

# Algoritmos para a Homogeneização de Malhas Triangulares

Rodrigo L. S. Silva, Márcio Pivello, Pablo Javier Blanco, Raul A. Feijóo  
LNCC – Laboratório Nacional de Computação Científica  
{rodrigo, pivello, pjblanco, feij}@lncc.br

**Abstract.** *The generation of good quality geometry meshes is a fundamental step towards the resolution of a problem via an approximate technique such as the finite element method.. This paper presents methods that improve surface meshes, treating, particularly, triangles that have one of its edges with the size smaller than the others, called needle triangles, and triangles with an area smaller than the average area of a standard triangle within the mesh.*

**Resumo.** *A geração de malhas geométricas de boa qualidade é uma etapa fundamental na resolução de problemas através de técnicas de aproximação como o método dos elementos finitos. Este artigo descreve métodos de aprimoramento da malha de superfície, tratando, particularmente, de triângulos que possuam uma de suas arestas de tamanho bem menor que as demais, denominados Triângulos Agulha, e triângulos cuja área é muito inferior à média das áreas dos triângulos encontrados na malha.*

## 1. Introdução

Uma das possíveis formas de gerarmos geometrias tridimensionais é através da utilização de algoritmos de segmentação de imagem como crescimento de região [9], *Level Sets* [10] ou técnicas de segmentação por contornos ativos [11][12]. Apesar de eficientes, esses algoritmos têm a desvantagem de gerar geometrias descritas através de malhas triangulares pouco uniformes.

O objetivo das técnicas propostas neste artigo é tornar a malha mais homogênea, melhorando desta forma sua qualidade. Será demonstrado o algoritmo desenvolvido para remover triângulos com características geométricas muito particulares que fazem com que sejam denominados elementos tipo agulha. Também será explicada uma solução geométrica para remover triângulos que possuam área proporcionalmente menor do que a média das áreas da malha 3D. Os algoritmos desenvolvidos neste artigo fazem parte de uma ferramenta que tem por objetivo fornecer, de forma interativa, funcionalidades que permitam gerar e refinar malhas de elementos finitos 3D de boa qualidade [4]. Este ambiente foi chamado *HeMoLab* [2], sendo integrado ao *Paraview* [1], ambiente desenvolvido em C++ que utiliza a biblioteca *VTK* [5].

O projeto *HeMoLab*, em desenvolvimento no LNCC (Laboratório Nacional de Computação Científica), tem por objetivo criar um *software* que permita realizar todas as tarefas necessárias na modelagem e simulação do sistema cardiovascular humano. Este *software* permite a simulação do escoamento sanguíneo no sistema arterial humano via modelos de elementos finitos 1D, 3D ou 3D – 1D acoplados, e oferece ferramentas para a geração da malha para os 3 tipos de modelos. Em particular, a geometria dos distritos arteriais 3D pode ser obtida via segmentação de imagens médicas, de modo que o usuário pode estudar o escoamento em pacientes específicos. Após a segmentação da imagem, a geometria é utilizada como base para a geração da malha de elementos

finitos do modelo 3D. Devido às ferramentas de edição disponíveis no *Paraview*, é comum que surjam durante a fase de pré-processamento triângulos deformados, com alta razão de aspecto, e outros com área muito abaixo da área média dos elementos da malha, ao serem isoladas as regiões arteriais que serão modeladas. Neste trabalho são apresentadas soluções para identificação e solução destes problemas.

Na próxima Seção serão apresentados os trabalhos relacionados ao presente artigo. Em seguida, serão apresentados os conceitos básicos que envolvem a solução do problema. Na Seção 4 serão explicados os algoritmos de remoção de agulhas e triângulos de menor dimensão e finalmente, na Seção 5, serão apresentados resultados experimentais da aplicação dos filtros seguido das conclusões deste artigo e as propostas de trabalhos futuros.

## **2. Trabalhos relacionados**

Existem vários métodos na literatura cuja função é tornar (ou manter) malhas triangulares mais homogêneas.

Um algoritmo para remoção de triângulos mal-formados foi proposto em [14]. Basicamente os vértices destes triângulos eram removidos e um segundo algoritmo de preenchimento era utilizado para manter a conectividade da malha.

Em [13] foi usado um sistema denominado “massa-mola” para obter uma boa distribuição dos pontos em uma malha triangular. O sistema massa-mola também pode ser visto como um sistema de partículas interligadas por forças representadas pelas molas. A força exercida por estas molas depende da distância entre as partículas (vértices). Uma das desvantagens desse tipo de sistema para nossa abordagem é sua característica de suavizar regiões com uma densidade de triângulos maior do que as demais.

## **3. Conceitos básicos**

Os algoritmos propostos nesta seção, apesar de serem utilizados juntos na mesma ferramenta, foram separados em filtros distintos dentro do sistema *HeMoLab*. Para um melhor entendimento do funcionamento desses filtros, faz-se necessário introduzir alguns conceitos referentes à estrutura de dados da malha triangular de superfície utilizada no *HeMoLab*.

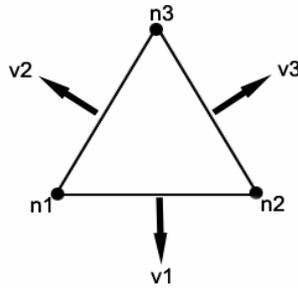
### **3.1 Elemento Triangular**

A estrutura utilizada neste trabalho é oriunda do projeto *Gemesis3D* [3]. Nesta estrutura, cada triângulo é constituído de informações a respeito dos triângulos vizinhos e dos índices de seus vértices (Figura 1). Esses índices fazem parte de uma lista global de vértices utilizada para evitar redundância de informações.

### **3.2 Grupos**

Uma peculiaridade da malha utilizada no ambiente *HeMoLab* é a necessidade da criação e manutenção de grupos de triângulos. Basicamente no contexto de aplicação desta ferramenta, as malhas triangulares constituem geometrias que por sua vez representam artérias que possuem um contorno lateral e contornos denominados “tampas”, que

representam entradas e saídas de cada distrito arterial. Os filtros a serem aplicados sobre essa malha devem manter as entradas e saídas geometricamente suaves e com um número de vértices compatível com o restante da malha. A cada um destes grupos são atribuídas características a serem utilizadas por outros módulos do sistema, como o módulo responsável por acoplar modelos 3D a um modelo 1D (Módulo de Acoplamento) por exemplo [6][7][8].

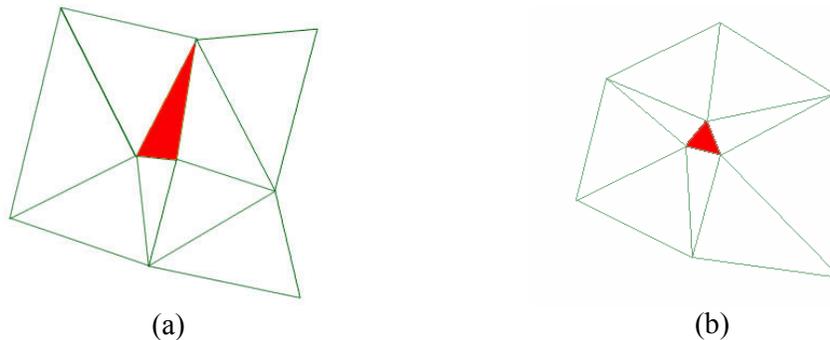


**Figura 1. Modelo de triângulo utilizado. Cada triângulo possui o endereço de seus vizinhos (v1, v2 e v3) e as coordenadas de seus vértices (n1, n2 e n3).**

Desta forma, os dois algoritmos propostos neste artigo devem tratar os casos onde os triângulos estão localizados na fronteira entre dois grupos para não alterar esta fronteira, mantendo a quantidade total de vértices de borda próxima ao número de vértices iniciais.

### **3.3 Agulhas e elementos de menor dimensão**

Agulha é o nome dado a um tipo de triângulo que tem como característica possuir uma das arestas proporcionalmente menor que as demais. Nesta configuração, o ângulo formado pelas duas arestas de maior tamanho é pequeno e o triângulo fica alongado, como o apresentado na Figura 2.a. A identificação destes triângulos no sistema é feita através deste ângulo.



**Figura 2. Exemplo de geometria 3D com triângulos mal formados (em vermelho). Em (a) triângulos agulha e em (b) triângulos de menor dimensão.**

Outro problema está relacionado a triângulos com área consideravelmente menor do que a média das áreas encontradas na malha triangular. Esses triângulos podem ou não ter

vizinhos no formato de agulhas. Um exemplo desse tipo de configuração triangular pode ser visto na Figura 2.b

## 4. Solução proposta

A remoção de triângulos mal formados requer a execução de várias etapas como será visto nas subseções a seguir. Basicamente a prévia identificação destes triângulos e o armazenamento da conectividade de seus vizinhos diretos é um ponto em comum em ambos os algoritmos. A seguir, serão explicadas em detalhes essas etapas.

### 4.1 Algoritmo para remoção de *Agulhas*

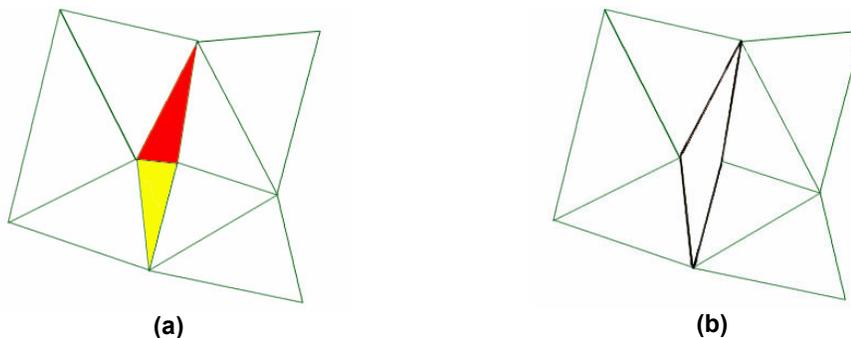
Para remover um triângulo agulha da malha, é necessário analisar se o triângulo em questão está na fronteira entre dois grupos. Se este triângulo não estiver na fronteira, a remoção é considerada trivial e será explicada a seguir. Caso contrário, se o triângulo agulha estiver na fronteira, alguns testes deverão ser feitos para que sua remoção não altere a forma da fronteira. A seguir serão explicados os casos citados nesta seção.

#### 4.1.1 Agulha não pertence à fronteira

Quando um triângulo agulha for identificado na malha e não pertencer à fronteira, os seguintes passos deverão ser executados para que possamos fazer sua remoção:

1. Contar número de agulhas contidas na malha;
2. Marcar agulhas e seus vizinhos de menor aresta;
3. Armazenar coordenadas da menor aresta de cada agulha;
4. Refazer vizinhança das agulhas a serem removidas;
5. Refazer vizinhança dos vizinhos de menor aresta das agulhas a serem removidas;
6. Criar novos vértices através da média aritmética das coordenadas da menor aresta de cada agulha;
7. Remover agulhas e vizinhos de menor aresta;
8. Refazer a vizinhança dos vizinhos remanescentes das agulhas removidas;

Os passos citados acima dão uma visão macro do problema de remoção de agulhas, visto que é um algoritmo que considera a malha como um todo. Na Figura 3, pode-se ter uma visão mais local da remoção de um triângulo agulha.



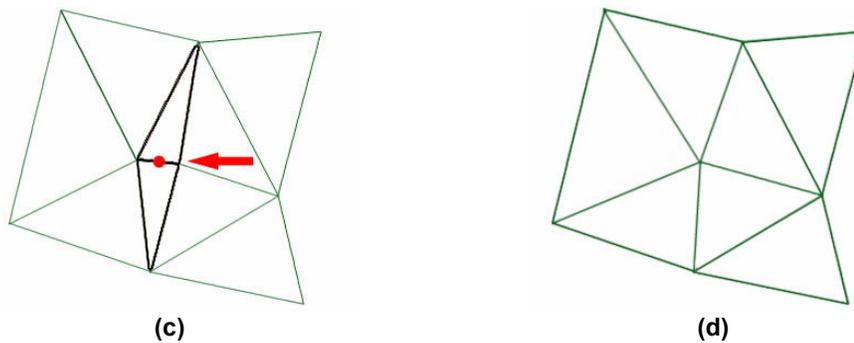


Figura 3. Remoção de um triângulo agulha. Em (a), identificação de um triângulo agulha (vermelho) e o seu vizinho de menor aresta seguido se suas respectivas remoções (b). Em (c), identificação da coordenada média da menor aresta e em (d) configuração final após a remoção.

#### 4.1.2 Agulha está na fronteira

Na subseção anterior explicou-se o caso de remoção mais simples onde o triângulo agulha não se encontra na fronteira entre dois grupos. Quando um triângulo agulha encontra-se nessa situação, deve-se definir a localização e o número de coordenadas que pertencem a esta fronteira. Os casos identificados estão resumidos no fluxograma abaixo (Figura 4).

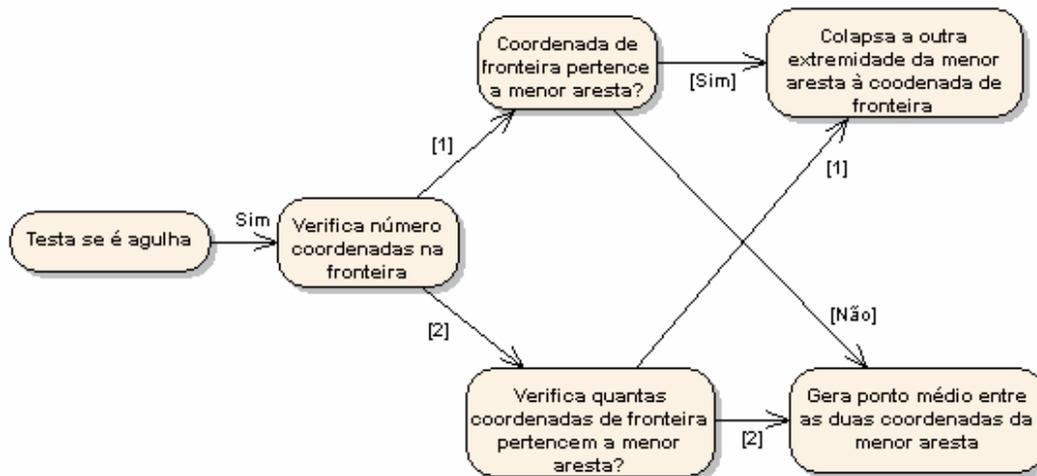


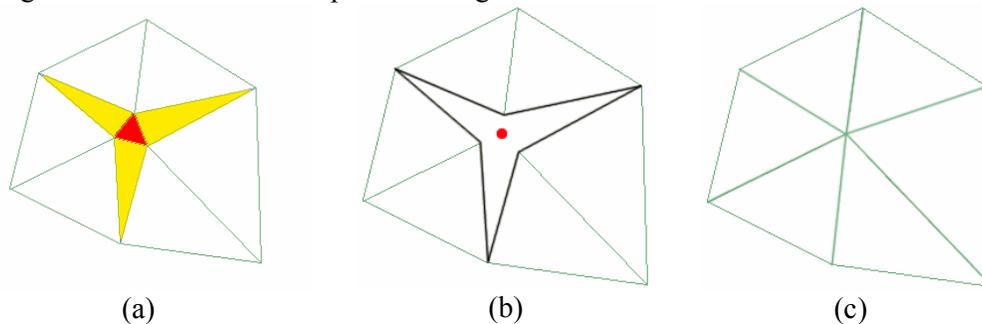
Figura 4. Fluxograma para remoção de agulhas na fronteira entre dois grupos.

#### 4.2 Algoritmo para remoção de elementos de menor dimensão

Triângulos de menor dimensão (como o triângulo visto na Figura 2.b) podem ser removidos seguindo-se os seguintes passos:

1. Calcular a área média dos triângulos da malha;
2. Marcar triângulos menores que uma dada proporção em relação a essa média;
3. Marcar os vizinhos dos triângulos do passo anterior
4. Calcular coordenadas médias dos triângulos do passo 2;
5. Triângulos que possuem coordenadas dos triângulos de menor dimensão, passam a apontar para a coordenada calculada no passo 4.
6. Remover os triângulos do passo 2;
7. Remover os triângulos do passo 3;
8. Refazer a vizinhança dos vizinhos remanescentes dos triângulos removidos;

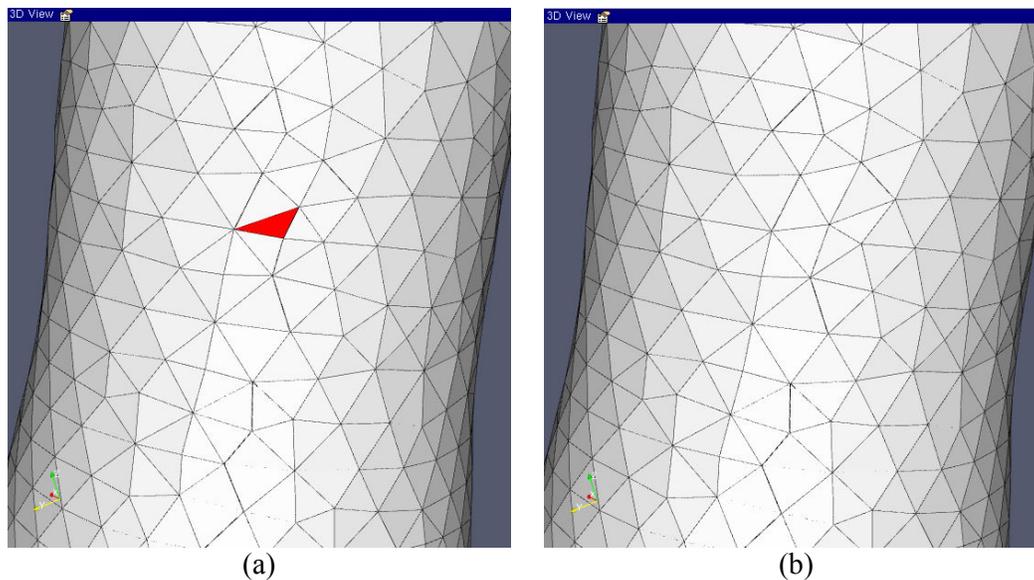
Na Figura 5 estão ilustrados os passos do algoritmo anterior.



**Figura 5. Remoção de triângulos de menor dimensão. Em (a), identificação de um triângulo de menor dimensão (vermelho) e seus vizinhos. Os triângulos identificados são removidos e a coordenada média do triângulo central é calculada (b). Em (c) as coordenadas dos triângulos remanescentes são ajustadas para a nova coordenada calculada.**

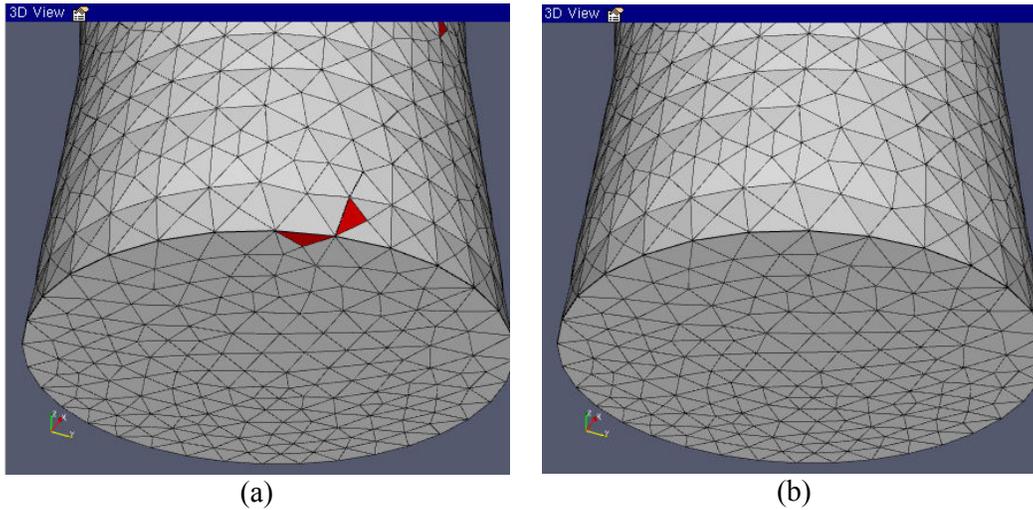
## 5. Resultados Experimentais

Nesta seção serão apresentados alguns resultados experimentais do uso dos filtros propostos neste trabalho. Na Figura 6 é demonstrada a remoção de uma agulha com ângulo mínimo de  $30^\circ$ .



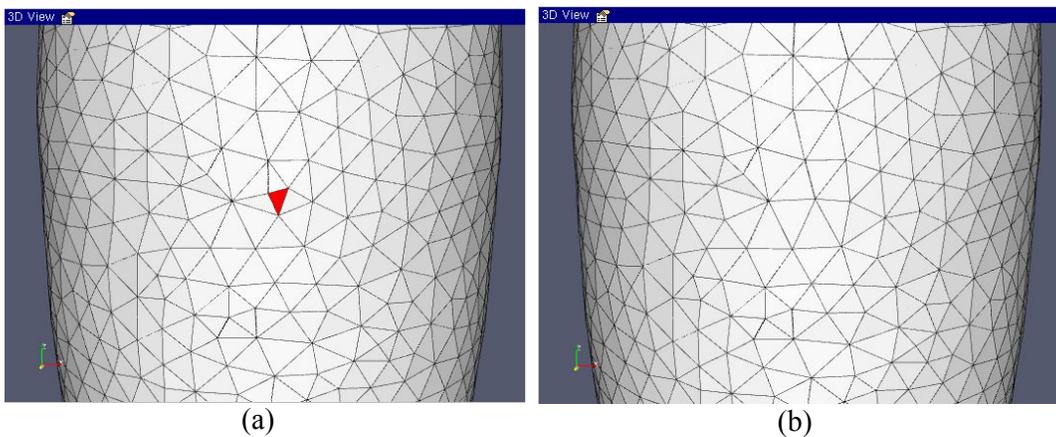
**Figura 6. (a) Identificação de uma agulha de  $30^\circ$  e sua posterior remoção (b).**

Na Figura 7 será demonstrado a remoção de agulhas encontradas na fronteira entre dois grupos. Nesta situação, cada grupo contém uma agulha, sendo um dos grupos composto pela base da superfície (parte inferior) e o segundo grupo o corpo da carótida (parte superior da Figura).



**Figura 7. (a) Identificação das agulhas e grupos distintos suas posteriores remoções (b).**

A Figura 8 apresenta um exemplo de remoção de um elemento de menor dimensão em uma malha arterial.



**Figura 8. (a) Identificação de triângulo de menor dimensão (menor do que 35% da área média dos triângulos da malha) e sua posterior remoção (b).**

## 6. Conclusões

O presente artigo descreve algoritmos que tem por objetivo prover funcionalidades que permitam processar geometrias tridimensionais para a geração de malhas de elementos finitos adequadas e de boa qualidade. As malhas processadas por esses métodos são posteriormente salvas em arquivos e processados pelo software de simulação numérica,

que permite tratar problemas não-lineares transientes que compreendem modelos de diferentes dimensões. Acredita-se que a utilização desta ferramenta no ambiente médico poderá fornecer informações mais precisas e valiosas na realização de diagnósticos e no planejamento cirúrgico.

## 7. Referências

- [1] Kitware Inc. ParaView. <http://www.paraview.org>.
- [2] Larrabide, I., Feijóo, R. A., HeMoLab: Laboratório de Modelagem em Hemodinâmica; Relatório Técnico 13/2006, LNCC, Brasil, 2006.
- [3] Vénere, M.J. Técnicas adaptativas para el Método de Elementos Finitos en dos y tres dimensiones. PhD thesis, Instituto Balseiro, Universidad Nacional de Cuyo, Novembro, 1996.
- [4] Vénere, M.J.. Optimización de la calidad de mallas de elementos finitos mediante cambios localizados de topología. Rev. Int. de Mét. Num. para Cálculo y Diseño en Ing., 13:3–13, 1997.
- [5] VTK – The Visualization Toolkit. <http://www.vtk.org>.
- [6] Formaggia, L. et al. Numerical treatment of defective boundary conditions for the navier-stokes equations. SIAM J. Numer. Anal., 40(1):376-401, 2002.
- [7] Lamponi, D.N. One dimensional and multiscale models for blood flow circulation. Tese de Doutorado, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2004.
- [8] Urquiza, S. A., Blanco, P. J., Vénere, M. J. e Feijóo, R. A. Multidimensional modelling for carotid artery blood flow. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195(33-36):4002-4017, Julho, 2006.
- [9] Adams, A. & Bischof, L. 1994. Seeded Region Growing. IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intel., 16(6).
- [10] Malladi, R.; Sethian, J. A. & Vemuri, B. C. 1995. Shape Modeling with Front Propagation: A Level Set Approach. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., 17(2), 158–175.
- [11] Cohen, L. D. 1991. On Active Contour Models and Balloons. CVGIP:Image Understanding, 53(2), 211–218.
- [12] Kass, M.; Witkin, A. & Terzopoulos, D. 1988. Snakes: Active Contour Models. International Journal of Computer Vision, 1(4), 321–331.
- [13] Figueiredo, Luiz H. de, Miranda, Jonas de, et al. 1992. Physically-Based Methods for Polygonization of Implicit Surfaces, Graphics Interface'92, 250-257.
- [14] Bern, Marshall and David Eppstein. 1992. Mesh Generation and Optimal Triangulation. Technical Report P92-00047, Xerox Palo Alto Research Center.