expressão é uma generalização do teorema de Green para campos vetoriais e tensoriais.

## 6 Outras operações entre tensores de terceira e de segunda ordem

Nas seções apresentadas realizou-se de forma natural a operação da aplicação de um tensor de terceira ordem  $\mathbf{S}$  a um tensor de segunda ordem  $\mathbf{T}$  resultando em um vetor  $\mathbf{a}$ , isto é

$$\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{a} \in V. \quad (6.1)$$

Nesta operação está envolvida a condensação dos dois últimos índices do tensor  $\mathbf{S}$  com os dois índices do tensor  $\mathbf{T}$ .

Considere agora a aplicação de um tensor de segunda ordem  $\mathbf{T}$  a um tensor de segunda ordem  $\mathbf{R}$ , que dá como resultado um tensor de segunda ordem  $\mathbf{U}$ , isto é

$$\mathbf{T}\mathbf{R} = \mathbf{U} \in Lin. \quad (6.2)$$

Aqui a operação envolve a condensação do último índice do tensor  $\mathbf{T}$  com o primeiro do tensor  $\mathbf{R}$ . Tomando como base esta operação, observe que para tensores de terceira ordem é possível definir uma operação na qual um tensor de terceira ordem  $\mathbf{S}$  aplicado sobre um tensor de segunda ordem  $\mathbf{T}$  dê como resultado um tensor de terceira ordem  $\mathbf{R}$ , isto é, definir a seguinte operação

$$\mathbf{S} \curlyvee \mathbf{T} = \mathbf{R} \in \mathcal{W}. \quad (6.3)$$

Esta operação envolve a condensação do último índice de  $\mathbf{S}$  com o primeiro de

$\mathbf{T}$ , em efeito, em componentes resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= S_{ijk}T_{pq}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \curlyvee (\mathbf{e}_p \otimes \mathbf{e}_q) = \\ &S_{ijk}T_{pq}\delta_{pk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_q) = S_{ijk}T_{kq}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_q). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Assim, a componente  $R_{ijk}$  é dada por

$$R_{ijk} = S_{ijs}T_{sk}. \quad (6.5)$$

Analogamente, pode-se definir a operação entre dois tensores  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$  de terceira ordem como segue

$$\mathbf{S} \curlyvee \mathbf{T} = \mathbf{R} \in Lin, \quad (6.6)$$

onde aqui os últimos dois índices do tensor  $\mathbf{S}$  condensam com os dois primeiros do tensor  $\mathbf{T}$  resultando em um tensor de segunda ordem  $\mathbf{R}$ . De fato, neste caso é

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= S_{ijk}T_{rst}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) \curlyvee (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s \otimes \mathbf{e}_t) = \\ &S_{ijk}T_{rst}\delta_{rj}\delta_{sk}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t) = S_{ijk}T_{jkt}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_t). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Assim, a componente  $R_{ij}$  é dada por

$$R_{ij} = S_{irs}T_{rsj}. \quad (6.8)$$

Com esta definição observe que para  $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{U}$  e para  $\mathbf{R} = \mathbf{V} \otimes \mathbf{v}$  é

$$\mathbf{S} \curlyvee \mathbf{R} = (\mathbf{u} \otimes \mathbf{U}) \curlyvee (\mathbf{V} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{V})(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}). \quad (6.9)$$

Trabalhando com estas definições é possível definir todo um grupo de relações envolvendo tensores de terceira ordem, tensores de segunda ordem e vetores.

## 7 Temas em aberto

Ainda é possível estender várias das operações com vetores e tensores de segunda ordem para tensores de segunda ordem e de terceira ordem respectivamente. Um exemplo seria definir a operação do produto vetorial entre um tensor  $\mathbf{S}$  e um vetor  $\mathbf{a}$ , ou entre dois tensores  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{T}$ , ou seja

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \times \mathbf{a} \\ \mathbf{S} \times \mathbf{T} \end{aligned} \quad (7.1)$$

Assim poderia ser definida a operação rotacional de um tensor somente em termos do gradiente do tensor. Uma tentativa seria a seguinte

$$\text{curl } \mathbf{T} \times \mathbf{a} = (\nabla \mathbf{T} - (\nabla \mathbf{T})^T)\mathbf{a}. \quad (7.2)$$

O tratamento de tensores de quarta ordem é totalmente análogo. Porém, à medida que aumenta o grau do tensor é óbvio que aumentam as definições necessárias junto com as operações possíveis. Um exemplo disto é como definir o transposto de um tensor de quarta ordem. Para isto podem-se definir vários tipos de transpostos. Por exemplo, dado o tensor  $\mathbb{S}$  de quarta ordem

$$\mathbb{S} = S_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l), \quad (7.3)$$

as seguintes operações de transposição podem ser definidas

$$\mathbb{S}^T = S_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)^T = S_{ijkl}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j), \quad (7.4)$$

$$\mathbb{S}^{\mathcal{T}} = S_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)^{\mathcal{T}} = S_{ijkl}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l), \quad (7.5)$$

$$\mathbb{S}^{\mathfrak{T}} = S_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)^{\mathfrak{T}} = S_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k), \quad (7.6)$$

$$\mathbb{S}^{\mathbf{T}} = S_{ijkl}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)^{\mathbf{T}} = S_{ijkl}(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_k). \quad (7.7)$$

## Agradecimentos

Este trabalho foi realizado no curso denominado *Mecânica do Contínuo* correspondente ao Programa de Doutorado em Modelagem Computacional do Laboratório Nacional de Computação Científica sob a supervisão do Prof. Edgardo Taroco.

## Bibliografia

- [1] M.E. Gurtin, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York, 1981.
- [2] M. Lembo, P. Podio-Guidugli, Internal Constrains, Reactive Stresses, and the Timoshenko Beam Theory, *Journal of Elasticity* **65**, 131–148, 2001.