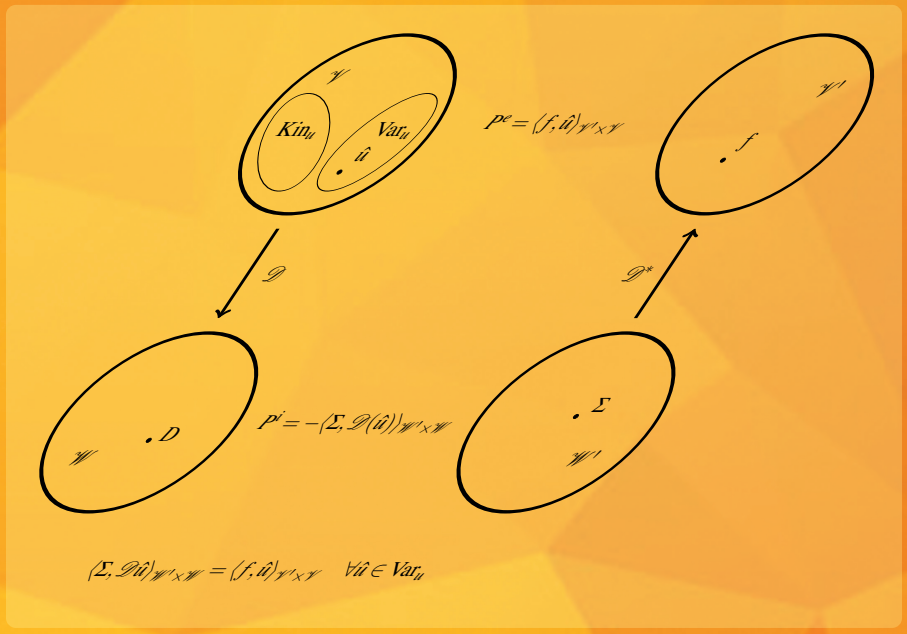
Introducción a la Formulación Variacional de la Mecánica

Fundamentos y Aplicaciones

Edgardo O. Taroco, Pablo J. Blanco y Raúl A. Feijóo



MACC
MEDICINA ASSISTIDA POR COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Laboratório Nacional de Computação Científica

Edgardo O. Taroco, Pablo J. Blanco y
Raúl A. Feijóo

Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC/MCTIC)
Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia em
Medicina Assistida por Computação Científica (INCT-MACC)
Av. Getúlio Vargas 333, Petrópolis, RJ, Brasil
E-mail: pjblanco@lncc.br, feij@lncc.br

Introducción a la Formulación Variacional de la Mecánica

Fundamentos y Aplicaciones

Febrero, 2017

Edgardo O. Taroco
HeMoLab - Hemodynamics Modeling Laboratory
INCT-MACC - National Institute of Science and Technology in Medicine Assisted by Scientific Computing
LNCC/MCTIC - National Laboratory for Scientific Computing, Brazil

Raúl A. Feijóo
HeMoLab - Hemodynamics Modeling Laboratory
INCT-MACC - National Institute of Science and Technology in Medicine Assisted by Scientific Computing
LNCC/MCTIC - National Laboratory for Scientific Computing, Brazil

Pablo J. Blanco
HeMoLab - Hemodynamics Modeling Laboratory
INCT-MACC - National Institute of Science and Technology in Medicine Assisted by Scientific Computing
LNCC/MCTIC - National Laboratory for Scientific Computing, Brazil

Introducción a la Formulación Variacional de la Mecánica
Fundamentos y Aplicaciones

ISBN: 978-85-99961-21-6

©INCT-MACC/LNCC, Brazil, 2017

This work is subject to copyright. All rights are reserved, whether the whole or part of the material is concerned, specifically the rights of translation, reprinting, reuse of illustrations, recitation, broad-casting, reproduction on microfilms or in other ways, and storage in data banks. Duplication of this publication or parts thereof is permitted only under the provisions of the Brazilian Copyright Law in its current version, and permission for use must always be obtained from INCT-MACC. Violations are liable to prosecution under the Brazilian Copyright Law.

The use of general descripitive names, resgistered names, trademarks, etc. in this publication does not imply, even in the absence of a specific statement, that such names are exempt from the relevant protective laws and regulations and therefore free for general use.

Cover design: Carla Maduro
Cover image: Carla Maduro from book's images

Typesetting with LaTeX
Printed in Brazil

National Institute of Science and Technology in Medicine Assisted by Scientific Computing and National Laboratory for Scientific Computing, Av. Getúlio Vargas 333, Quitandinha, 25651-075, Petrópolis, RJ, Brazil.

Esta monografía está dedicada a nuestras respectivas familias.

Prefacio

Esta monografía fue escrita de manera intermitente a lo largo del período comprendido entre los años de 1980 y 2016 con el objetivo de proporcionar a los alumnos de diversos cursos organizados por los autores así como del posgrado del Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) los fudamentos teóricos y computacionales de la Mecánica dentro de un enfoque puramente variacional. Ella es el resultado de los conocimientos adquiridos y divulgados por sus autores desde la fundación del LNCC: iniciada con el surgimiento del LAC - Laboratório de Cálculo del CBPF - Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas en 1977, pasando por la fundación del LCC - Laboratório de Computação Científica en 1980 y, posteriormente, por la redesignación del LCC en LNCC en 1982 y culminando con la transferencia de esta institución para la ciudad de Petrópolis en 1998.

Parte de los textos aquí presentados fueron utilizados en los diversos *Cursos de Mecânica Teórica e Aplicada* organizados por dos de los autores (E.O.T. y R.A.F.)

- *1ro. Curso de Mecânica Teórica e Aplicada* sobre el tema *Teoria das Cascas e suas Aplicações na Engenharia* (Módulo I - Princípios Básicos, 5 a 30 de Julio de 1982; Módulo II - Modelos Mecânicos, 3 de Enero a 11 de Febrero de 1983; y Módulo III - Instabilidade de Cascas, 4 a 30 de Julio de 1983).
- *2do. Curso de Mecânica Teórica y Aplicada* sobre el tema *Fundamentos do Método dos Elementos Finitos e suas Aplicações na Engenharia* (Módulo I - Fundamentos do Método dos Elementos Finitos, 2 a 27 de Julio de 1984; Módulo II - Aplicações do Método dos Elementos Finitos na Mecânica dos Sólidos, 7 de Enero a 1 de Febrero de 1985; Módulo III - Aspectos Modernos do Método dos Elementos Finitos, 1 a 26 de Julio de 1985).
- *3ro. Curso de Mecânica Teórica e Aplicada* sobre el tema *Otimização: Fundamentos e Aplicações na Engenharia* (Módulo I - Otimização na Modelagem e Análise de Problemas de Engenharia, 7 de Julio a 1 de Agosto de 1986; Módulo II - Projeto Ótimo Fundamentos e Aplicações, 6 a 31 de Julio de 1987).

También parte de estos textos fueron utilizados por uno de los autores (R.A.F.) en el curso que dictó durante la realización del *Seminario Latinoamericano Post Doctoral en Mecánica del Continuo y Microestructura*, organizado por la Comisión

Nacional de Energía Atómica de Argentina, patrocinado por la Organización de los Estados Americanos (OEA) y realizado en Buenos Aires, Julio-Agosto de 1984.

Solamente y a partir de 1998 cuando el LNCC es transferido para Petrópolis y se da inicio al Programa de Posgrado del LNCC es que decidimos consolidar los textos arriba mencionados en una monografía que daría énfasis a la formulación de la mecánica dentro de un enfoque exclusivamente variacional. Lamentablemente y en gran parte debido al largo período de tiempo que esta monografía ha llevado hasta su finalización, uno de los autores, el Prof. Edgardo O. Taroco, no esta más con nosotros (falleció en Enero de 2010). No obstante ello decidimos mantener su nombre entre los autores en reconocimiento a sus contribuciones y en homenaje a su memoria así como a la amistad y generosidad que nos brindó a lo largo de todos esos años. De esta manera todos los errores (de cualquier naturaleza) son de responsabilidad exclusiva de los demás autores.

Este enfoque puramente variacional para presentar la mecánica fue escogido no solo por ser una de nuestras áreas de actuación, mas, también y fundamentalmente, porque consideramos que esta forma de ver la mecánica es la más adecuada en todo proceso de modelado. De hecho y como será visto a lo largo de estas notas, todo el proceso para modelar un problema de la mecánica está apoyado en tres pilares

- el primer pilar es el relacionado con la caracterización de la *cinemática*, definición de la deformación así como caracterización de las acciones de movimiento y tasas de deformación admisibles;
- el segundo pilar es el de la *dualidad* existente entre las cantidades asociadas a las acciones de movimiento y tasas de deformación con los esfuerzos externos y tensiones internas que actúan sobre cada partícula del cuerpo. Este es un aspecto que establece una clara diferencia entre nuestro abordaje y la mayoría de las publicaciones que establecen los fundamentos de la mecánica. De hecho, y dentro del abordaje variacional presentado en esta monografía, las cantidades asociadas con fuerzas y tensiones no son independientes de la cinemática adoptada para el modelo ya que son caracterizados por funcionales lineales y continuos (potencias virtuales externas e internas) definidos para las acciones de movimiento y deformación arriba mencionadas. Esto no ocurre en las publicaciones típicas de mecánica del continuo donde las fuerzas y tensiones son entidades definidas a priori e independientes de la cinemática.
- el tercer pilar es el *Principio de la Potencia Virtual* (o su generalización el Principio de la Potencia Virtual Multi-escala adecuado al modelado de problemas involucrando más de una escala). Este principio permite establecer el concepto de equilibrio entre las fuerzas externas y el estado de tensiones internas o, cuando es conocido el comportamento del material, determina el campo de desplazamientos que, a través del comportamiento constitutivo del material, determina el estado de tensiones que equilibra los esfuerzos externos.

Esta estructura variacional propuesta a lo largo de esta monografía establece pasos bien definidos para el modelado de problemas mecánicos. La misma fue llamada *Método de la Potencia Virtual* por el Prof. Paul Germain [113, 114, 115, 116, 117]. En particular, el Prof. Germain (miembro vitalicio de la Academia de Ciencia de

Francia) fue invitado por nosotros en 1982 para dictar el curso *Four Lectures on the Foundation of Shell Theory* dentro del Módulo I del 1ro. Curso de Mecânica Teórica e Aplicada que organizamos justamente para diseminar estos conceptos entre los alumnos y profesores provenientes de diversos países latinoamericanos que participaron de estos cursos. Otro profesor que contribuyó para consolidar este enfoque en estos cursos fue el Prof. Giovanni Romano (Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli, Italia).

La organización de esta monografía sigue justamente esta estructura. En la Parte I presentamos los conceptos básicos del álgebra y del análisis tensorial, donde el lector es introducido en el uso extensivo de la notación tensorial compacta. Esta notación permite presentar los principios y conceptos básicos de la mecánica de manera clara y compacta no quedando oscurecidos por la presencia de índices y componentes que quedan relegados para el momento del cálculo. La Parte II está dedicada a presentar el Método de la Potencia Virtual discutiendo ademas su aplicación al caso de materiales hiperelásticos, que experimentan fluencia y materiales plásticos. En la Parte III presentamos la aplicación de este método en el modelado de componentes estructurales tales como vigas, placas, cáscaras y torsión de barras. En la Parte IV presentamos la aplicación de esta metodología a otros problemas de la física tales como conducción estacionaria de calor, flujo de fluidos incompresibles y medios continuos de alto orden. Finalmente, en la Parte V, extendemos toda esta formulación al caso de problemas de la mecánica comprendiendo más de una escala. Esta nueva estructura la hemos llamado *Método de la Potencia Virtual Multiescala*. Finalmente en los Apéndices presentamos diversos conceptos y deducciones de manera de permitir que esta monografía sea suficientemente autocontenida.

Finalmente, y no por eso menos importante, deseamos agradecer a todos aquellos que contribuyeron para que esta monografía sea una realidad. En particular agradecemos a Gonzalo R. Feijóo, por su contribución en la primera redacción de algunos capítulos de esta monografía, y a los Profesores Enzo A. Dari (Centro Atómico Bariloche, Argentina), Claudio Padra (Centro Atómico Bariloche, Argentina), Sebastián Giusti (Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba, Argentina), Santiago A. Urquiza (Universidad Nacional de Mar del Plata, Argentina), Pablo J. Sánchez (Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe, Argentina), Alejandro Clausse (Universidad del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina) y Eduardo A. de Souza Neto (Zienkiewicz Centre for Computational Engineering, Swansea University, Reino Unido) por sus comentarios y discusiones que enriquecieron nuestro trabajo. Deseamos también agradecer a nuestros alumnos de doctorado, en particular, Gonzalo D. Ares, Gonzalo D. Maso Talou, Carlos A. Bulant y Alonso M. Alvarez que, con sus críticas y observaciones, han permitido mejorar este texto.

Petrópolis,
Febrero de 2017

Pablo J. Blanco
Raúl A. Feijóo

Sumario

Parte I ÁLGEBRA Y ANÁLISIS TENSORIAL

Álgebra Tensorial 5
1.1 Puntos y Vectores 5
1.2 Tensores de Segundo Orden 8
1.3 Tensores de Tercer Orden 21
1.4 Lectura Adicional 26

Análisis Tensorial 29
2.1 Diferenciación 29
2.2 Gradiente 34
2.3 Divergencia 36
2.4 Rotacional 39
2.5 Laplaciano 40
2.6 Teoremas Integrales 41
2.7 Coordenadas 45
2.8 Lectura Adicional 50

Parte II FORMULACIONES VARIACIONALES EN MECÁNICA

Cinemática y Principios de Potencia Virtual 55
3.1 Introducción 55
3.2 Cinemática 56
3.2.1 Cuerpo y Deformaciones 56
3.2.2 Movimiento. Tasa de Deformación 62
3.2.3 Acciones de Movimiento. Restricciones Cinemáticas 68
3.3 Dualidad entre Fuerzas y Acciones de Movimiento. 73
3.4 Dualidad entre Esfuerzos Internos y Tasas de Deformación 77
3.5 Cuerpos Libres 81
3.5.1 Principio de la Potencia Virtual 81
3.5.2 Principio de la Potencia Virtual Complementaria 87

3.6 Cuerpos con Restricciones Bilaterales 88
3.6.1 Principio de la Potencia Virtual 88
3.6.2 Principio de la Potencia Virtual Complementaria 93
3.7 Cuerpos con Restricciones Unilaterales 95
3.7.1 Principio de la Potencia Virtual 97
3.7.2 Principio de la Potencia Virtual Complementaria 101
3.8 Descripción Lagrangiana del Principio de la Potencia Virtual 102
3.9 Configuraciones Precargadas y con Tensiones Residuales 106
3.10 Linealizaciones del PPV 109
3.10.1 Resultados Básicos 109
3.10.2 Descripción Espacial Conocida 110
3.10.3 Descripción Material Conocida 111
3.11 Deformaciones y Desplazamientos Infinitesimales 112
3.11.1 Restricciones Bilaterales 113
3.11.2 Restricciones Unilaterales 114
3.12 Comentarios Finales 115
3.13 Lectura Adicional 116

Cuerpos de Material Hiperelástico en Deformaciones Infinitesimales 117
4.1 Introducción 117
4.2 Comportamiento Uniaxial 117
4.3 Extensión a Estados Múltiples 121
4.4 Equilibrio en Cuerpos Libres 126
4.4.1 Principio del Trabajo Virtual 127
4.4.2 Principio de Mínima Energía Potencial Total 128
4.4.3 Ecuaciones Locales. Condiciones de Contorno 129
4.4.4 Principio del Trabajo Virtual Complementario 131
4.4.5 Principio de Mínima Energía Complementaria 132
4.4.6 Comentarios Adicionales 134
4.5 Equilibrio en Cuerpos con Restricciones Bilaterales 134
4.5.1 Principio del Trabajo Virtual 137
4.5.2 Principio de Mínima Energía Potencial Total 137
4.5.3 Principio del Trabajo Virtual Complementario 138
4.5.4 Principio de Mínima Energía Complementaria 139
4.6 Equilibrio en Cuerpos con Restricciones Unilaterales 141
4.6.1 Principio del Trabajo Virtual 141
4.6.2 Principio de Mínima Energía Potencial Total 142
4.6.3 Principio del Trabajo Virtual Complementario 143
4.6.4 Principio de Mínima Energía Complementaria 144
4.7 Principio de Min-Max 145
4.7.1 Funcional de Hellinger-Reissner 145
4.7.2 Principio de Hellinger-Reissner 147
4.8 Funcional de Tres Campos 149
4.9 Teoremas de Castigliano 152
4.9.1 Primero y Segundo Teorema 152

4.9.2 Cotas para Desplazamientos y Cargas Generalizadas 154
4.10 Problema de la Elasto-dinámica 160
4.11 Solución Aproximada de Problemas Variacionales 164
4.11.1 Problema de la Elasto-Estática 165
4.11.2 Principio Variacional de Hellinger-Reissner 171
4.11.3 Principio Variacional Generalizado 174
4.11.4 Problemas de Contacto en Elasto-Estática 177
4.12 Lectura Adicional 180

Materiales que Experimentan Fluencia 183
5.1 Introducción 183
5.2 Aspectos Fenomenológicos de la Fluencia de Metales 183
5.3 Influencia de la Temperatura 187
5.4 Recuperación, Relajación, Cargas Cíclicas y Fatiga 190
5.5 Ecuaciones Constitutivas Uniaxiales 195
5.6 Ecuaciones Constitutivas para Estados Multiaxiales de Tensión 203
5.7 Generalización de la Ley Constitutiva 211
5.8 Ecuaciones Constitutivas para Componentes Estructurales 215
5.8.1 Vigas en Flexión 215
5.8.2 Vigas en Flexión y Tracción/Compresión 218
5.8.3 Cáscaras y Placas 223
5.9 Problema de Equilibrio en Fluencia Estacionaria 223
5.9.1 Enunciado del Problema 225
5.9.2 Formulación Variacional 227
5.9.3 Unicidad del Campo de Velocidades y de Tensiones 229
5.9.4 Principios Variacionales de Mínimo 232
5.10 Método de la Velocidad y Fuerza Ficticia. Teoremas de Castigliano . 236
5.11 Cotas para las Velocidades y Fuerzas Generalizadas 239
5.12 Ejemplos de Aplicación 243
5.12.1 Disco Girando a Velocidad Constante 243
5.12.2 Viga Empotrada con Carga Uniforme 247
5.13 Algoritmos Numéricos para Fluencia Estacionaria 250
5.14 Problema de Fluencia no Estacionaria 257
5.15 Algoritmo Numérico para Fluencia No Estacionaria 259
5.16 Lectura Adicional 260

Materiales que Experimentan Plasticidad 263
6.1 Introducción 263
6.2 Materiales Elasto-Plásticos 263
6.3 Modelo Elasto-Plástico Unidimensional 269
6.3.1 Relación Tensión-Deformación Elástica 269
6.3.2 Criterio de Plastificación Inicial 271
6.3.3 Ley de Endurecimiento 272
6.3.4 Ley de Flujo Plástico 274
6.4 Modelo Elasto-Plástico Multiaxial 277

6.4.1 Relación Elástica 278
6.4.2 Criterios de Plasticidad y de Endurecimiento 280
6.4.3 Ley de Flujo Plástico Potencial 283
6.5 Postulados de Drucker y de Hill 288
6.6 Convexidad, Normalidad y Potencial Plástico 291
6.6.1 Ley de la Normalidad y Justificación de la Ley Potencial . . . 291
6.6.2 Convexidad de la Región Admisible 293
6.7 Ley del Flujo Plástico 293
6.8 Disipación Interna 295
6.9 Funciones de Plasticidad Frecuentemente Usadas 297
6.9.1 Criterio de Von Mises 298
6.9.2 Criterio de Tresca 301
6.10 Criterios de Endurecimiento Frecuentemente Usados 303
6.11 Principios Variacionales para Análisis Incremental 304
6.11.1 Principio de Mínimo para Velocidades 305
6.11.2 Principio de Mínimo para Tasas de Tensión 307
6.11.3 Unicidad de las Tensiones 308
6.11.4 Inecuación Variacional Evolutiva en Tensiones 308
6.11.5 Principio de Mínimo Cinemático en dos Campos 309
6.12 Relaciones Constitutivas Potenciales en Incrementos 311
6.12.1 Ecuaciones Constitutivas en Tasas 311
6.12.2 Modelo en Incrementos de Deformación y Tensión 314
6.12.3 Principio Variacional en Incrementos Finitos 318
6.13 Lectura Adicional 319

Parte III COMPONENTES ESTRUCTURALES

Modelado de Vigas 325
7.1 Introducción 325
7.2 Cinemática 326
7.3 Fuerzas Generalizadas 329
7.4 Equilibrio 331
7.5 Modelo de Viga de Timoshenko 334
7.6 Comentarios Finales 338

Modelado de Barras en Torsión 341
8.1 Introducción 341
8.2 Cinemática 341
8.3 Fuerzas Generalizadas 344
8.4 Equilibrio 345
8.5 Formulación Dual 349

Modelado de Placas y Cáscaras 357
9.1 Introducción 357
9.2 Descripción Geométrica 361
9.3 Diferenciación e Integración 365
9.4 Principio de la Potencia Virtual 369
9.5 Descripción Unificada de Modelos de Cáscaras 371
9.5.1 Modelo General 371
9.5.2 Modelo de Naghdi 378
9.5.3 Modelo de Kirchhoff-Love 380
9.5.4 Modelo de Love 386
9.5.5 Modelo de Koiter 388
9.5.6 Modelo de Sanders 390
9.5.7 Modelo de Donnell-Mushtari-Vlasov 393
9.6 Ecuaciones Constitutivas y sus Restricciones Internas 394
9.6.1 Conceptos Preliminares 395
9.6.2 Modelos con Hipótesis de Naghdi 397
9.6.3 Modelos con Hipótesis de Kirchhoff-Love 406
9.7 Principales Características de los Modelos 409
9.7.1 Relación entre Tensiones Generalizadas 410
9.7.2 Equilibrio Alrededor de la Normal 411
9.7.3 Tensiones Generalizadas Reactivas 414
9.8 Nociones Básicas sobre Superficies 420
9.8.1 Preliminares 420
9.8.2 Primera Forma Fundamental 422
9.8.3 Segunda Forma Fundamental 424
9.8.4 Tercera Forma Fundamental 426
9.8.5 Propiedades del Tensor Λ 427

Parte IV OTROS PROBLEMAS DE LA FÍSICA

Conducción Estacionaria de Calor 435
10.1 Introducción 435
10.2 Cinemática 436
10.3 Principio de la Potencia Térmica Virtual 438
10.4 Principio de la Potencia Térmica Virtual Complementaria 443
10.5 Ecuaciones Constitutivas 445
10.6 Principio de Máxima Energía Térmica Total 447
10.7 Ecuación de Laplace 448

Flujo Incompresible de Fluidos 451
11.1 Introducción 451
11.2 Cinemática 452
11.3 Principio de la Potencia Virtual 454
11.4 Ecuaciones de Navier-Stokes 461
11.5 Flujo de Stokes 463

11.6 Flujo Irrotacional 465

Medios Continuos de Alto Orden 471
12.1 Introducción 471
12.2 Cinemática 472
12.3 Principio de la Potencia Virtual 479
12.4 Problema Dinámico 485
12.5 Medios Micropolares 488
12.6 Teoría de Segundo Gradiente 490

Parte V PROBLEMAS MULTIESCALA

Método de la Potencia Virtual Multiescala 503
13.1 Introducción 503
13.2 Método de la Potencia Virtual 503
13.2.1 Cinemática 503
13.2.2 Dualidad 508
13.2.3 Principio de la Potencia Virtual 511
13.2.4 Problema del Equilibrio 512
13.3 Fundamentos de la Teoría Multiescala 513
13.4 Admisibilidad Cinemática entre Escalas 514
13.4.1 Cinemática en la Macroescala 515
13.4.2 Cinemática en la Microescala 516
13.4.3 Operadores de Inserción 519
13.4.4 Operadores de Homogeneización 523
13.4.5 Admisibilidad Cinemática 526
13.5 Dualidad en la Multiescala 530
13.5.1 Potencia Virtual en la Macroescala 530
13.5.2 Potencia Virtual en la Microescala 533
13.6 Principio de la Potencia Virtual Multiescala 536
13.7 Operadores Duales 537
13.7.1 Equilibrio en la Microescala 537
13.7.2 Homogeneización de Tensiones Generalizadas 539
13.7.3 Homogeneización de Fuerzas Generalizadas 541
13.8 Comentarios Finales 542

Aplicaciones del Análisis Multiescala 545
14.1 Introducción 545
14.2 Mecánica de Sólidos con Fuerzas Externas 546
14.2.1 Cinemática Multiescala 546
14.2.2 Caracterización de la Potencia Virtual 550
14.2.3 Principio de la Potencia Virtual Multiescala 552
14.2.4 Problema de Equilibrio y Homogeneización 553
14.2.5 Operadores Tangentes 559
14.3 Mecánica de Sólidos Incompresibles 562
14.3.1 Principio de la Potencia Virtual Monoescala 563

14.3.2 Cinemática Multiescala 565
14.3.3 Principio de la Potencia Virtual Multiescala 567
14.3.4 Incompresibilidad y Configuración Material 569
14.4 Comentarios Finales 572

Parte VI APÉNDICE

Definiciones y Notaciones 575
A.1 Introducción 575
A.2 Conjuntos 575
A.3 Funciones o Transformaciones 576
A.4 Grupos 580
A.5 Morfismos 582
A.6 Espacios Vectoriales 582
A.7 Conjuntos y Dependencia en Espacios Vectoriales 586
A.8 Bases y Dimensión 587
A.9 Componentes 589
A.10 Suma de Conjuntos y Subespacios 590
A.11 Variedad Lineal 590
A.12 Conjuntos Convexos y Conos 591
A.13 Suma Directa de Subespacios 592
A.14 Transformaciones Lineales 592
A.15 Isomorfismo Canónico 598
A.16 Espacio Dual Algebraico 598
A.16.1 Complemento Ortogonal 600
A.16.2 Conos Conjugados Positivos y Negativos 601
A.17 Álgebra de V 602
A.18 Operadores Adjuntos 605
A.19 Transposición y Funciones Bilineales 606
A.20 Espacios con Producto Interno 610

Elementos del Análisis Real y Funcional 619
B.1 Introducción 619
B.2 Secuencias 621
B.3 Límite y Continuidade de Funciones 623
B.4 Espacios Métricos 624
B.5 Espacios Normados 627
B.6 Espacio Cociente 631
B.7 Transformaciones Lineales en Espacios Normados 632
B.8 Espacio Dual Topológico 634
B.9 Convergencia Fuerte y Débil 636

Funcionales y Derivada de Gâteaux 637
C.1 Introducción 637
C.2 Propiedades del Operador $\mathscr{K}$ 637
C.3 Funcionales Convexos 639
C.4 Semicontinuidad 639
C.5 Diferencial en el Sentido de Gâteaux 640
C.6 Minimización de Funcionales Convexos 640
Referencias 642

Parte I
ÁLGEBRA Y ANÁLISIS TENSORIAL

Como ya mencionamos, nuestro objetivo con estos dos capítulos que integran esta Parte I de la monografía es proporcionar al lector los conceptos básicos y suficientes en el área de álgebra (Capítulo 1) y del análisis tensorial (Capítulo 2) que serán utilizados a lo largo de esta monografía. Es importante resaltar aquí que usamos tensores escritos en su forma compacta (independiente del sistema de referencia/coordenadas adoptado). Con esto evitamos el uso de índices (asociados a las componentes de los tensores en un dado sistema de coordenadas). Como veremos más adelante, esta forma compacta permite presentar los conceptos sin oscurecerlos con la presencia (muchas veces exagerada) de índices. Al final de cada uno de estos capítulos el lector encontrará una lista de publicaciones cuya lectura recomendamos caso se desee un conocimiento más profundo en estos temas. Entretanto, reiteramos que para el estudio de esta monografia esto último puede ser dejado para una segunda lectura de la misma. A su vez el lector encontrará en los Apéndices A y B informaciónes más detalladas de los temas aquí presentados. Con esto pretendemos que la misma sea lo más autocontenida posible, evitando que el lector tenga que recurrir a diversas publicaciones para poder acompañar nuestra presentación.

Capítulo 1
Álgebra Tensorial

1.1 Puntos y Vectores

El espacio geométrico en consideración será el espacio euclideano puntual tridimensional $\mathscr{E}$. Los elementos de este espacio son llamados *puntos*. $\mathscr{E}$ no es un espacio vectorial en el sentido del álgebra ya que la *suma* de puntos es un concepto que no tiene ningún significado.

La *diferencia* entre dos puntos X e Y de $\mathscr{E}$ está definida por

$$\mathbf{v} = X - Y, \tag{1.1}$$

donde $\mathbf{v}$ es el vector de origen en Y y extremo en X. Todos los vectores $\mathbf{v}$ que podemos determinar a través de la diferencia entre puntos pertenecientes a $\mathscr{E}$, constituye el conjunto V asociado a $\mathscr{E}$. El conjunto V es en sí un espacio vectorial (real), en el cual están definidas las dos operaciones básicas (el producto de un vector por un número real y la suma de vectores) inherentes al concepto de espacio vectorial.

La operación *suma* entre un punto $Y \in \mathscr{E}$ y el vector $\mathbf{v} \in V$ define el punto $X \in \mathscr{E}$ tal que (1.1) se verifique. Esta operación nos permite definir una correspondencia biunívoca entre puntos de $\mathscr{E}$ y vectores de V. Para ello, elegimos arbitrariamente un punto O de $\mathscr{E}$. Luego, elegido este punto, para cada punto X existe un y sólo un vector $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{v} = X - O$.

El espacio V se dice tridimensional en virtud de existir en V conjuntos de tres vectores $\{\mathbf{e}_i\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ linealmente independientes[1] que generan cualquier vector $\mathbf{v} \in V$ a través de la combinación lineal $\mathbf{v} = \alpha_i \mathbf{e}_i$[2]. Cualesquiera de estos conjuntos $\{\mathbf{e}_i\}$ es llamado *base* del espacio vectorial (real) V.

Además de las operaciones básicas, multiplicación por un número real y suma de vectores, el espacio vectorial V asociado a $\mathscr{E}$ es dotado con el *producto interno*

[1] Los vectores $\{\mathbf{e}_i\}$ se dicen linealmente independientes si $\alpha_i \mathbf{e}_i = 0$ implica en $\alpha_i = 0$ para $i = 1, 2, 3$.

[2] A lo largo de esta monografía, y a no ser que se indique lo contrario, adoptaremos la notación de Einstein para abreviar la escritura de sumatorios, resultando, por ejemplo, en la siguiente notación condensada en el caso de índices repetidos $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \mathbf{e}_i = \alpha_i \mathbf{e}_i$.

o *producto escalar* entre vectores de V. Para $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$, denotaremos por $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ a esta operación, la cual está definida geométricamente como el producto de las longitudes de los dos vectores multiplicado por el coseno del ángulo que forman. Es fácil ver que esta definición satisface las propiedades del producto interno en el sentido del álgebra.

Por otra parte, y a través de esta operación, el espacio V tiene una estructura *topológica* inducida por el producto interno a través de la definición de *norma* del vector $\mathbf{v}$

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}}. \tag{1.2}$$

Haciendo uso de esta nueva operación, los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ de V se dicen *ortogonales* si $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$. A su vez, la base $\{\mathbf{e}_i\}$ se dice *ortogonal* si se verifica que $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \|\mathbf{e}_i\|\|\mathbf{e}_j\|\delta_{ij}$, donde δ_{ij} es el símbolo de Kronecker[3]. Finalmente, una base se dice *ortonormal* si además de ser ortogonal la norma de los vectores que forman la base es unitaria.

La matriz $[g_{ij}]$, $i,j \in \{1,2,3\}$, determinada por

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j, \quad i,j = 1,2,3, \tag{1.3}$$

es no singular cuando el conjunto $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base de V. A su vez, de la propia definición se sigue que $g_{ij} = g_{ji}$ es decir, $[g_{ij}]$ es una matriz simétrica. Designemos con

$$[g^{ij}] = [g_{ij}]^{-1}, \tag{1.4}$$

la inversa de la matriz $[g_{ij}]$. De la propia definición, obtenemos

$$g^{ik}g_{kj} = g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,2,3. \tag{1.5}$$

Con estos resultados podemos definir la *base dual* $\{\mathbf{e}^i\}$ asociada a $\{\mathbf{e}_i\}$ como la imagen a través de la transformación lineal

$$\begin{aligned} [g^{ij}] :& V \to V, \\ & \mathbf{e}_j \mapsto \mathbf{e}^i = g^{ij}\mathbf{e}_j. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Puede mostrarse que esta transformación produce de hecho una base para V. Recíprocamente, la aplicación de $[g_{ij}]$ sobre $\{\mathbf{e}^i\}$ nos proporciona nuevamente la base original $\{\mathbf{e}_i\}$. En efecto

$$g_{ij}\mathbf{e}^j = g_{ij}g^{jk}\mathbf{e}_k = \delta_{ik}\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_i. \tag{1.7}$$

Otro resultado útil es el siguiente

$$\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j = g^{ik}\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_j = g^{ik}g_{kj} = \delta_{ij}. \tag{1.8}$$

[3] El símbolo de Kronecker δ_{ij} es tal que $\delta_{ii} = 1$ y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$.

Un *sistema de referencia* consiste en una base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V, no necesariamente ortogonal, conjuntamente con un punto O de $\mathscr{E}$ llamado *origen del sistema de referencia*. Cuando la base es ortonormal el sistema de referencia se dice *cartesiano*.

Aquí es interesante detenernos para observar que la definición de vector fue realizada de manera **independiente** de la base o sistema de referencia adoptado. Cuando una base $\{\mathbf{e}_i\}$, y por lo tanto su dual $\{\mathbf{e}^i\}$, es adoptada, entonces cada vector $\mathbf{u} \in V$ puede ser asociado a una terna de números reales $\{u_1, u_2, u_3\}$ llamados *componentes de* $\mathbf{u}$ *respecto a la base* $\{\mathbf{e}^i\}$, definidos por

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{1.9}$$

La denominación *componentes respecto a* $\{\mathbf{e}^i\}$ surge por lo siguiente. Por ser $\{\mathbf{e}^i\}$ una base, resulta $\mathbf{u} = \alpha_i \mathbf{e}^i$ de donde

$$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i = \alpha_k \mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = \alpha_k \delta_{ki} = \alpha_i. \tag{1.10}$$

En particular, dada una base $\{\mathbf{e}_i\}$, y por lo tanto su dual $\{\mathbf{e}^i\}$, las componentes de $\mathbf{u}$ respecto a cada una de estas bases reciben los siguientes nombres

- Las componentes de $\mathbf{u}$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ son llamadas *componentes contravariantes* y están definidas por

  $$u^i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i, \quad i = 1,2,3. \tag{1.11}$$

  Luego, haciendo uso de estas componentes contravariantes el vector $\mathbf{u}$ puede ser representado por la siguiente combinación lineal $\mathbf{u} = u^i \mathbf{e}_i$.
- Las componentes de $\mathbf{u}$ respecto a la base dual $\{\mathbf{e}^i\}$ son llamadas *componentes covariantes* y están definidas por

  $$u_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_i, \quad i = 1,2,3. \tag{1.12}$$

  Luego, haciendo uso de estas componentes covariantes el vector $\mathbf{u}$ puede ser representado por la siguiente combinación lineal $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}^i$.
- Si la base es ortonormal, es fácil comprobar que su base dual es idéntica por lo que las componentes contravariantes y covariantes son exactamente las mismas, no existiendo así distinción entre ellas.

De la misma manera, dado un sistema de referencia en $\mathscr{E}$, caracterizado por la base $\{\mathbf{e}_i\}$ y el punto O de $\mathscr{E}$, podemos definir las *coordenadas* de un punto arbitrario $X \in \mathscr{E}$ como las componentes covariantes del vector $X - O$ de V, es decir

$$X_i = (X - O) \cdot \mathbf{e}_i. \tag{1.13}$$

Vemos así que un **mismo vector** $\mathbf{u} \in V$ o un mismo punto $X \in \mathscr{E}$ puede asociarse a **diferentes** ternas de componentes y representaciones dependiendo de la base o sistema de referencia adoptado[4].

Para reforzar la diferencia entre la notación compacta y la indicial observe que el producto escalar de vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ en función de sus diferentes componentes resulta

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u^i v_i = u_i v^i = u_i g^{ij} v_j = u^i g_{ij} v^j. \tag{1.14}$$

Ejercicio 1.1. Verifique que las identidades expresas por la (1.14) son válidas.

1.2 Tensores de Segundo Orden

Usaremos el término *tensor* o *tensor de segundo orden* como sinónimo de *transformación lineal*[5] *de* V *en* V. Así, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : V &\to V, \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{1.15}$$

verificando

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{u} + \mathbf{T}\mathbf{v} \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \tag{1.16}$$

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{u} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \mathbf{u} \in V. \tag{1.17}$$

Claramente las expresiones (1.16)–(1.17) son equivalentes a

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{T}\mathbf{u} + \beta\mathbf{T}\mathbf{v} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{1.18}$$

Tomando α y β nulos, obtenemos una expresión que será usada con frecuencia

$$\mathbf{T}\mathbf{0} = \mathbf{0}, \tag{1.19}$$

donde $\mathbf{0}$ en la expresión anterior representa el vector nulo de V.

---

[4] La notación empleada por nosotros será la notación *compacta*. Es decir la notación donde solamente resaltamos el elemento, en este caso el vector $\mathbf{u}$ o el punto X. La notación asociada a componentes, también llamada *indicial*, solamente será empleada durante el ánalisis de algún problema específico. Procediendo de esta manera podemos presentar los conceptos y definiciones de manera más clara y concisa ya que, por un lado, los mismos **son independientes de la base o sistema adoptado** y, por otro lado, no obscurecemos la presentación con una notación indicial que sólo debe intervenir en la etapa de cálculo. Esto muestra también que, procurando simplificar los cálculos, deberemos escoger aquella base que induzca este efecto. En otras palabras, la notación indicial no está asociada al concepto y sí a la etapa de cálculo.

[5] En este capítulo nos limitaremos a presentar los tensores de segundo y tercer orden y sus operaciones porque son los elementos que mas usaremos en esta monografía. No obstante esto, al final de la monografía, en los Apéndices, el lector encontrará cómo el espacio de las transformaciones lineales entre espacios vectoriales, no necesariamente de la misma dimensión, contiene estos tensores como casos particulares.

El conjunto de todos los tensores de segundo orden, es decir, el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en V, será denominado *Lin*

$$Lin = \{\mathbf{T}; \mathbf{T} : V \to V, \text{ lineal}\}. \tag{1.20}$$

Si la adición y multiplicación por un número real son definidas en el conjunto *Lin* por

$$(\mathbf{T}+\mathbf{S})\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}+\mathbf{S}\mathbf{u} \qquad \forall \mathbf{u} \in V, \tag{1.21}$$

$$(\alpha\mathbf{T})\mathbf{u} = \alpha(\mathbf{T}\mathbf{u}) \qquad \forall \mathbf{u} \in V, \tag{1.22}$$

entonces *Lin* es en sí mismo un espacio vectorial donde el *tensor nulo* $\mathbf{O}$ transforma todo vector $\mathbf{u} \in V$ en el vector nulo $\mathbf{0} \in V$, es decir

$$\mathbf{O}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \in V. \tag{1.23}$$

El *tensor identidad* será designado por $\mathbf{I}$ y está definido por

$$\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V. \tag{1.24}$$

Dado $\mathbf{T} \in Lin$, el conjunto de todos los vectores $\mathbf{v} \in V$ tales que $\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ será designado por $\mathscr{N}(\mathbf{T})$, o sea

$$\mathscr{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{0}\}. \tag{1.25}$$

Es fácil comprobar que $\mathscr{N}(\mathbf{T})$ es en sí mismo un subespacio vectorial de V recibiendo el nombre de *espacio nulo de* $\mathbf{T}$ (o también *nucleo de* $\mathbf{T}$).

Dados $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in Lin$, el producto (composición) de estos tensores, es otro tensor $\mathbf{T} \in Lin$ tal que

$$\mathbf{T}\mathbf{u} = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{V}. \tag{1.26}$$

En general $\mathbf{A}\mathbf{B} \neq \mathbf{B}\mathbf{A}$ y en el caso en que la igualdad se verifica diremos que $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ *conmutan*.

De las definiciones anteriores, dados $\mathbf{T}, \mathbf{S}, \mathbf{D} \in Lin$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se sigue que

$$\mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{D}) = (\mathbf{T}\mathbf{S})\mathbf{D} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{D}, \tag{1.27}$$

$$\mathbf{T}(\mathbf{S}+\mathbf{D}) = \mathbf{T}\mathbf{S}+\mathbf{T}\mathbf{D}, \tag{1.28}$$

$$\alpha(\mathbf{T}\mathbf{S}) = \mathbf{T}(\alpha\mathbf{S}), \tag{1.29}$$

$$\mathbf{I}\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{I} = \mathbf{T}. \tag{1.30}$$

En efecto, para $\mathbf{v} \in V$ arbitrario, se verifica

$$\mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{D})\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{S}(\mathbf{D}\mathbf{v})) = (\mathbf{T}\mathbf{S})(\mathbf{D}\mathbf{v}) = (\mathbf{T}\mathbf{S})\mathbf{D}\mathbf{v},, \tag{1.31}$$

a partir de lo que se verifica (1.27). También, tenemos que

$$\mathbf{T}(\mathbf{S}+\mathbf{D})\mathbf{v} = \mathbf{T}((\mathbf{S}+\mathbf{D})\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{v}+\mathbf{D}\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{v}+\mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{v} = (\mathbf{T}\mathbf{S}+\mathbf{T}\mathbf{D})\mathbf{v}, \quad (1.32)$$

verificando (1.28). De la misma forma,

$$\alpha(\mathbf{T}\mathbf{S})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{T}(\mathbf{S}\mathbf{v})) = \mathbf{T}(\alpha\mathbf{S}\mathbf{v})) = \mathbf{T}(\alpha\mathbf{S})\mathbf{v}, \quad (1.33)$$

y la (1.29) sigue. Por último, observe que

$$\mathbf{I}\mathbf{T}\mathbf{v} = \mathbf{I}(\mathbf{T}\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{v}, \quad (1.34)$$

con lo cual se prueba la (1.30).

Usaremos también la siguiente notación

$$\mathbf{T}^n = \overbrace{\mathbf{T}\mathbf{T}...\mathbf{T}}^{n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (1.35)$$

y donde $\mathbf{T}^0 = \mathbf{I}$.

La *transpuesta* de un tensor $\mathbf{T}$ es el tensor (único) $\mathbf{T}^T$ con la propiedad

$$\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}^T\mathbf{v} \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \quad (1.36)$$

Vamos a mostrar la unicidad de esta transformación. Supongamos existen dos tensores transpuestos de $\mathbf{T}$ que designaremos $\mathbf{T}_1^T$ y $\mathbf{T}_2^T$ y que supondremos diferentes, es decir $\mathbf{T}_1^T \neq \mathbf{T}_2^T$. De la definición (1.36), cada uno de estos tensores satisface

$$\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}_1^T\mathbf{v} \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \quad (1.37)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}_2^T\mathbf{v} \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \quad (1.38)$$

Restando miembro a miembro resulta

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{T}_1^T\mathbf{v} - \mathbf{T}_2^T\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{T}_1^T - \mathbf{T}_2^T)\mathbf{v} = 0 \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \quad (1.39)$$

Recordando que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, $\forall\mathbf{a} \in V$ implica $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, tenemos

$$(\mathbf{T}_1^T - \mathbf{T}_2^T)\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \forall\mathbf{v} \in V, \quad (1.40)$$

y de la definición de tensor nulo (1.23), llegamos finalmente a

$$\mathbf{T}_1^T = \mathbf{T}_2^T, \quad (1.41)$$

que contradice la hipótesis inicial de que ambos tensores eran diferentes. Por lo tanto, existe un único tensor transpuesto.

De la definición de transpuesta de un tensor es fácil concluir que, para $\mathbf{A},\mathbf{S} \in Lin$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ arbitrarios, se tiene

$$(\mathbf{S}+\mathbf{A})^T = \mathbf{S}^T + \mathbf{A}^T, \quad (1.42)$$

$$(\alpha\mathbf{S})^T = \alpha\mathbf{S}^T. \quad (1.43)$$

En efecto, sean $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ arbitrarios, luego

$$(\mathbf{S}+\mathbf{A})^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{S}+\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{S}^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{A}^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{S}^T\mathbf{u}+\mathbf{A}^T\mathbf{u})\cdot\mathbf{v} = (\mathbf{S}^T+\mathbf{A}^T)\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad (1.44)$$

con lo que probamos la (1.42). De manera similar,

$$(\alpha\mathbf{S})^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\alpha\mathbf{S})\mathbf{v} = \alpha\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\mathbf{v} = \alpha\mathbf{S}^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad (1.45)$$

y la (1.43) queda demostrada.

Como podemos apreciar, la operación tranposición es una transformación lineal de *Lin* en *Lin*, a su vez, dados $\mathbf{A},\mathbf{S} \in Lin$ arbitrarios, es

$$(\mathbf{S}\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{S}^T, \quad (1.46)$$

$$(\mathbf{S}^T)^T = \mathbf{S}. \quad (1.47)$$

En efecto, sean $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ arbitrarios, tenemos

$$(\mathbf{S}\mathbf{A})^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{S}\mathbf{A})\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{S}(\mathbf{A}\mathbf{v}) = \mathbf{S}^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{A}^T\mathbf{S}^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad (1.48)$$

con lo que llegamos a la (1.46). Analogamente

$$(\mathbf{S}^T)^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{S}^T)\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad (1.49)$$

de donde la (1.188) sigue.

El tensor $\mathbf{S}$ se dice *simétrico* si

$$\mathbf{S}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\mathbf{v} \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \quad (1.50)$$

de donde se concluye que $\mathbf{S} = \mathbf{S}^T$. Un tensor se dice *antisimétrico* si

$$\mathbf{S}\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -(\mathbf{u}\cdot\mathbf{S}\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \quad (1.51)$$

de donde se obtiene que $\mathbf{S} = -\mathbf{S}^T$.

El conjunto de todos los tensores simétricos será representado por *Sym* y el conjunto de todos los antisimétricos por *Skw*. En particular, el tensor nulo $\mathbf{O}$ es simultáneamente simétrico y antisimétrico.

Todo tensor $\mathbf{S} \in Lin$ puede representarse de una manera única como la suma de un tensor simétrico (que designaremos $\mathbf{S}^s$) y otro antisimétrico (que designaremos $\mathbf{S}^a$), es decir

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^s + \mathbf{S}^a, \quad (1.52)$$

donde

$$\mathbf{S}^s = \frac{1}{2}(\mathbf{S}+\mathbf{S}^T), \tag{1.53}$$

$$\mathbf{S}^a = \frac{1}{2}(\mathbf{S}-\mathbf{S}^T), \tag{1.54}$$

son llamados *parte simétrica* y *antisimétrica* de $\mathbf{S}$, respectivamente.

De la unicidad de la transformación de transposición, se sigue que la combinación lineal de tensores simétricos (antisimétricos) es también un tensor simétrico (antisimétrico), luego *Sym* y *Skw* son subespacios de *Lin*. A su vez de la unicidad de la descomposición simétrica y antisimétrica se sigue que *Lin* es la suma directa de estos dos subespacios

$$Lin = Sym \oplus Skw. \tag{1.55}$$

Considere $\mathbf{W} \in Skw$ arbitrario y $\mathbf{T} \in Lin$ arbitrario. Entonces es posible mostrar que para qualquier $\mathbf{u} \in V$ se tiene lo siguiente

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{W}\mathbf{u} = 0, \tag{1.56}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}^s\mathbf{u}. \tag{1.57}$$

En efecto, sea $\mathbf{u} \in V$ arbitrario, luego

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{W}\mathbf{u} = \mathbf{W}^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = -\mathbf{W}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}, \tag{1.58}$$

de donde (1.56) queda probada. De igual forma, y haciendo uso de la (1.56), se tiene

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{T}^s+\mathbf{T}^a)\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}^s\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}^a\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{T}^s\mathbf{u}, \tag{1.59}$$

y la (1.57) sigue.

El *producto tensorial* de dos vectores $\mathbf{a},\mathbf{b} \in V$ es el tensor de segundo orden $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$ que a cada vector $\mathbf{v} \in V$ le hace corresponder el vector $(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a}$

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{v} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a} \quad \forall\mathbf{v} \in V. \tag{1.60}$$

De la definición anterior, y dados $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d} \in V$ arbitrarios, obtenemos los resultados siguientes

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T = \mathbf{b}\otimes\mathbf{a}, \tag{1.61}$$

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\otimes\mathbf{d}). \tag{1.62}$$

También, dado $\mathbf{T} \in Lin$, puede mostrarse fácilmente que

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = (\mathbf{T}\mathbf{a})\otimes\mathbf{b}, \tag{1.63}$$

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{T} = \mathbf{a}\otimes(\mathbf{T}^T\mathbf{b}). \tag{1.64}$$

En efecto, considere $\mathbf{u},\mathbf{v} \in V$ arbitrarios, usando la definición (1.60) de forma recurrente, tenemos

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})^T\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{v}=\mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\mathbf{a}=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})=(\mathbf{b}\otimes\mathbf{a})\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}, \quad (1.65)$$

de lo que sigue la (1.61). Ahora vea que

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d})\mathbf{u}=(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})\mathbf{c}=(\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}= (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{d}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\otimes\mathbf{d})\mathbf{u}, \quad (1.66)$$

y se llega a la (1.62). De manera similar, se tiene

$$\mathbf{T}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{u}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{T}\mathbf{a}=((\mathbf{T}\mathbf{a})\otimes\mathbf{b})\mathbf{u}, \quad (1.67)$$

obteniendo la (1.63). Por fin, note que

$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\mathbf{T}\mathbf{u}=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{T}\mathbf{u})\mathbf{a}=(\mathbf{T}^T\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}=(\mathbf{a}\otimes(\mathbf{T}^T\mathbf{b}))\mathbf{u}, \quad (1.68)$$

y demostramos así la (1.64).

Analogamente a lo hecho con el espacio V, también es posible definir el producto escalar (o interno) en *Lin*. Para esto considere dos elementos $\mathbf{T},\mathbf{S}\in Lin$ cuya forma es $\mathbf{T}=\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2$ y $\mathbf{S}=\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2$, con $\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2,\mathbf{s}_1,\mathbf{s}_2\in V$. Luego, definimos el producto escalar $\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}$ como sigue

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S}=(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2)\cdot(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2)=(\mathbf{t}_1\cdot\mathbf{s}_1)(\mathbf{t}_2\cdot\mathbf{s}_2). \quad (1.69)$$

Con la definición (1.69) es directo mostrar que, para $\mathbf{T}\in Lin$ y para $\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$ arbitrarios, se tiene

$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\mathbf{v}. \quad (1.70)$$

En efecto, poniendo $\mathbf{T}=\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2$, y usando las definiciones (1.69) y (1.60) tenemos

$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2)\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=(\mathbf{t}_1\cdot\mathbf{u})(\mathbf{t}_2\cdot\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{t}_2\cdot\mathbf{v})\mathbf{t}_1] \mathbf{u}\cdot[(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2)\mathbf{v}]=\mathbf{u}\cdot\mathbf{T}\mathbf{v}. \quad (1.71)$$

Designemos por $\mathbf{n}$ el vector unitario normal al plano π (ver Figura 1.1). El tensor $\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ actuando sobre cualquier vector $\mathbf{v}\in V$ nos proporciona

$$(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\mathbf{v}=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}, \quad (1.72)$$

que es la *proyección ortogonal de* $\mathbf{v}\in V$ *sobre la dirección* $\mathbf{n}$. A su vez, el tensor $\mathbf{P}=\mathbf{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ actuando sobre cualquier vector $\mathbf{v}\in V$ nos da el siguiente resultado

$$\mathbf{P}\mathbf{v}=(\mathbf{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})\mathbf{v}=\mathbf{v}-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}, \quad (1.73)$$

que es la *proyección ortogonal de* $\mathbf{v}$ *sobre el plano* π.

El lector puede observar que el tensor $\mathbf{P}$ es simétrico y además $\mathbf{P}^2=\mathbf{P}$. En efecto

$$\mathbf{P}^T=(\mathbf{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})^T=\mathbf{I}^T-(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n})^T=\mathbf{I}-\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}=\mathbf{P}, \quad (1.74)$$

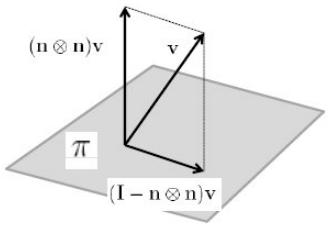


Fig. 1.1 Proyección ortogonal.

y, para $\mathbf{v} \in V$ arbitrario, se tiene

$$\mathbf{P}^2\mathbf{v} = \mathbf{P}(\mathbf{P}\mathbf{v}) = \mathbf{P}[\mathbf{v} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n}] = \mathbf{P}\mathbf{v} - (\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{P}\mathbf{n} = \mathbf{P}\mathbf{v}, \tag{1.75}$$

de lo que se demuestran las afirmaciones anteriores.

Tensores que satisfacen las dos propiedades anteriores, $\mathbf{P} \in Sym$ y $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, son llamados *tensores de proyección ortogonal*. Ejemplos de este tipo de tensor son

$$\mathbf{I}, \quad \mathbf{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \quad \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}. \tag{1.76}$$

Es posible mostrar que

$$\dim(Lin) = \dim V \times \dim V = 9, \tag{1.77}$$

es decir, el espacio *Lin* posee dimensión 9, y si adoptamos una base $\{\mathbf{e}_i\}$ para V, los conjuntos

$$\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j); i, j = 1,2,3\}, \tag{1.78}$$
$$\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j); i, j = 1,2,3\}, \tag{1.79}$$
$$\{(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j); i, j = 1,2,3\}, \tag{1.80}$$
$$\{(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j); i, j = 1,2,3\}, \tag{1.81}$$

son bases de *Lin*. De esta manera, todo tensor $\mathbf{T} \in Lin$ puede ser representado por una única combinación lineal de la base adoptada. Las componentes de $\mathbf{T}$ en la base adoptada estarán definidas de manera similar a la realizada con vectores. Así, tenemos

$$T_{ij} = \mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j, \tag{1.82}$$
$$T^{ij} = \mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}^j, \tag{1.83}$$
$$T^{i}_{\cdot j} = \mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}_j, \tag{1.84}$$
$$T_{i}^{\cdot j} = \mathbf{T}\cdot(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{T}\mathbf{e}^j, \tag{1.85}$$

donde el producto interno entre elementos de *Lin* está definido en (1.69) y también es introducido abajo a través del concepto de trazo de un tensor. Así, la representación de $\mathbf{T} \in Lin$ en función de estas componentes está dada por

$$\mathbf{T} = T_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = T^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T^i_{\cdot j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = T_i^{\cdot j}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j), \tag{1.86}$$

donde debe asumirse implícita la sumatoria por haber índices repetidos. Los coeficientes T_{ij}, T^{ij}, $T^i_{\cdot j}$ y $T_i^{\cdot j}$ son, respectivamente, las componentes *covariantes*, *contravariantes* y *mixtas* del tensor $\mathbf{T}$.

En particular, para el tensor identidad $\mathbf{I}$, tenemos

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i, \tag{1.87}$$

com suma implícita en el índice i. De hecho, dado $\mathbf{u} = u^j\mathbf{e}_j = u_j\mathbf{e}^j \in V$ arbitrario, tenemos

$$\mathbf{Iu} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i)u^j\mathbf{e}_j = u^j\mathbf{e}_i\delta_{ij} = u^i\mathbf{e}_i = \mathbf{u}, \tag{1.88}$$

o, equivalentemente

$$\mathbf{Iu} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i)u_j\mathbf{e}^j = u_j g^{ij}\mathbf{e}_i = u_j\mathbf{e}^j = \mathbf{u}. \tag{1.89}$$

En el caso en que la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V sea cartesiana, esta base y su dual son idénticas no existiendo así ninguna distinción entre las componentes de $\mathbf{T}$. En este caso simplemente hablamos de *componentes cartesianas* del tensor.

Vemos nuevamente la importancia de la notación compacta cuando comparada con la indicial. El tensor es un concepto (operador lineal en V) que **no depende de la base adoptada en** V. Lo mismo podemos decir con respecto a la operación trazo y producto interno de tensores.

Para mostrar como la notación compacta **resalta** el aspecto conceptual frente a la notación indicial, colocaremos cada una de las definiciones hasta ahora introducidas en función de ambas notaciones.

- Tensor.
  Notación compacta: $\mathbf{T} \in Lin$
  Notación indicial:

$$T_{ij} = T^{kl}g_{ki}g_{lj} = T^k_{\cdot j}g_{ki} = T_i^{\cdot k}g_{kj}, \tag{1.90}$$

$$T^{ij} = T_{kl}g^{ki}g^{lj} = T^i_{\cdot k}g^{kj} = T_k^{\cdot j}g^{ki}, \tag{1.91}$$

$$T^i_{\cdot j} = T_{kj}g^{ki} = T^{ik}g_{kj} = T_k^{\cdot l}g^{ki}g_{lj}, \tag{1.92}$$

$$T_i^{\cdot j} = T_{ik}g^{kj} = T^{kj}g_{ki} = T^k_{\cdot l}g_{ki}g_{lj}. \tag{1.93}$$

- Aplicación de un tensor a un vector.
  Notación compacta:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Tv} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \text{ y } \mathbf{T} \in Lin. \tag{1.94}$$

Notación indicial (sólo algunas de todas las posibles):

$$u_i = T_{ij}v^j = T_{ij}g^{jk}v_k = T_i^{\cdot j}v_j = T_i^{\cdot j}g_{jk}v^k, \tag{1.95}$$

$$u^i = T^{ij}v_j = T^{ij}g_{jk}v^k = T^i_{\cdot j}v^j = T_i^{\cdot j}g^{jk}v_k. \tag{1.96}$$

- Aplicación de un tensor sobre otro tensor.
  Notación compacta:

$$\mathbf{T} = \mathbf{AB} \quad \mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in Lin. \tag{1.97}$$

  Notación indicial:

$$T_{ij} = A_{ik}B^k_{\cdot j} = A_i^{\cdot k}B_{kj}, \tag{1.98}$$

$$T^{ij} = A^{ik}B_k^{\cdot j} = A^i_{\cdot k}B^{kj}, \tag{1.99}$$

$$T^i_{\cdot j} = A^i_{\cdot k}B^k_{\cdot j} = A^{ik}B_{kj}, \tag{1.100}$$

$$T_i^{\cdot j} = A_i^{\cdot k}B_k^{\cdot j} = A_{ik}B^{kj}, \tag{1.101}$$

  y sus variantes haciendo intervenir g^{ij} o g_{ij}.
- Producto tensorial de vectores.
  Notación compacta:

$$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v} \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{1.102}$$

  Notación indicial:

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j, \tag{1.103}$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^{ij} = u^i v^j, \tag{1.104}$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})^i_{\cdot j} = u^i v_j, \tag{1.105}$$

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_i^{\cdot j} = u_i v^j. \tag{1.106}$$

- Tensor simétrico.
  Notación compacta:

$$\mathbf{S} \in Sym \Leftrightarrow \mathbf{S} = \mathbf{S}^T \Leftrightarrow \mathbf{S}^a = \mathbf{O}. \tag{1.107}$$

  Notación indicial:

$$S_{ij} = S_{ji} \implies [S_{ij}] = [S_{ij}]^T, \tag{1.108}$$

$$S^{ij} = S^{ji} \implies [S^{ij}] = [S^{ij}]^T, \tag{1.109}$$

$$S^i_{\cdot j} = S_j^{\cdot i}. \tag{1.110}$$

  Es decir, para un tensor simétrico la matriz de componentes covariantes es simétrica. Lo mismo ocurre con la matriz de componentes contravariantes. Esto **no ocurre** con las matrices de componentes mixtas. En efecto, la expresión $S^i_{\cdot j} = S_j^{\cdot i}$ nos dice que los coeficientes simétricamente localizados de dos **ma-**

trices diferentes son iguales. Luego, las matrices asociadas a las **componentes mixtas** son, en general, **no simétricas**, no obstante el tensor **S** ser **simétrico**.

- Tensor antisimétrico.

  Notación compacta:

$$\mathbf{W} \in Skw \Leftrightarrow \mathbf{W} = -\mathbf{W}^T \Leftrightarrow \mathbf{W}^s = \mathbf{O}. \tag{1.111}$$

  Notación indicial:

$$W_{ij} = -W_{ji} \implies [W_{ij}] = -[W_{ij}]^T \implies W_{ii} = 0, \tag{1.112}$$

$$W^{ij} = -W^{ji} \implies [W^{ij}] = -[W^{ij}]^T \implies W^{ii} = 0, \tag{1.113}$$

$$W^i_{\cdot j} = -W_j^{\cdot i}. \tag{1.114}$$

  Es decir, para un tensor antisimétrico la matriz de componentes covariantes es antisimétrica. Lo mismo ocurre con la matriz de componentes contravariantes. Esto **no ocurre** con las matrices de componentes mixtas. En efecto, la expresión $W^i_{\cdot j} = -W_j^{\cdot i}$ nos dice que los coeficientes simétricamente localizados de dos **matrices diferentes** toman valores opuestos. Es decir, las matrices asociadas a las **componentes mixtas** no son, en general, **antisimétricas**, no obstante el tensor **W** ser **antisimétrico**.

La operación *trazo* de un tensor $\mathbf{T} \in Lin$ es la transformación lineal (funcional lineal) que a cada tensor $\mathbf{T} \in Lin$ le hace corresponder un número real, que designaremos por $\operatorname{tr}\mathbf{T}$, es decir

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} : Lin &\to \mathbb{R}, \\ \mathbf{T} &\mapsto \operatorname{tr}\mathbf{T}, \end{aligned} \tag{1.115}$$

con la propiedad

$$\operatorname{tr}(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \quad \forall \mathbf{a},\mathbf{b} \in V. \tag{1.116}$$

De la linealidad del trazo se sigue que

$$\operatorname{tr}\mathbf{T} = T^{ij}\operatorname{tr}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j) = T_{ij}\operatorname{tr}(\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j) = T^i_{\cdot j}\operatorname{tr}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^j) = T_i^{\cdot j}\operatorname{tr}(\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_j) = T^{ij}g_{ij} = T_{ij}g^{ij} = T^i_{\cdot i} = T_i^{\cdot i}. \tag{1.117}$$

Las expresiones anteriores nos permiten evaluar el $\operatorname{tr}\mathbf{T}$ en función de sus componentes. Vemos que el resultado es independiente de la base adoptada.

Como la transposición es una aplicación lineal, se sigue que

$$\operatorname{tr}\mathbf{T} = \operatorname{tr}\mathbf{T}^T, \tag{1.118}$$

$$\operatorname{tr}(\mathbf{AB}) = \operatorname{tr}(\mathbf{BA}), \tag{1.119}$$

$$\operatorname{tr}\mathbf{I} = 3. \tag{1.120}$$

En efecto, poniendo $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2$, $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{B} = \mathbf{b}_1\otimes\mathbf{b}_2$, y recordando que $\mathbf{I} = \mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}^i$, tenemos

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = \mathrm{tr}(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2) = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{t}_1 = \mathrm{tr}(\mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_1) = \mathrm{tr}\mathbf{T}^T, \tag{1.121}$$

de donde se prueba la (1.118). Además, usando (1.62), y también la (1.118), se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(\mathbf{AB}) = \mathrm{tr}[(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2)(\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2)] = \mathrm{tr}[(\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{b}_2)] = \\ (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2) = \mathrm{tr}[(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_1)] = \mathrm{tr}[(\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_2)(\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{a}_2)] = \\ \mathrm{tr}[(\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2)(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2)] = \mathrm{tr}(\mathbf{BA}),\end{aligned} \tag{1.122}$$

y se demuestra la (1.119). Finalmente, con la definición de la identidad (1.87), tenemos

$$\mathrm{tr}\mathbf{I} = \mathrm{tr}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^i) = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i = \delta_{ii} = 3, \tag{1.123}$$

demostrando la (1.120).

Usando la operación trazo, es posible definir un *producto interno* (o *producto escalar*) en *Lin*

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathrm{tr}(\mathbf{S}^T\mathbf{T}) \quad \forall \mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathit{Lin}. \tag{1.124}$$

Las siguientes propiedades son satisfechas en virtud de la definición anterior

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{S}, \tag{1.125}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} \geq 0 \quad \forall \mathbf{S} \in \mathit{Lin}, \tag{1.126}$$

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{S} = 0, \tag{1.127}$$

y el producto interno induce una norma en el espacio *Lin*

$$\|\mathbf{S}\| = \sqrt{\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}} = \sqrt{\mathrm{tr}(\mathbf{S}^T\mathbf{S})}. \tag{1.128}$$

La expresión del producto escalar (o interno) de tensores en función de sus componentes está dada por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = A_{ij}T^{ij} = A^{ij}T_{ij} = A_i^{\cdot j}T_{\cdot j}^i = S_{\cdot j}^i T_i^{\cdot j}, \tag{1.129}$$

y sus variantes haciendo intervenir g^{ij} o g_{ij}.

A continuación, para $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in V$, $\mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathit{Lin}$, $\mathbf{S} \in \mathit{Sym}$ y $\mathbf{W} \in \mathit{Skw}$ arbitrarios, presentamos algunas propiedades del producto interno en *Lin*

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{T} = \operatorname{tr}\mathbf{T}, \tag{1.130}$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{BT} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}, \tag{1.131}$$
$$\mathbf{T}\cdot(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{u}\cdot\mathbf{Tv}, \tag{1.132}$$
$$(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\otimes\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}), \tag{1.133}$$
$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{T}^s, \tag{1.134}$$
$$\mathbf{W}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{W}\cdot\mathbf{T}^a, \tag{1.135}$$
$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{W} = 0, \tag{1.136}$$
$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{A} = 0 \implies \mathbf{T} = \mathbf{O}, \tag{1.137}$$
$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{S} = 0 \implies \mathbf{T}\in \mathit{Skw}, \tag{1.138}$$
$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{W} = 0 \implies \mathbf{T}\in \mathit{Sym}, \tag{1.139}$$
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}^s\cdot\mathbf{B}^s + \mathbf{A}^a\cdot\mathbf{B}^a. \tag{1.140}$$

En efecto, de la definición (1.124) sigue directo la (1.130), pues

$$\mathbf{I}\cdot\mathbf{T} = \operatorname{tr}(\mathbf{I}^T\mathbf{T}) = \operatorname{tr}\mathbf{T}. \tag{1.141}$$

La (1.131) también se demuestra de forma directa, de hecho

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{BT} = \operatorname{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{BT}) = \operatorname{tr}[(\mathbf{B}^T\mathbf{A})^T\mathbf{T}] = \mathbf{B}^T\mathbf{A}\cdot\mathbf{T}. \tag{1.142}$$

Ejercicio 1.2. Demuestre que las expresiones (1.132)–(1.140) son válidas usando las propiedades del operador trazo.

El *determinante* de un tensor $\mathbf{A}\in \mathit{Lin}$, como operador lineal en el espacio V de dimensión 3, puede ser definido como sigue

$$\det\mathbf{A} = \frac{1}{6}\left[2\operatorname{tr}(\mathbf{A}^3) + (\operatorname{tr}\mathbf{A})^3 - 3(\operatorname{tr}\mathbf{A})\operatorname{tr}(\mathbf{A}^2)\right]. \tag{1.143}$$

Para $\mathbf{A},\mathbf{T}\in \mathit{Lin}$ y $\alpha\in\mathbb{R}$ arbitrarios, se tiene que la operación determinante satisface lo siguiente

$$\det(\mathbf{AT}) = \det(\mathbf{TA}), \tag{1.144}$$
$$\det(\mathbf{AT}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{T}), \tag{1.145}$$
$$\det(\alpha\mathbf{T}) = \alpha^3\det\mathbf{T}, \tag{1.146}$$
$$\det\mathbf{I} = 1. \tag{1.147}$$

La *inversa* del tensor $\mathbf{T}$ es un tensor $\mathbf{T}^{-1}$ con la propiedad

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T} = \mathbf{I}. \tag{1.148}$$

Un tensor $\mathbf{T}$ se dice *invertible* si y sólo si $\det\mathbf{T}\neq 0$, y si $\mathbf{T}$ es invertible, también lo es su tensor transpuesto $\mathbf{T}^T$ verificándose

$$(\mathbf{T}^T)^{-1} = (\mathbf{T}^{-1})^T = \mathbf{T}^{-T}. \tag{1.149}$$

El tensor $\mathbf{Q}$ es un *tensor ortogonal* si conserva inalterado el producto escalar entre vectores, es decir si

$$\mathbf{Qu} \cdot \mathbf{Qv} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{1.150}$$

La condición necesaria y suficiente para que el tensor $\mathbf{Q}$ sea ortogonal es

$$\mathbf{QQ}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \tag{1.151}$$

o su equivalente

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \tag{1.152}$$

El conjunto de todos los tensores ortogonales será designado por *Orth*.

Ejercicio 1.3. Demuestre que un tensor es ortogonal si y sólo si $\mathbf{QQ}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$.

Llamaremos *tensor rotación* o simplemente *rotación* a todo tensor ortogonal con determinante positivo. En particular, el conjunto de todos los tensores rotación lo designaremos por *Rot*.

El tensor $\mathbf{T}$ se dice *positivo definido* si

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Tv} > 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V, \tag{1.153}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{Tv} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{1.154}$$

Dada una base $\{\mathbf{e}_k\}$ se dice que todas las bases $\{\bar{\mathbf{e}}_k\}$ *tienen la misma orientación* que la base $\{\mathbf{e}_k\}$ si pueden obtenerse a través de una rotación. Es decir

$$\bar{\mathbf{e}}_k = \mathbf{Re}_k \quad k = 1,2,3. \tag{1.155}$$

Dado que todo tensor ortogonal $\mathbf{Q}$ es una rotación $\mathbf{R}$, o es el producto de una rotación $\mathbf{R}$ por el número -1, se sigue que únicamente existen dos clases de bases cada una de ellas asociadas a una orientación. De ahora en adelante vamos a suponer que una de estas orientaciones ha sido adoptada.

El *producto vectorial* $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ de los vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, con ángulo entre ellos llamado θ, es otro vector $\mathbf{w}$ tal que

$$\mathbf{w} \perp \text{ al plano definido por } \mathbf{u} \text{ y } \mathbf{v}, \tag{1.156}$$

$$\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \sin\theta, \tag{1.157}$$

$$\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\} \text{ tienen la misma orientación que la base adoptada.} \tag{1.158}$$

De lo anterior se sigue que

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}), \tag{1.159}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{1.160}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \times \mathbf{u}. \tag{1.161}$$

Cuando $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ son linealmente independientes, el valor $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}$ representa el volumen del paralelepípedo $\mathscr{P}$ determinado por los vectores $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$. Luego, dado el tensor $\mathbf{T}$, no resulta difícil verificar que

$$\det\mathbf{T} = \frac{\mathbf{Tu}\cdot\mathbf{Tv}\times\mathbf{Tw}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times\mathbf{w}}, \tag{1.162}$$

de donde

$$\det\mathbf{T} = \frac{vol(\mathbf{T}(\mathscr{P}))}{vol(\mathscr{P})}, \tag{1.163}$$

que nos proporciona una interpretación geométrica del determinante de un tensor $\mathbf{T}$ y donde $\mathbf{T}(\mathscr{P})$ es la imagen del paralelepípedo $\mathscr{P}$ bajo la transformación (tensor) $\mathbf{T}$ y *vol* representa volumen.

Por último, dado un tensor $\mathbf{W}\in Skw$, existe un único vector $\mathbf{w}\in V$ tal que

$$\mathbf{Wv} = \mathbf{w}\times\mathbf{v} \quad \forall\mathbf{v}\in V. \tag{1.164}$$

El vector $\mathbf{w}$ asociado al tensor antisimétrico $\mathbf{W}$ es llamado *vector axial* de $\mathbf{W}$. De esta definición se concluye que el espacio nulo de $\mathbf{W}\in Skw$, $\mathscr{N}(\mathbf{W})$, es el subespacio unidimensional de V generado por el vector axial $\mathbf{w}$ de $\mathbf{W}$, o sea

$$\mathscr{N}(\mathbf{W}) = \{\mathbf{v}\in V;\, \mathbf{Wv}=0\} = \{\mathbf{v}\in V;\, \mathbf{v}=\lambda\mathbf{w}, \forall\lambda\in\mathbb{R}\}. \tag{1.165}$$

1.3 Tensores de Tercer Orden

En esta sección vamos a continuar trabajando de manera intrínseca pero ahora con los tensores de tercer orden. Con esto será posible llevar a cabo diversas definiciones de operaciones sobre tensores de segundo orden utilizando propiedades de los tensores de tercer orden. Ejemplo de esto es el caso de la divergencia de un tensor de segundo orden (que veremos mas adelante) que puede ser definido a partir del gradiente de ese tensor.

Los tensores de tercer orden son aplicaciones lineales de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &: Lin \to V, \\ \mathbf{T} &\mapsto \mathbf{ST}, \end{aligned} \tag{1.166}$$

y también

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &: V \to Lin, \\ \mathbf{a} &\mapsto \mathbf{Sa}, \end{aligned} \tag{1.167}$$

es decir, pueden ser aplicados a elementos de V (vectores), como a elementos de Lin (tensores de segundo orden). Al conjunto (espacio vectorial) de todos los tensores de tercer orden lo designaremos por Lin. El elemento nulo en Lin se denota por $\mathbf{0}$, y

es tal que

$$\mathbf{0a} = \mathbf{O} \qquad \forall \mathbf{a} \in V, \tag{1.168}$$

$$\mathbf{0T} = \mathbf{0} \qquad \forall \mathbf{T} \in Lin. \tag{1.169}$$

En general, la notación queda definida de la siguiente forma para $\mathbf{a} \in V$, $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \in Lin$ y $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3 \in \mathsf{Lin}$, siendo que $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \in V$. La aplicación de un tensor de tercer orden sobre uno de segundo orden está dada por

$$\mathbf{ST} = (\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2) = (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}_1)(\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{t}_2)\mathbf{s}_1, \tag{1.170}$$

de la misma forma, la aplicación sobre un vector está dada por

$$\mathbf{Sa} = (\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)\mathbf{a} = (\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{a})(\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2). \tag{1.171}$$

Dentro del espacio *Lin* fue definida la operación de transpuesta de un tensor de segundo ordem como $\mathbf{a} \cdot \mathbf{Tb} = \mathbf{T}^T\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. De la misma forma, podemos definir la operación de transposición para elementos de Lin. Tenemos entonces lo siguiente

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ST} = \mathbf{S}^T\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}, \tag{1.172}$$

$$\mathbf{Sa} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{T}. \tag{1.173}$$

Vamos a mostrar que estos tensores son únicos y que a su vez $(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^T = \mathbf{S}$. Para ello, supongamos existen $\mathbf{S}_1^T \neq \mathbf{S}_2^T$, luego

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ST} = \mathbf{S}_1^T\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \qquad \forall \mathbf{a} \in V, \forall \mathbf{T} \in Lin,$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{ST} = \mathbf{S}_2^T\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} \qquad \forall \mathbf{a} \in V, \forall \mathbf{T} \in Lin.$$

Restando miembro a miembro las expresiones anteriores obtenemos

$$(\mathbf{S}_1^T - \mathbf{S}_2^T)\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0 \quad \forall \mathbf{a} \in V, \forall \mathbf{T} \in Lin, \tag{1.174}$$

que implica que

$$(\mathbf{S}_1^T - \mathbf{S}_2^T)\mathbf{a} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{a} \in V, \tag{1.175}$$

y de la (1.168) tenemos finalmente

$$\mathbf{S}_1^T = \mathbf{S}_2^T, \tag{1.176}$$

contradiciendo la hipótesis inicial.

De la misma manera, si suponemos existen $\mathbf{S}_1^{\frac{1}{T}} \neq \mathbf{S}_2^{\frac{1}{T}}$, un razonamiento similar al anterior conduce a

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{S}_1^{\frac{1}{T}} - \mathbf{S}_2^{\frac{1}{T}})\mathbf{T} = 0 \quad \forall \mathbf{a} \in V, \forall \mathbf{T} \in Lin, \tag{1.177}$$

de lo que sigue

$$(\mathbf{S}_1^{\frac{1}{T}} - \mathbf{S}_2^{\frac{1}{T}})\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{T} \in Lin, \tag{1.178}$$

y, usando la (1.169), concluimos que la hipótesis inicial es refutada, pues

$$\mathbf{S}_1^{\frac{1}{T}} = \mathbf{S}_2^{\frac{1}{T}}. \tag{1.179}$$

Finalmente, de la definición de transpuesta tenemos

$$\mathbf{S}\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{T} = (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^T\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}, \tag{1.180}$$

de donde

$$(\mathbf{S} - (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^T)\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = 0 \quad \forall \mathbf{a} \in V, \forall \mathbf{T} \in Lin, \tag{1.181}$$

esto es

$$(\mathbf{S} - (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^T)\mathbf{a} = \mathbf{O} \quad \forall \mathbf{a} \in V, \tag{1.182}$$

y analogamente, por la (1.168), se concluye que

$$\mathbf{S} = (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^T. \tag{1.183}$$

Veamos que para un tensor con estructura de la forma $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3$ se verifica

$$(\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)^T = \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3 \otimes \mathbf{s}_1. \tag{1.184}$$

Para ver esto considere las definiciones (1.170) y (1.171). Entonces, para $\mathbf{a} \in V$ y $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \in Lin$ arbitrarios, se tiene

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \cdot \mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2) = (\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}_1)(\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{t}_2)(\mathbf{a} \cdot \mathbf{s}_1) = \\ (\mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3 \otimes \mathbf{s}_1)\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2) = (\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)^T\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2) = \mathbf{S}^T\mathbf{a} \cdot \mathbf{T}.\end{aligned} \tag{1.185}$$

y la (1.184) queda demostrada.

De la misma forma se puede mostrar que

$$(\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)^{\frac{1}{T}} = \mathbf{s}_3 \otimes \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2. \tag{1.186}$$

De hecho, con (1.170) y (1.171) tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{S}\mathbf{a} \cdot \mathbf{T} = (\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)\mathbf{a} \cdot (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2) = (\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{a})(\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{t}_1)(\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{t}_2) = \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{s}_3 \otimes \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2)(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3)^{\frac{1}{T}}(\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2),\end{aligned} \tag{1.187}$$

demostrando así la (1.186).

A partir de estos resultados, es posible obtener de forma directa las siguientes relaciones

$$(\mathbf{S}^T)^T = \mathbf{S}^{\frac{1}{T}}, \tag{1.188}$$

$$((\mathbf{S}^T)^T)^T = \mathbf{S}. \tag{1.189}$$

Ejercicio 1.4. Muestre que se verifican (1.188)y (1.189).

Sea $\mathbf{a} \in V$ y $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \in Lin$ arbitrarios. Entonces podemos construir un elemento de Lin como sigue

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{T} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2, \tag{1.190}$$
$$\mathbf{T} \otimes \mathbf{a} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{a}. \tag{1.191}$$

De esta forma, considerando $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{T}, \mathbf{S} \in Lin$, es directo verificar que

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})^T = \mathbf{T} \otimes \mathbf{u}, \tag{1.192}$$
$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u})^{\frac{1}{T}} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{T}, \tag{1.193}$$
$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})\mathbf{S} = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})\mathbf{u}, \tag{1.194}$$
$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{T})\mathbf{v} = \mathbf{u} \otimes (\mathbf{T}\mathbf{v}), \tag{1.195}$$
$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u})\mathbf{S} = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{u}, \tag{1.196}$$
$$(\mathbf{T}^T \otimes \mathbf{u})^T \mathbf{S}^T = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{u}, \tag{1.197}$$
$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{u})\mathbf{v} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{T}, \tag{1.198}$$
$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T \mathbf{u} = (\mathbf{T}^T \mathbf{u}) \otimes \mathbf{v}, \tag{1.199}$$
$$(\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T \mathbf{S} = \mathbf{T}^T \mathbf{S}^T \mathbf{v}, \tag{1.200}$$
$$(\mathbf{S}^T \mathbf{u})\mathbf{v} = (\mathbf{S}\mathbf{v})^T \mathbf{u}, \tag{1.201}$$
$$\mathbf{S}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{S}\mathbf{u})\mathbf{v}. \tag{1.202}$$

Ejercicio 1.5. Demuestre que las identidades tensoriales (1.192)–(1.202) son válidas.

También es posible definir la operación de producto interno entre elementos de Lin. Considere los elementos $\mathsf{T}, \mathsf{S} \in \mathsf{Lin}$, con $\mathsf{T} = \mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_3$ y $\mathsf{S} = \mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3$, $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3, \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_3 \in V$. Entonces definimos el producto $\mathsf{T} \cdot \mathsf{S}$ como

$$\mathsf{T} \cdot \mathsf{S} = (\mathbf{t}_1 \otimes \mathbf{t}_2 \otimes \mathbf{t}_3) \cdot (\mathbf{s}_1 \otimes \mathbf{s}_2 \otimes \mathbf{s}_3) = (\mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{s}_1)(\mathbf{t}_2 \cdot \mathbf{s}_2)(\mathbf{t}_3 \cdot \mathbf{s}_3). \tag{1.203}$$

Luego, es posible mostrar que

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{T}) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}), \tag{1.204}$$
$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{S}\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}, \tag{1.205}$$
$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{T} \otimes \mathbf{v})^T = \mathbf{S}\mathbf{T}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \tag{1.206}$$

Ejercicio 1.6. Demuestre las identidades tensoriales (1.204)–(1.206) se verifican.

Un punto importante a ser observado es que la definición de transpuesta en el caso de tensores de tercer orden no es única. En efecto, la operación transpuesta puede ser definida como sigue

$$\mathbf{S}\mathbf{a}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{S}^T\mathbf{T}, \tag{1.207}$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}. \tag{1.208}$$

Comparando las definiciones vemos que la operación $(\cdot)^T$ definida arriba es equivalente a la operación $(\cdot)^{\frac{1}{T}}$ originalmente definida (también es equivalente a $((\cdot)^T)^T$). Lo importante es que, una vez que haya sido definida la operación, la misma sea usada consistentemente a lo largo de los desarrollos.

Otra operación de tipo transposición que podemos introducir para un tensor de tercer orden arbitrario $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2\otimes\mathbf{s}_3$ es la siguiente

$$\mathbf{S}^{\mathsf{t}} = (\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2\otimes\mathbf{s}_3)^{\mathsf{t}} = \mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_3\otimes\mathbf{s}_2. \tag{1.209}$$

Con esta operación, para qualquier vector $\mathbf{a}\in V$ arbitrario, se verifica que

$$\mathbf{S}^{\mathsf{t}}\mathbf{a} = (\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2\otimes\mathbf{s}_3)^{\mathsf{t}}\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}_2)(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_3). \tag{1.210}$$

y también

$$(\mathbf{S}^{\mathsf{t}})^T = (\mathbf{S}^{\frac{1}{T}})^{\mathsf{t}}. \tag{1.211}$$

Similarmente a lo que ocurre con la aplicación de un tensor de segundo orden sobre otro de la misma naturaleza, podemos imaginar otras operaciones involucrando tensores de tercer orden. Considere $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2\otimes\mathbf{s}_3\in\mathsf{Lin}$ y $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2\in Lin$ arbitrarios. Entonces podemos definir la operación de aplicar $\mathbf{S}$ sobre $\mathbf{T}$ resultando en un elemento de Lin. Esto puede ser introducido de la siguiente forma

$$\mathbf{S}\circ\mathbf{T} = (\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2\otimes\mathbf{s}_3)\circ(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2) = (\mathbf{s}_3\cdot\mathbf{t}_1)(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2\otimes\mathbf{t}_2). \tag{1.212}$$

Claramente se obtiene $\mathbf{S}\circ\mathbf{T}\in\mathsf{Lin}$. De manera análoga, para $\mathbf{S},\mathbf{R}\in\mathsf{Lin}$ arbitrarios, podemos operar como sigue

$$\mathbf{S}\circ\mathbf{R} = (\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2\otimes\mathbf{s}_3)\circ(\mathbf{r}_1\otimes\mathbf{r}_2\otimes\mathbf{r}_3) = (\mathbf{s}_2\cdot\mathbf{r}_1)(\mathbf{s}_3\cdot\mathbf{r}_2)(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{r}_3). \tag{1.213}$$

En este caso resulta $\mathbf{S}\circ\mathbf{R}\in Lin$.

Con estas definiciones vemos, por ejemplo, que

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{T})\circ(\mathbf{S}\otimes\mathbf{v}) = (\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}). \tag{1.214}$$

Esta introducción debe servir al lector para familiarizarse con el manejo del álgebra tensorial, así como también para ilustrar la proposición de definiciones y sus consecuencias, siempre trabajando dentro de un paradigma de notación compacta e independiente del sistema de coordenadas.

Con efecto, es posible extender varias de las operaciones con vectores y tensores de segundo orden para tensores de segundo orden y de tercer orden, respectivamente. Un ejemplo es definir la operación de produto vectorial entre un tensor $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2$ y un vector $\mathbf{a}$, o entre dos tensores $\mathbf{S} = \mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2$ y $\mathbf{T} = \mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2$, por ejemplo

$$\mathbf{S}\times\mathbf{a}=(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2)\times\mathbf{a}=\mathbf{s}_1\otimes(\mathbf{s}_2\times\mathbf{a}), \tag{1.215}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{S}=\mathbf{a}\times(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2)=(\mathbf{a}\times\mathbf{s}_1)\otimes\mathbf{s}_2, \tag{1.216}$$

$$\mathbf{S}\times\mathbf{T}=(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2)\times(\mathbf{t}_1\otimes\mathbf{t}_2)=(\mathbf{s}_1\times\mathbf{t}_1)\times(\mathbf{s}_2\times\mathbf{t}_2). \tag{1.217}$$

Con estas definiciones podemos obtener, por ejemplo, que

$$\mathbf{S}\times\mathbf{a}=-[\mathbf{a}\times\mathbf{S}^T]^T. \tag{1.218}$$

Inclusive, podemos definir operaciones para un tensor de segundo orden de la forma $\mathbf{S}=\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2$ como la siguiente

$$\mathbf{S}_\times=(\mathbf{s}_1\otimes\mathbf{s}_2)_\times=\mathbf{s}_1\times\mathbf{s}_2, \tag{1.219}$$

que es denominada producto de Gibbs, y para la cual, por ejemplo, se verifica que

$$(\mathbf{S}^T)_\times=-\mathbf{S}_\times. \tag{1.220}$$

También, dado el vector axial $\mathbf{a}$ del tensor $\mathbf{A}\in Skw$, y sea otro tensor $\mathbf{B}$ arbitrario, se verifica

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=-\mathbf{a}\cdot\mathbf{B}_\times. \tag{1.221}$$

El tratamiento de tensores de quarto orden es totalmente análogo. No obstante, a medida que aumenta el orden del tensor es obvio que aumentan las definiciones necesarias junto con las operaciones posibles. Tal vez el ejemplo más ilustrativo es la definición de la transpuesta de un tensor de quarto orden ya que es posible definir varios tipos de transpuestas. Por ejemplo, dado el tensor $\mathbb{D}$ de quarto orden

$$\mathbb{D}=\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_4, \tag{1.222}$$

las siguientes operaciones de transposición pueden ser definidas

$$\mathbb{D}^T=(\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_4)^T=\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_4\otimes\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2, \tag{1.223}$$

$$\mathbb{D}^{\mathscr{T}}=(\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_4)^{\mathscr{T}}=\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_4, \tag{1.224}$$

$$\mathbb{D}^{\mathfrak{T}}=(\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_4)^{\mathfrak{T}}=\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_4\otimes\mathbf{d}_3, \tag{1.225}$$

$$\mathbb{D}^{\mathrm{T}}=(\mathbf{d}_1\otimes\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_4)^{\mathrm{T}}=\mathbf{d}_4\otimes\mathbf{d}_2\otimes\mathbf{d}_3\otimes\mathbf{d}_1, \tag{1.226}$$

entre otras.

1.4 Lectura Adicional

Al lector interesado en aumentar sus conocimientos en los temas brevemente expuestos en este capítulo, se recomienda la lectura de los Apéndices al final de este trabajo. En particular en el Apéndice A encontrará conocimientos e informaciones

adicionales que facilitarán la lectura de los siguientes trabajos [23], [47], [83], [94], [92], [93], [105], [130], [133], [167], [259], [292] y [293].

Capítulo 2
Análisis Tensorial

2.1 Diferenciación

En esta sección vamos a introducir una notación de diferenciación lo suficientemente general de manera a incluir funciones f tales que

$$D(f) \subset \mathbb{R}, \mathscr{E}, V, Lin, \mathsf{Lin}, \tag{2.1}$$

$$R(f) \subset \mathbb{R}, \mathscr{E}, V, Lin, \mathsf{Lin}. \tag{2.2}$$

donde $D(f)$ y $R(f)$ representan, respectivamente, el *dominio de definición de* f y su imagen bajo la transformación f también llamado *contradominio de* f.

Sean $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ dos espacios vectoriales normados. Dado el objetivo del presente texto, consideraremos que estos espacios son de dimensión finita. Supongamos $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ definida en una vecindad del origen (elemento nulo) de $\mathscr{X}$. Decimos que $f(u)$ *se aproxima al cero más rapidamente que* u si

$$\lim_{\substack{u\to 0 \\ u\neq 0}} \frac{\|f(u)\|_{\mathscr{Y}}}{\|u\|_{\mathscr{X}}} = 0. \tag{2.3}$$

Lo anterior será representado por

$$f(u) = o(u), \quad u \to 0, \tag{2.4}$$

o simplemente por

$$f(u) = o(u). \tag{2.5}$$

En forma similar $f(u) = g(u) + o(u)$ significará

$$f(u) - g(u) = o(u). \tag{2.6}$$

Observe que esta última definición tiene sentido aún cuando $R(f)$ y $R(g)$ son subconjuntos de $\mathscr{E}$ ya que en este caso $f(u) - g(u) \in V$.

Ejemplo 2.1 *Sea $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in \mathbb{R}$ le hace corresponder $\phi(t) = t^{\alpha}$. Luego, $\phi(t) = o(t)$ si $\alpha > 1$.*

Sea g una función definida en un intervalo abierto $\mathscr{I}$ de $\mathbb{R}$, de valor en $\mathbb{R}$ (g es una función de valor real), o en V (g es una función de valor vectorial), o en *Lin* (g es una función de valor tensorial de segundo orden), o en Lin (g es una función de valor tensorial de tercer orden), o en $\mathscr{E}$ (en este caso decimos que g es de valor *punto*). La *derivada* de g en t, $\dot{g}(t)$, si existe, está definida por

$$\dot{g}(t) = \frac{d}{dt} g(t) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} [g(t+\alpha) - g(t)]. \tag{2.7}$$

Observe que si $R(g) \subset \mathscr{E}$ tenemos que $(g(t+\alpha) - g(t)) \in V$ de donde se sigue que su derivada es un vector. Igualmente, la derivada de una función de valor real es un real, la derivada de una función de valor vectorial será un vector y la de valor tensorial será un tensor.

Decimos que g es *diferenciable* en $t \in \mathscr{I}$ si su derivada existe en t. Luego, de la definición de derivada obtenemos que

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} [g(t+\alpha) - g(t) - \alpha \dot{g}(t)] = 0, \tag{2.8}$$

o de manera equivalente

$$g(t+\alpha) - g(t) - \alpha \dot{g}(t) = o(\alpha), \tag{2.9}$$

de donde

$$g(t+\alpha) - g(t) = \alpha \dot{g}(t) + o(\alpha). \tag{2.10}$$

Claramente $\alpha \dot{g}(t)$ es lineal en α, luego, $g(t+\alpha) - g(t)$ puede ser expresado por la *suma de un término lineal en α y de un término que se aproxima al cero más rapidamente que α*. De esta manera, la definición más útil de derivada radica en este resultado. Por lo tanto, definimos la derivada de g en t como la transformación lineal en $\mathbb{R}$ que aproxima $g(t+\alpha) - g(t)$ para valores pequeños de α.

Así, sean dos espacios vectoriales normados $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ de dimensión finita, $\mathscr{A}$ un abierto de $\mathscr{X}$ y sea $g : \mathscr{A} \to \mathscr{Y}$. Decimos que g es *diferenciable* en $x \in \mathscr{A}$ si existe la *transformación lineal*

$$\begin{aligned} \mathscr{D}g(x) : \mathscr{X} &\to \mathscr{Y}, \\ u &\mapsto \mathscr{D}g(x)[u]. \end{aligned} \tag{2.11}$$

tal que

$$g(x+u) = g(x) + \mathscr{D}g(x)[u] + o(u), \quad u \to 0. \tag{2.12}$$

La transformación lineal $\mathscr{D}g(x)$ es llamada *derivada de g en x*. Dado que en un espacio normado de dimensión finita todas las normas son equivalentes, $\mathscr{D}g(x)$ es independiente de las normas adoptadas para $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$. A su vez, si $\mathscr{D}g(x)$ existe, ella es única. En efecto, para cada $u \in \mathscr{X}$ resulta

$$\mathscr{D}g(x)[u] = \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\alpha}[g(x+\alpha u)-g(x)] = \frac{d}{d\alpha}g(x+\alpha u)\bigg|_{\alpha=0}. \tag{2.13}$$

Si g es diferenciable en todo $x\in\mathscr{A}$, $\mathscr{D}g$ representa la transformación que a cada $x\in\mathscr{A}$ le hace corresponder $\mathscr{D}g(x)\in Lin(\mathscr{X},\mathscr{Y})$, donde $Lin(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ es el espacio cuyos elementos son las transformaciones lineales de $\mathscr{X}$ en $\mathscr{Y}$. Este espacio también es de dimensión finita, de hecho, $\dim(Lin(\mathscr{X},\mathscr{Y})) = (\dim\mathscr{X})(\dim\mathscr{Y})$, por lo que podemos introducir una norma. Esto último nos permite hablar de continuidad y diferenciabilidad de $\mathscr{D}g$. En particular, diremos que g es regular o de clase C^1 en $\mathscr{A}$ si g es diferenciable en todo punto $x\in\mathscr{A}$ y si $\mathscr{D}g$ es continuo. Diremos que g es de clase C^2 en $\mathscr{A}$ si g es de clase C^1 y $\mathscr{D}g$ también es regular, y así sucesivamente.

Veamos a continuación algunos ejemplos que nos serán útiles.

- Sea

$$\begin{aligned} g &: V\to\mathbb{R},\\ &\mathbf{v}\mapsto g(\mathbf{v}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

  Luego

$$g(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = (\mathbf{v}+\mathbf{u})\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{u}) = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = g(\mathbf{v})+2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+o(\mathbf{u}). \tag{2.15}$$

  De donde

$$\mathscr{D}g(\mathbf{v})[\mathbf{u}] = 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}. \tag{2.16}$$

- Sea

$$\begin{aligned} g &: Lin\to Lin,\\ &\mathbf{A}\mapsto g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

  Luego

$$g(\mathbf{A}+\mathbf{U}) = (\mathbf{A}+\mathbf{U})^2 = \mathbf{A}^2+(\mathbf{A}\mathbf{U}+\mathbf{U}\mathbf{A})+o(\mathbf{U}). \tag{2.18}$$

  De donde

$$\mathscr{D}g(\mathbf{A})[\mathbf{U}] = \mathbf{A}\mathbf{U}+\mathbf{U}\mathbf{A}. \tag{2.19}$$

- Sea

$$\begin{aligned} g &: \mathscr{X}\to\mathscr{Y} \text{ lineal},\\ &x\mapsto g(x). \end{aligned} \tag{2.20}$$

  Luego

$$g(x+u) = g(x)+g(u). \tag{2.21}$$

  De donde

$$\mathscr{D}g(x)[u] = g(u). \tag{2.22}$$

Frecuentemente será necesario calcular la derivada del *producto* $\pi(f,g)$ de dos funciones f y g. En particular, ya vimos diferentes *productos*. Por ejemplo

- El producto de un número real α por un vector $\mathbf{v} \in V$. Para este caso tenemos $\pi(\alpha, \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{v}$.
- El producto interno (escalar) de dos vectores de V. En este caso $\pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$.
- El producto interno (escalar) de tensores, luego $\pi(\mathbf{A}, \mathbf{T}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}$.
- El producto tensorial de vectores, luego $\pi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$.
- La acción de un tensor de segundo orden $\mathbf{T}$ sobre un vector $\mathbf{v}$. En este caso es $\pi(\mathbf{T}, \mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{v}$.

Todas las operaciones anteriores tienen una propiedad común que es la de ser lineal con respecto a cada uno de los argumentos. En este caso se dice que es *bilineal*. De esta manera y con el objetivo de establecer reglas generales consideremos la siguiente operación general de producto

$$\begin{aligned} \pi : \mathscr{F} \times \mathscr{G} \to \mathscr{Y} \quad & \text{bilineal}, \\ (f, g) \mapsto \pi(f, g), & \end{aligned} \tag{2.23}$$

y donde $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ e $\mathscr{Y}$ son espacios vectoriales normados de dimensión finita. Sean ahora las funciones

$$f : \mathscr{A} \subset \mathscr{X} \to \mathscr{F}, \quad g : \mathscr{A} \subset \mathscr{X} \to \mathscr{G}, \tag{2.24}$$

siendo $\mathscr{X}$ un espacio vectorial normado de dimensión finita y $\mathscr{A}$ un subconjunto abierto de $\mathscr{X}$. Con estos elementos, el producto $h = \pi(f, g)$ es la función

$$\begin{aligned} h : \mathscr{A} \to \mathscr{Y}, & \\ x \mapsto h(x) = \pi(f(x), g(x)). & \end{aligned} \tag{2.25}$$

Tenemos así la siguiente regla de derivación.

Regla del Producto. Sean f y g diferenciables en $x \in \mathscr{A}$. luego su producto $h = \pi(f, g)$ también es diferenciable en x, y es tal que

$$\mathscr{D}h(x)[u] = \pi(\mathscr{D}f(x)[u], g(x)) + \pi(f(x), \mathscr{D}g(x)[u]). \tag{2.26}$$

En particular, cuando $\mathscr{A}$ es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$, la regla del producto y la bilinealidad de π conducen a

$$\dot{h}(t) = \pi(\dot{f}(t), g(t)) + \pi(f(t), \dot{g}(t)). \tag{2.27}$$

Usando este resultado arribamos a la siguiente proposición. Sean $\phi, \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$ funciones regulares en un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$ tales que ϕ toma valores en $\mathbb{R}$, $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ toman valores en V y $\mathbf{S}, \mathbf{T}$ toman valores en *Lin*. Luego, se demuestra fácilmente que

$$\dot{\overline{(\phi \mathbf{w})}} = \dot{\phi}\mathbf{v} + \phi\dot{\mathbf{v}}, \tag{2.28}$$

$$\dot{\overline{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{w})}} = \dot{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{w} + \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{w}}, \tag{2.29}$$

$$\dot{\overline{(\mathbf{TS})}} = \dot{\mathbf{T}}\mathbf{S} + \mathbf{T}\dot{\mathbf{S}}, \tag{2.30}$$

$$\dot{\overline{(\mathbf{T}\cdot\mathbf{S})}} = \dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{S} + \mathbf{T}\cdot\dot{\mathbf{S}}, \tag{2.31}$$

$$\dot{\overline{(\mathbf{Tv})}} = \dot{\mathbf{T}}\mathbf{v} + \mathbf{T}\dot{\mathbf{v}}. \tag{2.32}$$

Ejercicio 2.1. Demuestre que las expresiones (2.28)–(2.32) se verifican.

Otro resultado que usaremos frecuentemente es la regla de la cadena. Sean $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ y $\mathscr{F}$ espacios vectoriales normados de dimensión finita (aquí incluimos el espacio euclidiano puntual $\mathscr{E}$). $\mathscr{A}$ y $\mathscr{C}$ representan subconjuntos abiertos de $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ respectivamente. Sea f y g funciones tales que

$$g : \mathscr{A} \to \mathscr{Y}, \quad f : \mathscr{C} \to \mathscr{F}, \tag{2.33}$$

y donde $R(g) \subset \mathscr{C}$. Tenemos así la siguiente regla para la diferenciación de composición de funciones.
Regla de la Cadena. Sea g y f respectivamente diferenciables en $x \in \mathscr{A}$ y en $y = g(x)$. Luego, la composición

$$h = f \circ g : \mathscr{A} \to \mathscr{F}, \tag{2.34}$$

definida por

$$h(x) = f(g(x)), \tag{2.35}$$

es diferenciable en x y su derivada está dada por

$$\mathscr{D}h(x) = \mathscr{D}f(y) \circ \mathscr{D}g(x), \tag{2.36}$$

y su diferencial en x según la dirección $u \in \mathscr{X}$

$$\mathscr{D}h(x)[u] = \mathscr{D}f(g(x))[\mathscr{D}g(x)[u]]. \tag{2.37}$$

En el caso particular de que $\mathscr{X} \equiv \mathbb{R}$, g y por lo tanto h son funciones de variable real. Escribiendo t en lugar de x en la expresión anterior, obtenemos

$$\mathscr{D}h(t)[\alpha] = \mathscr{D}f(g(t))[\mathscr{D}g(t)[\alpha]], \tag{2.38}$$

que nos conduce a

$$\frac{d}{dt}h(t) = \frac{d}{dt}f(g(t)) = \mathscr{D}f(g(t))\left[\frac{d}{dt}g(t)\right]. \tag{2.39}$$

Haciendo uso de este resultado, podemos comprobar, por ejemplo, lo siguiente

$$\overline{(\dot{\mathbf{S}}^T)} = (\dot{\mathbf{S}})^T. \tag{2.40}$$

Ejercicio 2.2. Demuestre la (2.40).

2.2 Gradiente

En esta sección vamos a particularizar la definición (2.11) para funciones definidas en la región abierta Ω del espacio euclidiano puntual $\mathscr{E}$ donde se ha adoptado un origen O permitiendo así establecer una correspondencia biunívoca entre puntos $X \in \mathscr{E}$ y su correspondiente vector $\mathbf{x} = X - O \in V$. La función ϕ en Ω es llamada *campo real, vectorial, tensorial (de cualquier orden) o puntual* si sus valores en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ son, respectivamente, números reales, vectores, tensores (de cualquier orden) o puntos de $\mathscr{E}$ (o equivalentemente vectores de V). Para estos campos ϕ (que suponemos diferenciables) vimos que $\mathscr{D}\phi(x) \in Lin(\mathscr{V}, \mathscr{Y})$, donde $\mathscr{V}$ es el espacio normado asociado a V y donde el espacio normado $\mathscr{Y}$ corresponderá a los respectivos espacios normados asociados con $\mathbb{R}, V, Lin, \mathsf{Lin}$, etc.

Esta aplicación $\mathscr{D}\phi(\mathbf{x})$ será llamada *gradiente* (y representada por $\nabla\phi(\mathbf{x})$ o simplemente por $\nabla\phi$) del campo ϕ y, como vimos en (2.12), tiene la propiedad de aproximar el campo en un punto $\mathbf{x}+\mathbf{u} \in \Omega$ con un error del orden $o(\mathbf{u})$

$$\phi(\mathbf{x}+\mathbf{u}) = \phi(\mathbf{x}) + \nabla\phi(\mathbf{x})[\mathbf{u}] + o(\mathbf{u}). \tag{2.41}$$

Si en V adoptamos un sistema ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$ la expresión anterior es equivalente a

$$\nabla\phi(\mathbf{x})[\mathbf{e}_k] = \lim_{\alpha\to 0} \frac{1}{\alpha}[\phi(\mathbf{x}+\alpha\mathbf{e}_k) - \phi(\mathbf{x})]. \tag{2.42}$$

Como podemos ver, el límite es simplemente la derivada parcial de ϕ con respecto a x_k calculada en el punto $\mathbf{x}$, es decir

$$\nabla\phi(\mathbf{x})[\mathbf{e}_k] = \frac{\partial\phi(\mathbf{x})}{\partial x_k}. \tag{2.43}$$

Observamos que, para un campo que se encuentra en un espacio de dimensión $\dim\mathscr{Y}$, el gradiente está en un espacio de dimensión $(\dim\mathscr{Y})(\dim V)$. El resultado (2.43) nos permite fácilmente definir la representación del gradiente de campos escalares, vectoriales, tensoriales de segundo orden, de tercer orden, etc., tanto en su forma compacta como indicial en componentes (base cartesiana). Tenemos así

- Sea ϕ un campo escalar φ luego

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\mathbf{e}_k. \tag{2.44}$$

- Sea ϕ un campo vetorial $\mathbf{u}$ luego

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial u_j}{\partial x_k} (\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k). \tag{2.45}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de segundo orden $\mathbf{S}$ luego

$$\nabla \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k). \tag{2.46}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de tercer orden $\mathbf{S}$ luego

$$\nabla \mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ijr}}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_k). \tag{2.47}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de cuarto orden $\mathbb{S}$ luego

$$\nabla \mathbb{S} = \frac{\partial \mathbb{S}}{\partial x_k} \otimes \mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ijmn}}{\partial x_k} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_m \otimes \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_k). \tag{2.48}$$

De forma intrínseca, el gradiente de un campo vectorial $\mathbf{u}$ se define como el tensor de segundo orden $\nabla \mathbf{u}$ que satisface

$$(\nabla \mathbf{u})^T \mathbf{a} = \nabla (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}), \tag{2.49}$$

para $\mathbf{a} \in V$ arbitrario, constante.

Análogamente, el gradiente de un campo tensorial $\mathbf{S}$ se define como el tensor de tercer orden $\nabla \mathbf{S}$ que satisface

$$(\nabla \mathbf{S})^T \mathbf{a} = \nabla (\mathbf{S}^T \mathbf{a}), \tag{2.50}$$

para $\mathbf{a} \in V$ arbitrario, constante.

De forma alternativa, podemos definir el gradiente de un campo tensorial $\mathbf{S}$ como el tensor de tercer orden $\nabla \mathbf{S}$ tal que, para $\mathbf{a} \in V$ arbitrario y constante se verifica

$$(\nabla \mathbf{S})^{\mathsf{t}} \mathbf{a} = \nabla (\mathbf{S}\mathbf{a}), \tag{2.51}$$

Considere un vector de la forma $\phi \mathbf{u}$, con $\mathbf{u} \in V$ arbitrario y constante. Luego se verifica

$$\nabla (\phi \mathbf{u}) = \mathbf{u} \otimes \nabla \alpha. \tag{2.52}$$

De hecho, considerando $\mathbf{a} \in V$ arbitrario y constante, de (2.49) observe que

$$[(\nabla \phi) \otimes \mathbf{u}]\mathbf{a} = (\nabla \phi)\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = \nabla (\phi \mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) = [\nabla (\phi \mathbf{u})]^T \mathbf{a}. \tag{2.53}$$

Luego, la (2.52) es válida.

Supongamos ahora que el tensor de segundo orden es de la forma $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$. Luego, el siguiente resultado se verifica

$$\nabla (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \otimes \nabla \mathbf{v}) + ((\nabla \mathbf{u})^T \otimes \mathbf{v})^T. \tag{2.54}$$

De hecho, de la definición (2.50), observe que

$$[\nabla(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})]^T\mathbf{a} = \nabla((\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{a}) = \nabla((\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\mathbf{v}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{u})\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\otimes\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{a} + \mathbf{v}\otimes((\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{a}) = [(\nabla\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) + (\mathbf{v}\otimes(\nabla\mathbf{u})^T)]\mathbf{a}. \quad (2.55)$$

Luego, usando la (1.186), esto implica que

$$\nabla(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = ((\nabla(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}))^T)^{\frac{1}{T}} = (\nabla\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})^{\frac{1}{T}} + (\mathbf{v}\otimes(\nabla\mathbf{u})^T)^{\frac{1}{T}} = (\mathbf{u}\otimes\nabla\mathbf{v}) + ((\nabla\mathbf{u})^T\otimes\mathbf{v})^T, \quad (2.56)$$

y la (2.54) queda demostrada.

En consecuencia, podemos definir el segundo gradiente de un campo vectorial $\mathbf{u}$ como el tensor de tercer orden $\nabla\nabla\mathbf{u}$ que satisface

$$(\nabla\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{a} = \nabla((\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{a}) = \nabla(\nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})), \quad (2.57)$$

para $\mathbf{a}\in V$ arbitrario, constante. De forma totalmente equivalente, $\nabla\nabla\mathbf{u}$ puede ser definido como sigue

$$(\nabla\nabla\mathbf{u})\mathbf{a} = \nabla((\nabla\mathbf{u})\mathbf{a}). \quad (2.58)$$

Otros resultados pueden ser obtenidos. Con efecto, para φ, $\mathbf{u}$ ($\mathbf{v}$), $\mathbf{S}$ ($\mathbf{T}$) y S campos de valor real, vectorial, tensorial (orden 2) y tensorial (orden 3), respectivamente, se verifica

$$\nabla(\mathbf{S}^T\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{S})^T\mathbf{u} + \mathbf{S}^T\nabla\mathbf{u}, \quad (2.59)$$

$$\nabla(\mathbf{S}\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{S})^{\mathsf{t}}\mathbf{u} + \mathbf{S}\nabla\mathbf{u}, \quad (2.60)$$

$$\nabla(\varphi\mathbf{u}) = \varphi\nabla\mathbf{u} + \mathbf{u}\otimes\nabla\varphi, \quad (2.61)$$

$$\nabla(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}) = (\nabla\mathbf{v})^T\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T\mathbf{v}, \quad (2.62)$$

$$\nabla(\varphi\mathbf{S}) = \varphi(\nabla\mathbf{S}) + \mathbf{S}\otimes\nabla\varphi, \quad (2.63)$$

$$\nabla(\mathbf{S}\cdot\mathbf{T}) = (\nabla\mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{T} + (\nabla\mathbf{T})^{\frac{1}{T}}\mathbf{S}, \quad (2.64)$$

$$(\nabla(\nabla\mathbf{u}))^{\frac{1}{T}} = ((\nabla\nabla\mathbf{u})^T)^{\mathsf{t}}, \quad (2.65)$$

$$(\nabla(\nabla\mathbf{u}))^{\frac{1}{T}} = \nabla((\nabla\mathbf{u})^T). \quad (2.66)$$

Ejercicio 2.3. Demuestre que (2.59)-(2.66) son válidas.

2.3 Divergencia

Haciendo uso de la definición de gradiente de campos vectoriales y tensoriales de cualquier orden, podemos definir un nuevo operador lineal que llamaremos *diver-*

gencia de ϕ, $\operatorname{div}\phi$. Este operador lo podemos representar por una operación (lineal) de contracción entre el $\nabla\phi$ y el tensor identidad de segundo orden $\mathbf{I}$ que lleva el $\nabla\phi$, el cual se encuentra en un espacio de dimensión $(\dim\mathscr{Y})(\dim V)$ a un espacio de dimensión $\dim\mathscr{Y}$. Podemos así interpretar la operación divergencia como la operación *opuesta* a la del gradiente en el sentido colocado anteriormente. Tenemos así

$$\operatorname{div}\phi \stackrel{def}{=} c(\nabla\phi,\mathbf{I}), \tag{2.67}$$

con lo que

- Sea ϕ un campo vectorial $\mathbf{u}$, luego

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{I}, \tag{2.68}$$

que en coordenadas cartesianas resulta

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x_k}\cdot\mathbf{e}_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \tag{2.69}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de segundo orden $\mathbf{S}$, luego

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = (\nabla\mathbf{S})\mathbf{I}, \tag{2.70}$$

que en coordenadas cartesianas resulta

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial x_k}\mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{jk}}{\partial x_k}\mathbf{e}_j. \tag{2.71}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de tercer orden $\boldsymbol{\mathsf{S}}$, luego

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\mathsf{S}} = (\nabla\boldsymbol{\mathsf{S}})\mathbf{I}, \tag{2.72}$$

que en coordenadas cartesianas resulta

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\mathsf{S}} = \frac{\partial\boldsymbol{\mathsf{S}}}{\partial x_k}\mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ijk}}{\partial x_k}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j). \tag{2.73}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de quarto orden $\mathbb{S}$, luego

$$\operatorname{div}\mathbb{S} = (\nabla\mathbb{S})\mathbf{I}, \tag{2.74}$$

que en coordenadas cartesianas resulta

$$\operatorname{div}\mathbb{S} = \frac{\partial\mathbb{S}}{\partial x_k}\mathbf{e}_k = \frac{\partial S_{ijrk}}{\partial x_k}(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}_r), \tag{2.75}$$

- etc.

De forma alternativa, podemos definir la divergencia de un campo tensorial regular de segundo orden $\mathbf{S}$, como el campo vectorial (único) $\operatorname{div}\mathbf{S}$ con la propiedad

$$(\operatorname{div}\mathbf{S})\cdot\mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{a}), \tag{2.76}$$

con $\mathbf{a}\in V$ arbitrario y constante.

Analogamente, para un tensor $\mathbf{S}$ de tercer orden podemos definir

$$(\operatorname{div}\mathbf{S})\cdot\mathbf{A} = \operatorname{div}(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{A}), \tag{2.77}$$

con $\mathbf{A}\in Lin$ arbitrario y constante.

A partir de las definiciones anteriores es posible mostrar que

$$\operatorname{div}(\mathbf{ST}) = (\nabla\mathbf{S})\mathbf{T} + \mathbf{S}\operatorname{div}\mathbf{T}. \tag{2.78}$$

Con efecto, usando las definiciones (2.68) y (2.76) tenemos

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{ST})\cdot\mathbf{a} = \operatorname{div}((\mathbf{ST})^T\mathbf{a}) = \operatorname{div}(\mathbf{T}^T\mathbf{S}^T\mathbf{a}) = \mathbf{I}\cdot[\mathbf{T}^T\nabla(\mathbf{S}^T\mathbf{a})] + \mathbf{S}^T\mathbf{a}\cdot\operatorname{div}\mathbf{T} = \\ \mathbf{T}\cdot\nabla(\mathbf{S}^T\mathbf{a}) + \mathbf{a}\cdot\mathbf{S}\operatorname{div}\mathbf{T} = (\nabla\mathbf{S})\mathbf{T}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{S}\operatorname{div}\mathbf{T} = \\ [(\nabla\mathbf{S})\mathbf{T} + \mathbf{S}\operatorname{div}\mathbf{T}]\cdot\mathbf{a},\end{aligned} \tag{2.79}$$

y demostramos la (2.78).

Considere ahora $\mathbf{T} = \mathbf{I}$ el tensor identidad, luego resulta inmediatamente que

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = (\nabla\mathbf{S})\mathbf{I}, \tag{2.80}$$

que establece la conexión con la definición (2.70) anterior.

Sea ahora $\mathbf{S} = \mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$, entonces con el uso directo de los resultados anteriores obtenemos que

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v}. \tag{2.81}$$

De hecho, de la definición (2.70) y usando la (2.54) se tiene

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}) = (\nabla(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}))\mathbf{I} = (\mathbf{u}\otimes\nabla\mathbf{v})\mathbf{I} + ((\nabla\mathbf{u})^T\otimes\mathbf{v})^T\mathbf{I} = \\ \mathbf{u}(\nabla\mathbf{v}\cdot\mathbf{I}) + (\nabla\mathbf{u}\,\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{u}\operatorname{div}\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{v},\end{aligned} \tag{2.82}$$

y la (2.81) sigue.

Otros resultados pueden ser obtenidos. Con efecto, para φ, $\mathbf{u}$, $\mathbf{S}$ ($\mathbf{T}$) y $\mathbf{S}$ campos de valor real, vectorial, tensorial (orden 2) y tensorial (orden 3), respectivamente, se verifica

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{T}) = \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\operatorname{div}\mathbf{S}, \tag{2.83}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{u}) = \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{u} + \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{u}, \tag{2.84}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{u}) = (\operatorname{div}\mathbf{S})^T\mathbf{u} + \mathbf{S}^T(\nabla\mathbf{u})^T, \tag{2.85}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{u}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{u} + \nabla\varphi\cdot\mathbf{u}, \tag{2.86}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{S}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{S} + \mathbf{S}\nabla\varphi, \tag{2.87}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{S}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{S} + \mathbf{S}\nabla\varphi, \tag{2.88}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}\otimes\mathbf{u}) = (\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{S} + (\nabla\mathbf{S})\mathbf{u}, \tag{2.89}$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{S}) = \mathbf{u}\otimes\operatorname{div}\mathbf{S} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{S}^T. \tag{2.90}$$

Ejercicio 2.4. Demuestre que los resultados (2.83)–(2.90) se verifican.

Un buen ejemplo de la ventaja en trabajar en forma intrínseca con tensores de tercer orden es porporcionado por la siguiente identidad para un campo $\mathbf{u}$ de valor vectorial

$$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\nabla\mathbf{u})^T. \tag{2.91}$$

Por un lado, siendo $\mathbf{A}\in Lin$ un tensor constante, sabemos que de la (2.64) se verifica

$$\nabla(\mathbf{S}\cdot\mathbf{A}) = (\nabla\mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{A}. \tag{2.92}$$

Luego, poniendo el tensor $\nabla\mathbf{u}$ en la definición (2.70), y considerando la (2.66), tenemos

$$\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}) = \nabla(\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{I}) = (\nabla(\nabla\mathbf{u}))^{\frac{1}{T}}\mathbf{I} = (\nabla(\nabla\mathbf{u})^T)\mathbf{I} = \operatorname{div}(\nabla\mathbf{u})^T. \tag{2.93}$$

2.4 Rotacional

También podemos definir de forma intrínseca la operación de rotacional. Dada la menor aplicabilidad de estas operaciones en la presente monografía, nos limitaremos a definir la operación de *rotacional* para vectores y para tensores de segundo orden.

Sea un campo vectorial $\mathbf{u}$, definimos el rotacional de $\mathbf{u}$, el cual es un campo vectorial denotado por $\operatorname{curl}\mathbf{u}$, a través de la operación divergencia como sigue

$$(\operatorname{curl}\mathbf{u})\cdot\mathbf{a} = \operatorname{div}(\mathbf{u}\times\mathbf{a}), \tag{2.94}$$

donde $\mathbf{a}\in V$ es un vector arbitrario y constante.

Por su parte, el rotacional de un campo tensorial de segundo orden $\mathbf{S}$, que resulta un tensor denotado por $\operatorname{curl}\mathbf{S}$, es definido como sigue

$$(\operatorname{curl}\mathbf{S})\mathbf{a} = \operatorname{curl}(\mathbf{S}\mathbf{a}), \tag{2.95}$$

donde $\mathbf{a}\in V$ es un vector arbitrario y constante.

En coordenadas cartesianas, las definiciones anteriores conducen a las clásicas definiciones. Es decir

- Para el campo vectorial $\mathbf{u}$ resulta

$$\operatorname{curl}\mathbf{u} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\mathbf{e}_i. \tag{2.96}$$

- Para el campo tensorial de segundo orden $\mathbf{S}$ resulta

$$\operatorname{curl}\mathbf{S} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial S_{kl}}{\partial x_j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_l). \tag{2.97}$$

De esto se desprende que si tenemos un tensor de segundo orden de la forma $\mathbf{S} = \mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$, entonces el rotacional de $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$ resulta

$$\operatorname{curl}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\operatorname{curl}\mathbf{u}) \otimes \mathbf{v} + [(\nabla \mathbf{v}) \times \mathbf{u}]^T. \tag{2.98}$$

Ejercicio 2.5. Demuestre que la expresión (2.98) es válida.

2.5 Laplaciano

En las secciones anteriores hemos definido las operaciones *gradiente* y *divergencia* de un campo ϕ. Si ahora admitimos que el campo es de clase C^2 podemos definir mas una nueva operación, que llamaremos *laplaciano* y que será representada por $\triangle\phi$, de la siguiente forma

$$\triangle\phi \overset{def}{=} \operatorname{div}\nabla\phi = c(\nabla(\nabla\phi), \mathbf{I}). \tag{2.99}$$

Recordando las definiciones del gradiente y de la divergencia podemos ver que el laplaciano al actuar sobre el campo ϕ produce un nuevo campo (generalmente menos regular que ϕ) de la misma naturaleza que ϕ. Tenemos así, de forma intrínseca y en el caso particular de un sistema de coordenadas cartesiano, las siguientes definiciones

- Sea ϕ un campo escalar φ, luego

$$\triangle\varphi = \nabla(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{I} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k \partial x_k}. \tag{2.100}$$

- Sea ϕ un campo vectorial $\mathbf{u}$, luego

$$\triangle\mathbf{u} = \nabla(\nabla\mathbf{u})\mathbf{I} = \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}\mathbf{e}_i. \tag{2.101}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de segundo orden $\mathbf{S}$, luego

$$\triangle \mathbf{S} = \nabla(\nabla \mathbf{S})\mathbf{I} = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j). \tag{2.102}$$

- Sea ϕ un campo tensorial de tercer orden $\mathbf{S}$, luego

$$\triangle \mathbf{S} = \nabla(\nabla \mathbf{S})\mathbf{I} = \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial x_m \partial x_m} = \frac{\partial^2 S_{ijk}}{\partial x_m \partial x_m}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k), \tag{2.103}$$

- etc.

De la inspección de las expresiones anteriores, vemos que el laplaciano de un campo ϕ es un otro campo del mismo tipo donde sus componentes están dadas por el laplaciano de la correspondiente componente de ϕ.

Sólo para detallar, vamos a mostrar el cálculo de las componentes del laplaciano del campo tensorial de segundo orden $\mathbf{S}$ mostrado en (2.102). Las componentes del tensor $\triangle \mathbf{S}$ son las siguientes

$$\begin{aligned}(\triangle \mathbf{S})_{ij} = ([\nabla(\nabla \mathbf{S})]\mathbf{I})_{ij} = \left[\frac{\partial}{\partial x_l}\left[\frac{\partial}{\partial x_k} S_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \otimes \mathbf{e}_k\right] \otimes \mathbf{e}_l\right] \delta_{rs}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) = \\ \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l)\delta_{rs}(\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_s) = \\ \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_l}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)\delta_{kl} = \frac{\partial^2 S_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j).\end{aligned} \tag{2.104}$$

Antes de finalizar esta sección observe que con los resultados obtenidos hasta aquí resulta directo mostrar que, para $\mathbf{u}$ un campo de valor vectorial, se verifica

$$\operatorname{div}[\nabla \mathbf{u} \pm (\nabla \mathbf{u})^T] = \Delta \mathbf{u} \pm \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}). \tag{2.105}$$

2.6 Teoremas Integrales

En esta sección vamos a presentar algunos resultados involucrando integrales, los cuales que serán útiles más adelante.

Recordemos el *Teorema de la Divergencia*. Sea Ω una región limitada regular (aproximadamente, una región regular es una región abierta Ω de frontera $\partial\Omega$ regular por partes, es decir, la normal saliente a la frontera está definida en casi toda parte de $\partial\Omega$ excepto en un número finito de puntos de $\partial\Omega$ y/o en un número finito de curvas de $\partial\Omega$). A su vez, consideremos los campos regulares $\phi : \Omega \to \mathbb{R}$ y $\mathbf{u} : \Omega \to V$. Luego

$$\int_{\partial\Omega} \phi \mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\Omega} \nabla\phi\, d\Omega, \tag{2.106}$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{u}\, d\Omega, \tag{2.107}$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal saliente a $\partial\Omega$.

Veamos que resultados análogos se verifican cuando consideramos campos tensoriales regulares. En particular, para los campos $\mathbf{S} : \Omega \to Lin$ y $\mathsf{S} : \Omega \to \mathsf{Lin}$ se verifica que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{S}\, d\Omega, \tag{2.108}$$

$$\int_{\partial\Omega} \mathsf{S}\mathbf{n}\, \partial\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}\mathsf{S}\, \Omega. \tag{2.109}$$

De hecho, considere la definición (2.76) para un campo $\mathbf{a} \in V$ arbitrario y constante, luego

$$\left[\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{S}\, d\Omega\right] \cdot \mathbf{a} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{S}^T\mathbf{a})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}^T\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \left[\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n}\, d\partial\Omega\right] \cdot \mathbf{a}, \tag{2.110}$$

con lo que llegamos a la (2.108).

Analogamente, a partir de la definición (2.77), y dado un tensor $\mathbf{A} \in Lin$ arbitrario y constante, tenemos que

$$\left[\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{S}\, d\Omega\right] \cdot \mathbf{A} = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{A})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}^{\frac{1}{T}}\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \left[\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n}\, d\partial\Omega\right] \cdot \mathbf{A}, \tag{2.111}$$

con lo que comprobamos la validad de la (2.109).

A partir del resultado (2.84), y teniendo en cuenta la (2.107), es fácil ver que

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}\, d\partial\Omega = \int_{\Omega} (\mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v} + \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v})\, d\Omega. \tag{2.112}$$

Esta expresión será utilizada repetidamente a lo largo de este trabajo.

Como ejemplo de aplicación de estos resultados y del uso de tensores de tercer orden, veamos que se verifica la siguiente identidad

$$\int_{\Omega} [\mathbf{u}\otimes\operatorname{div}\mathbf{S} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{S}^T]\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\otimes(\mathbf{S}\mathbf{n})\, d\partial\Omega. \tag{2.113}$$

Con efecto, poniendo $\mathbf{S} = \mathbf{u}\otimes\mathbf{S}$, de la (2.90) tenemos que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{S}\, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{S})\, d\Omega = \int_{\Omega} [\mathbf{u}\otimes\operatorname{div}\mathbf{S} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{S}^T]\, d\Omega, \tag{2.114}$$

y por otro lado, de la (1.195) tenemos lo siguiente

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\otimes\mathbf{S})\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\otimes(\mathbf{S}\mathbf{n})\, d\partial\Omega. \tag{2.115}$$

Luego, usando la (2.109) se verifica la identidad (2.113).

De la misma forma, la siguiente expresión es válida

$$\int_{\Omega} [(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{S} + (\nabla\mathbf{S})\mathbf{u}]\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{S}\, d\partial\Omega. \tag{2.116}$$

De hecho, considere $\mathbf{S} = \mathbf{S}\otimes\mathbf{u}$, a partir de la (2.89) se tiene

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{S}\, d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{S}\otimes\mathbf{u})\, d\Omega = \int_{\Omega} [(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{S} + (\nabla\mathbf{S})\mathbf{u}]\, d\Omega, \tag{2.117}$$

y por otro lado de la (1.198) es

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{S}\otimes\mathbf{u})\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{n})\mathbf{S}\, d\partial\Omega, \tag{2.118}$$

a partir de lo cual se verifica la identidad (2.116).

Veamos ahora la validad de la siguiente expresión

$$\int_{\Omega} \nabla\mathbf{S}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{S}\otimes\mathbf{n}\, d\partial\Omega. \tag{2.119}$$

Para esto tomemos la (2.106) con $\varphi = \mathbf{u}\cdot\mathbf{a}$, con $\mathbf{a}$ arbitrario y constante. Entonces podemos escribir

$$\left[\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{u})^T\, d\Omega\right]\mathbf{a} = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \left[\int_{\partial\Omega} (\mathbf{n}\otimes\mathbf{u})\, d\partial\Omega\right]\mathbf{a}, \tag{2.120}$$

de lo que concluimos lo siguiente

$$\int_{\Omega} \nabla\mathbf{u}\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}\otimes\mathbf{n}\, d\partial\Omega. \tag{2.121}$$

Luego, de la definición (2.50), y usando (2.121) y (1.199), obtenemos lo siguiente

$$\left[\int_{\Omega} (\nabla\mathbf{S})^T\, d\Omega\right]\mathbf{a} = \int_{\Omega} \nabla(\mathbf{S}^T\mathbf{a})\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{S}^T\mathbf{a})\otimes\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{S}\otimes\mathbf{n})^T\mathbf{a}\, d\partial\Omega = \left[\int_{\partial\Omega} (\mathbf{S}\otimes\mathbf{n})^T\, d\partial\Omega\right]\mathbf{a}. \tag{2.122}$$

de donde comprobamos (2.119).

Como último ejemplo, veamos que la siguiente identidad es válida

$$\int_\Omega [(\triangle \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\triangle \mathbf{u})]\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} [((\nabla \mathbf{S})\mathbf{n})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\nabla \mathbf{u})\mathbf{n}]\, d\partial\Omega. \tag{2.123}$$

Recordemos primero que para campos escalares φ, ϕ suficientemente regulares se demuestra lo siguiente

$$\int_\Omega (\varphi \triangle \phi - \phi \triangle \varphi)\, d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\varphi \nabla \phi - \phi \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n}\, d\partial\Omega. \tag{2.124}$$

Supongamos ahora que tenemos un campo $\mathbf{u} \in V$ y un campo $\mathbf{S} \in Lin$. De la (2.78), y poniendo $\mathbf{T} = \nabla \mathbf{u}$, tenemos

$$\operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{S} \operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}), \tag{2.125}$$

y por lo tanto, recordando que $\operatorname{div}(\nabla \mathbf{u}) = \triangle \mathbf{u}$, resulta

$$\mathbf{S}(\triangle \mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}), \tag{2.126}$$

Sea ahora $\mathbf{a} \in V$ arbitrario y constante. Considerando la definición de la divergencia de un tensor de segundo orden (2.76) para el tensor $(\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u}$ y utilizando (1.202), (2.59) y (2.54), se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}\Big[\operatorname{div}\big[((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u})^T\big]\Big] \cdot \mathbf{a} = \operatorname{div}\big[((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u})\mathbf{a}\big] = \operatorname{div}\big[(\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{u})\big] = \\ (\nabla \mathbf{S}) \cdot \nabla(\mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \operatorname{div}(\nabla \mathbf{S}) = (\nabla \mathbf{S}) \cdot (\mathbf{a} \otimes \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \otimes \mathbf{u}) \cdot \triangle \mathbf{S} = \\ \big[(\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}) + (\triangle \mathbf{S})\mathbf{u}\big] \cdot \mathbf{a},\end{aligned} \tag{2.127}$$

o sea

$$\operatorname{div}\big[((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u})^T\big] = (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}) + (\triangle \mathbf{S})\mathbf{u}, \tag{2.128}$$

y por lo tanto

$$(\triangle \mathbf{S})\mathbf{u} = \operatorname{div}\big[((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u})^T\big] - (\nabla \mathbf{S})(\nabla \mathbf{u}). \tag{2.129}$$

Subtrayendo (2.126) de (2.129) tenemos

$$(\triangle \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\triangle \mathbf{u}) = \operatorname{div}\big[((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u})^T\big] - \operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla \mathbf{u}). \tag{2.130}$$

Integrando ambos membros de esta identidad en el dominio Ω, aplicando el teorema de la divergencia (2.108), y empleando la (1.201), resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big[(\triangle \mathbf{S})\mathbf{u} - \mathbf{S}(\triangle \mathbf{u})\big]\, d\Omega = \int_\Omega \big[\operatorname{div}\big[((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u})^T\big] - \operatorname{div}(\mathbf{S}\nabla \mathbf{u})\big]\, d\Omega = \\ \int_{\partial\Omega} \big[((\nabla \mathbf{S})^{\frac{1}{T}}\mathbf{u})^T - (\mathbf{S}\nabla \mathbf{u})\big]\mathbf{n}\, d\partial\Omega = \int_{\partial\Omega} [((\nabla \mathbf{S})\mathbf{n})\mathbf{u} - (\mathbf{S}\nabla \mathbf{u})\mathbf{n}]\, d\partial\Omega,\end{aligned} \tag{2.131}$$

que es el resultado buscado.

2.7 Coordenadas

Veamos con más detalles algunos aspectos relacionados a bases y componentes.

El espacio cartesiano $\mathbb{R}^n$ es el espacio vectorial n-dimensional cuyos elementos es la lista ordenada de n números reales $\{x^1, x^2, \ldots, x^n\}$, y donde la adición y multiplicación por un real están definidas de la manera usual.

Como ya mencionamos, un sistema de coordenadas en un subconjunto abierto $\mathscr{X}$ del espacio euclidiano puntual n-dimensional, es una aplicación uno a uno (biyectiva) de $\mathscr{X}$ en $\mathbb{R}^n$ tal que tiene un gradiente invertible y su segundo gradiente es continuo, es decir la transformación es de clase C^2. De esta manera si $\bar{x}$ es esta transformación, luego

$$\begin{aligned} &\bar{x} : \mathscr{X} \to \mathbb{R}^n, \\ &\qquad x \mapsto \bar{x} = \{\bar{x}^1(x), \bar{x}^2(x), \ldots, \bar{x}^n(x)\} = \{x^1, x^2, \ldots, x^n\}, \end{aligned} \tag{2.132}$$

donde $\bar{x}^k$ es un campo real con la misma regularidad que la asumida para $\bar{x}$. Para un dado punto x, el número $x^k = \bar{x}^k(x)$ representa la k-ésima coordenada del punto x en el sistema de coordenadas $\bar{x}$.

Si representamos por $\underline{x}$ la inversa de la transformación $\bar{x}$ tenemos

$$\bar{x}^k(\underline{x}(x^1, x^2, \ldots, x^n)) = x^k \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.133}$$

En virtud de la regularidad admitida para la transformación $\bar{x}$, en cada punto x es posible definir los vectores

$$\mathbf{e}^k = \nabla \bar{x}^k(x), \tag{2.134}$$

$$\mathbf{e}_k = \frac{\partial}{\partial x^k} \underline{x}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\Big|_{x^j = \bar{x}^j(x) \text{ fijo } \forall\, j,\ j \neq k}, \tag{2.135}$$

$$k \in \{1, 2, \ldots, n\}. \tag{2.136}$$

En particular, el campo vectorial $\mathbf{e}^k(x)$ es normal a la superficie coordenada $x^k = C$ (constante) que pasa por el punto x. Por otro lado, el campo vectorial $\mathbf{e}_k(x)$ es tangente a la *k-ésima curva coordenada que pasa por x*. Esta curva coordenada es el lugar de puntos próximos al punto x para los cuales *todas* sus coordenadas *excepto* la coordenada x^k tienen el mismo valor que las del punto x (ver Figura 2.1).

De las consideraciones anteriores se concluye que $\{\mathbf{e}^1(x), \mathbf{e}^2(x), \ldots, \mathbf{e}^n(x)\}$ y $\{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \ldots, \mathbf{e}_n(x)\}$ son bases del espacio vectorial $\mathscr{V}$ asociado al espacio euclidiano puntual n-dimensional. En particular, la base $\{\mathbf{e}_1(x), \mathbf{e}_2(x), \ldots, \mathbf{e}_n(x)\}$ se llama *base natural* en el punto x del sistema de coordenadas $\bar{x}$. Por su parte, la base $\{\mathbf{e}^1(x), \mathbf{e}^2(x), \ldots, \mathbf{e}^n(x)\}$ recibe el nombre *base recíproca o dual*. Ahora bien, cuando el punto x varia en el subconjunto abierto $\mathscr{X}$ (dominio de definición de la transformación $\bar{x}$) obtenemos campos de bases natural y recíproca. En general, estas bases no son ortonormales. Si las superficies coordenadas son mutuamente ortogonales, las curvas coordenadas son ortogonales a las superficies coordenadas. En este caso,

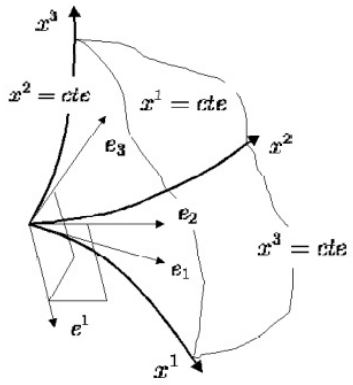


Fig. 2.1 Sistema de coordenadas.

$\mathbf{e}^k$ y $\mathbf{e}_k$ son paralelos pero en general no son idénticos (vea, por ejemplo, el caso de coordenadas esféricas y cilíndricas). En el caso de la base natural ser constante, las coordenadas son llamadas *coordenadas cartesianas* y si, además, son ortonormales son llamadas *coordenadas cartesianas rectangulares*.

En Mecánica, y como ya vimos, el espacio euclidiano puntual es tridimensional. En este espacio es usual el empleo de *coordenadas cilíndricas*. En tal caso a cada punto $x \in \mathscr{E}$ asociamos una terna de números reales $\{r, \theta, z\}$ que representan, respectivamente, la distancia del punto x a una cierta línea llamada *eje del sistema de coordenadas cilíndricas*, el ángulo entre un plano que contiene el eje (que será considerado como plano origen para medir los ángulos) y el plano que pasa por el eje y el punto x y, por último, la distancia de x a un plano perpendicular al eje tomado como origen para la medida de esta distancia (ver Figura 2.2).

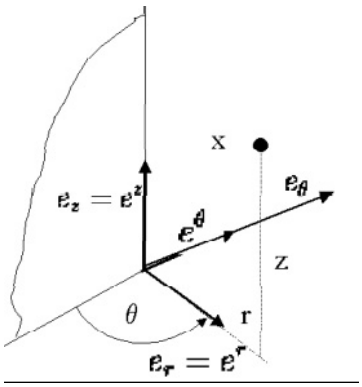


Fig. 2.2 Coordenadas cilíndricas.

Para este tipo de coordenada es fácil verificar

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \mathbf{e}^r, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = r^2 \mathbf{e}^\theta, \quad \mathbf{e}_z = \frac{\partial x}{\partial z} = \mathbf{e}^z. \tag{2.137}$$

Otro sistema de coordenadas comunmente empleado es el esférico. En este caso a cada punto x asociamos tres números reales $\{r, \theta, \phi\}$ cuyo significado puede verse en la Figura 2.3. Luego, en este caso resulta

$$\mathbf{e}_r = \frac{\partial x}{\partial r} = \mathbf{e}^r, \quad \mathbf{e}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} = r^2 \mathbf{e}^\theta, \quad \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial x}{\partial \phi} = r^2 \sin^2 \phi \mathbf{e}^\phi. \tag{2.138}$$

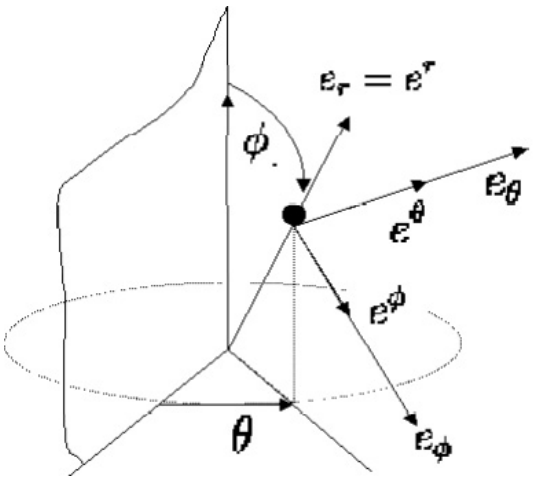


Fig. 2.3 Coordenadas esféricas.

Sea ahora un campo vectorial $\mathbf{v}$ definido en $\mathscr{X}$. Luego, para cada punto x, $\mathbf{v}(x)$ es un vector que podrá representarse en función de la base natural o de la base recíproca. Es decir

$$\mathbf{v}(x) = v^i(x)\mathbf{e}_i(x) = v_i(x)\mathbf{e}^i(x). \tag{2.139}$$

Los campos $v^1, v^2, \cdots, v^n$ son las componentes *contravariantes* de $\mathbf{v}$ relativas al sistema de coordenadas $\bar{x}$ cuando la base natural ha sido adoptada. De la misma manera, los campos $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son las componentes *covariantes* de $\mathbf{v}$ relativas al sistema de coordenadas $\bar{x}$ cuando la base recíproca o dual ha sido adoptada (vea el Capítulo 1). Lo mismo podemos decir con respecto a campos tensoriales de cualquier otro orden.

Ahora bien, usualmente asignamos a los campos vectoriales y tensoriales que surgen en mecánica unidades (unidades de longitud, de fuerza, de fuerzas por unidad de longitud, superficie y/o volumen, etc.) con significado físico preciso. Por ejemplo, el campo vectorial de velocidades real tiene el significado físico de una longitud dividida por tiempo. Las componentes de este campo en las coordenadas anteriormente mencionadas no tienen el mismo significado ya que el significado físico de

los vectores bases es en general diferente para cada uno de ellos. Por ejemplo, en un sistema cilíndrico $\mathbf{e}^r$ no tiene dimensión (significado físico). No ocurre lo mismo con $\mathbf{e}^\theta$ que tiene la dimensión de la inversa de una longitud.

En mecánica puede ser útil dar a cada componente una interpretación física idéntica a la del propio campo. Por esta motivación, surgieron las denominadas *componentes físicas*.

Para un sistema de coordenadas ortogonal, estas componentes están definidas sin ninguna ambigüedad como siendo las componentes respecto a la siguiente base

$$\mathbf{i}_{\langle k\rangle} = \frac{\mathbf{e}_k}{\|\mathbf{e}_k\|} = \frac{\mathbf{e}^k}{\|\mathbf{e}^k\|}. \tag{2.140}$$

Esta nueva base ortonormal está definida por el conjunto de vectores (campos vectoriales en general) $\{\mathbf{i}_{\langle 1\rangle}, \mathbf{i}_{\langle 2\rangle}, \ldots, \mathbf{i}_{\langle n\rangle}\}$ que son siempre tangentes a las curvas coordenadas y ortogonales a las superficies coordenadas. De esto, tenemos

$$\mathbf{v}(x) = v^k(x)\mathbf{e}_k(x) = v_k(x)\mathbf{e}^k(x) = v_{\langle k\rangle}(x)\mathbf{i}_{\langle k\rangle}(x), \tag{2.141}$$

donde $v_{\langle k\rangle}(x)$ es la componente física k-ésima de $\mathbf{v}$ en el punto x. A su vez, de la expresión anterior vemos que

$$v_{\langle k\rangle}(x) = v^k(x)\|\mathbf{e}_k(x)\| = v_k(x)\|\mathbf{e}^k(x)\|. \tag{2.142}$$

Definiciones y reglas similares pueden obtenerse para campos tensoriales de segunda orden. Con efecto

$$\mathbf{T} = T^{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = T_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = T^i_{\cdot j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j) = T_{\langle ij\rangle}(\mathbf{i}_{\langle i\rangle} \otimes \mathbf{i}_{\langle j\rangle}), \tag{2.143}$$

para cada punto x. De esta última expresión no resulta dificil obtener la siguiente relación entre las diferentes componentes de un tensor de segundo orden

$$T_{\langle ij\rangle} = T^{ij}\|\mathbf{e}_i\|\|\mathbf{e}_j\| = T_{ij}\|\mathbf{e}^i\|\|\mathbf{e}^j\| = T^i_{\cdot j}\|\mathbf{e}_i\|\|\mathbf{e}^j\| = T_i^{\cdot j}\|\mathbf{e}^i\|\|\mathbf{e}_j\|. \tag{2.144}$$

Haciendo uso del tensor métrico g_{ij} o g^{ij}, las componentes físicas pueden reescribirse como

$$v_{\langle k\rangle} = v^k\sqrt{g_{kk}} = v_k\sqrt{g^{kk}}, \tag{2.145}$$

$$T_{\langle ij\rangle} = T^{ij}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g_{jj}} = T_{ij}\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g^{jj}} = T^i_{\cdot j}\sqrt{g_{ii}}\sqrt{g^{jj}} = T_i^{\cdot j}\sqrt{g^{ii}}\sqrt{g_{jj}}. \tag{2.146}$$

Ejercicio 2.6. Demuestre las relaciones (2.145) y (2.146).

A su vez, de la propia definición de sistema de coordenadas, la base natural (también llamada *intrínseca*) es un campo vectorial diferenciable. Luego, el gradiente asociado a cada vector (campo) base existe y es un campo tensorial continuo

$$\Gamma_{(k)} = \nabla\mathbf{e}_k \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.147}$$

En particular, *las componentes mixtas* $\Gamma^i_{(k)\,.j}$ de estos gradientes son llamadas *componentes de Christoffel* del sistema de coordenadas. Es decir

$$\Gamma^i_{(k)\,.j} = \mathbf{e}^i \cdot \Gamma_{(k)} \mathbf{e}_j. \tag{2.148}$$

Es posible mostrar que

$$\Gamma^i_{(k)\,.j} = \Gamma^i_{(j)\,.k}, \tag{2.149}$$

y de la propia definición de gradiente se sigue que

$$\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} = \Gamma^k_{(i)\,.j} \mathbf{e}_k. \tag{2.150}$$

Haciendo uso de las componentes del tensor métrico asociado al sistema de coordenadas, las componentes de Christoffel pueden calcularse a través de

$$\Gamma^k_{(i)\,.j} = \frac{1}{2} g^{kr} (g_{ri,j} + g_{rj,i} - g_{ij,r}), \tag{2.151}$$

donde

$$g_{ij,r} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^r}. \tag{2.152}$$

También, puede mostrarse que las componentes de Christoffel de un sistema de coordenadas son idénticamente nulas si y sólo si la base natural es constante. Estas coordenadas reciben el nombre de cartesianas (pero no necesariamente ortogonales).

Sea ahora un campo vectorial diferenciable $\mathbf{u}$. Su gradiente, $\nabla \mathbf{u}$, será, por lo tanto, un campo tensorial. Las diferentes componentes del $\nabla \mathbf{u}$ con respecto a la base natural son conocidas con el nombre *derivadas covariantes*. De lo anterior vemos que existen cuatro tipos de derivadas covariantes

$$u^i|_j = \mathbf{e}^i \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_j, \tag{2.153}$$

$$u_i|_j = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}_j, \tag{2.154}$$

$$u_i|^j = \mathbf{e}_i \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}^j, \tag{2.155}$$

$$u^i|^j = \mathbf{e}^i \cdot (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{e}^j. \tag{2.156}$$

Para calcularlas considere la (2.61), que en este caso resulta

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla (u^k \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_k \otimes \nabla u^k + u^k \nabla \mathbf{e}_k. \tag{2.157}$$

Luego, por ejemplo

$$u^i|_j = \mathbf{e}^i \cdot (\mathbf{e}_k \otimes \nabla u^k + u^k \nabla \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j = (\nabla u^k \cdot \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k) + u^k \mathbf{e}^i \cdot (\nabla \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_j = \nabla u^i \cdot \mathbf{e}_j + u^k \Gamma^i_{(k)\,.j} = \frac{\partial u^i}{\partial x^j} + u^k \Gamma^i_{(k)\,.j}. \tag{2.158}$$

De manera similar obtenemos

$$u_i|_j = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} - u_k \Gamma^k_{(i)\,.j}. \tag{2.159}$$

Como podemos apreciar las derivadas covariantes son iguales a las derivadas parciales para todos los campos vectoriales **u** si y sólo si el sistema de coordenadas es cartesiano. Resultado similar vale para todos los tensores cualquiera sea su orden.

De la misma manera que procedimos con el gradiente de un campo escalar, podemos proceder con la *divergencia* de un campo tensorial. Por ejemplo, la componente contravariante k-ésima del vector $\operatorname{div}\mathbf{L}$, donde $\mathbf{L}$ es un campo tensorial de segundo orden suficientemente regular, puede colocarse en función de las derivadas covariantes y las componentes de Christoffel, resultando

$$(\operatorname{div}\mathbf{L})^i = L^{ij}|_j = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^j}(\sqrt{g}L^{ij}) + L^{kj}\Gamma^i_{(k)\,.j}. \tag{2.160}$$

donde g es el determinante del tensor métrico g_{ij}.

Ejercicio 2.7. Demuestre que la expresión (2.160) es válida.

2.8 Lectura Adicional

Al lector interesado en aumentar sus conocimientos en los temas brevemente expuestos en este capítulo, se recomienda la lectura de los siguientes trabajos [23], [47], [59], [58], [60], [83], [105], [130], [133], [157], [167], [169], [176], [202], [259], [292], [293],

Parte II
FORMULACIONES VARIACIONALES EN MECÁNICA

Esta parte tiene por objetivo introducir al lector en la formulación variacional de la mecánica. Para ello, en el Capítulo 3 presentamos los tres pilares que constituyen esta formulación denominada *Método de la Potencia Virtual*. En los Capítulos 4 a 6 presentamos la aplicación de esta formulación al caso de materiales hiperelásticos, plásticos y que experimentan fluencia.

Capítulo 3
Cinemática y Principios de Potencia Virtual

3.1 Introducción

Los métodos y principios variacionales tienen un papel importante tanto en la Mecánica Teórica como en la Aplicada. Como veremos en este capítulo, la forma variacional de las leyes que gobiernan el comportamiento de los medios continuos es, por sí misma, la manera más natural y rigurosa de instituirlas.

El uso de la formulación variacional, permite reducir en una única expresión integral todos los elementos que intervienen en el problema que se está analizando, tales como: ecuaciones de equilibrio, ecuaciones constitutivas (comportamiento del material), condiciones de contorno, condiciones iniciales, de discontinuidad, etc.

Las formas locales de las ecuaciones que rigen el movimiento de un cuerpo, pueden obtenerse directamente a partir de la propia formulación variacional. A su vez, y esto es importante desde el punto de vista de aplicaciones, la formulación variacional induce, de manera natural, los métodos de resolución para la obtención de soluciones aproximadas. Estos métodos, que llamaremos de Métodos Variacionales, permiten obtener soluciones aproximadas muchas veces de fácil implementación computacional independientemente de la complejidad de la geometría del dominio donde el problema mecánico está definido.

Otro aspecto importante de la Formulación Variacional de la Mecánica, cuando comparada con la formulación *clásica* (local), es el de permitir reunir dentro de un mismo formalismo diferentes problemas mecánicos aparentemente no relacionados entre sí. Este poder de síntesis, permite distinguir las hipótesis y aspectos fundamentales de los modelos que se están estudiando. Finalmente, la Formulación Variacional proporciona, a través de las herramientas del Análisis Funcional, los elementos necesarios al estudio de existencia y unicidad de la solución, así como también estimativas *a priori* y *a posteriori* del error de aproximación de la misma.

A la luz de estas observaciones podemos concluir (ver [163]) que la Formulación Variacional de la Mecánica asume un significado mucho más que accidental. La Formulación Variacional asume, así, una importancia fundamental en la elaboración de modelos mecánicos, constituyéndose en la formulación **natural** para los mismos.

A partir del Principio de la Potencia Virtual [1], admitido como Principio Fundamental, conjuntamente con la cinemática de los medios continuos y con la dualidad entre movimiento (deformación) y esfuerzo externo (interno) veremos, en este capítulo, como los conceptos de esfuerzos, externos e internos a los cuales un cuerpo podrá estar sometido, y los conceptos de equilíbrio y compatibilidad en sus formas locales pasan a ser una consecuencia de este tipo de enfoque.

Por ejemplo, en la formulación **clásica** de la Mecánica admitimos *a priori* la existencia de los **esfuerzos externos** (ver [130]) definidos a través de campos vectoriales asociados a una medida. Así hablamos de *fuerzas de volumen*, *fuerzas de superficie*, etc. Existe, sin embargo, una segunda manera (formulación variacional) para describir los esfuerzos externos que actúan sobre el cuerpo. En este segundo enfoque, los esfuerzos externos quedan definidos a través de la **dualidad** entre los mismos y los movimientos que realizamos sobre el cuerpo, y esta dualidad caracteriza la **potencia** consumida para realizarlos. Como se verá más adelante, esta última manera de definir los esfuerzos es más natural que la primera ya que expresa una realidad mecánica: la existencia de estos esfuerzos sólo la detectamos a partir de acciones de movimiento sobre el cuerpo.

En este sentido, recomendamos la lectura de los capítulos 3 y 4 de C. Lanczos ([163]), los libros de Duvaut y Lions ([75]), de Ekeland y Temam ([77]), de P. Germain ([116]), de Y. C. Fung ([110]), de M. Fremond ([108]), de J. T. Oden y colaboradores ([213], [220], [218], [219], [223]), de S. G. Mikhlin ([191]), de P. D. Panagiotopoulos ([230]), de K. Rektorys ([244]), los trabajos de P. Germain ([113], [114], [115], [117]) , de M. A. Maugin ([182]), de G. Romano y colaboradores ([247], [248], [249], [250], [251], [252], [253], [254], [255], [256]) , y los trabajos [92], [93], [94],[279], citados en la bibliografía .

3.2 Cinemática

3.2.1 Cuerpo y Deformaciones

La característica física más singular de los cuerpos, es la de ocupar regiones del espacio euclidiano puntual $\mathscr{E}$. Si bien un mismo cuerpo puede ocupar diferentes regiones en diferentes instantes de tiempo, ninguna de ellas está intrínsecamente asociada a él. Sin embargo, siempre podemos seleccionar cualquiera de estas regiones, que designaremos con $\mathscr{B}$, y establecer una correspondencia biunívoca entre cada una de las partículas **P** del cuerpo y el lugar X ocupado por ella en la región $\mathscr{B}$.

Hecha esta identificación, el cuerpo pasa a ser formalmente una región (posiblemente no limitada) $\mathscr{B}$ de $\mathscr{E}$. Esta región $\mathscr{B}$ es llamada *configuración de referen-*

[1] Iniciado por Aristóteles a más de 300 años antes de Cristo, formulado por primera vez en los célebres trabajos de J. Bernoulli y definitivamente establecido a partir de los trabajos de D'Alembert.

cia. Observe que, por su propia definición, para un mismo cuerpo podemos adoptar inúmeras configuraciones de referencia. Esta configuración de referencia es, en general, seleccionada de manera a facilitar el análisis posterior. Así, por ejemplo, si queremos estudiar una placa con deformaciones iniciales, generalmente adoptaremos como configuración de referencia la configuración no deformada (plana). Este ejemplo nos muestra otra característica de la configuración de referencia: esta configuración no necesariamente será ocupada por el cuerpo durante su movimiento real.

Dada la configuración de referencia $\mathscr{B}$, cada punto $X \in \mathscr{B}$ es también llamado *punto material* y las subregiones $\mathscr{P}$ de $\mathscr{B}$ son llamadas *partes* del cuerpo $\mathscr{B}$.

Debido a acciones, cuyo origen discutiremos más adelante, el cuerpo $\mathscr{B}$ podrá pasar a ocupar diferentes regiones (también llamadas *configuraciones*). Así, se vuelve necesaria la introducción de un parámetro, aquí designado por $t \in [t_0, t_f]$ que nos permitirá definir la configuración $\mathscr{B}_t$ del cuerpo, la cual corresponde a la *configuración en el instante* t. Vale resaltar que t no está necesariamente relacionado al tiempo. En problemas no dependientes del tiempo, el parámetro t simplemente establece el orden de precedencia para estas configuraciones.

En lo que sigue y para simplificar nuestra presentación, vamos a suponer que hemos adoptado un punto origen $O \in \mathscr{E}$. De esta manera podemos identificar el punto $X \in \mathscr{E}$ con su vector asociado $\mathbf{X} = X - O$. Uno de los aspectos más importantes de la mecánica es el estudio de la *deformación* de un cuerpo. Desde un punto de vista físico, decimos que el cuerpo se *deforma* cuando pasa de la configuracion $\mathscr{B}$ a la configuración actual $\mathscr{B}_t$. La *deformación* queda así caracterizada a través de la aplicación

$$\begin{aligned} &\chi_t : \mathscr{B} \to \mathscr{B}_t, \\ &\qquad \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x} = \chi_t(\mathbf{X}). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Sin embargo, esta aplicación deberá satisfacer algunas propiedades para caracterizar lo que denominamos *deformación*. Así, resulta necesario exigir que no exista interpenetración de material, lo que matemáticamente significa que χ_t debe ser biunívoca. En otras palabras, a cada punto $\mathbf{X}$ de $\mathscr{B}$ le corresponderá un único $\mathbf{x}$ en $\mathscr{B}_t$ y viceversa. Por otra parte, como χ_t es una aplicación que lleva puntos de $\mathscr{E}$ en puntos de $\mathscr{E}$ su gradiente, $\nabla\chi_t$, es un campo tensorial (de segundo orden). Recordando que el $\det\nabla\chi_t$ está asociado al cambio de volumen (ver la expresión (1.163) y [130]), es razonable suponer que

$$\det\nabla\chi_t > 0 \quad \forall t \in [t_0, t_f], \tag{3.2}$$

ya que, caso contrario, estaremos admitiendo la posibilidad de pasar continuamente de un volumen no nulo antes de la deformación a un volumen nulo después de la misma.

Así, por *deformación de un cuerpo* al pasar de la configuración $\mathscr{B}$ para $\mathscr{B}_t$, será entendida la aplicación (3.1) que es biunívoca y que satisface

$$\begin{aligned} \det \nabla \mathscr{X}_t(\mathbf{X}) > 0 \quad \forall \mathbf{X} \in \mathscr{B}, \\ \mathscr{X}_t(\mathscr{B}) = \mathscr{B}_t, \\ \mathscr{X}_t(\partial\mathscr{B}) = \partial\mathscr{B}_t, \end{aligned} \tag{3.3}$$

donde $\partial\mathscr{B}$ y $\partial\mathscr{B}_t$ representan las fronteras de las regiones $\mathscr{B}$ y $\mathscr{B}_t$ respectivamente.

Esta deformación puede ser materializada a través de un campo vectorial definido a partir de las posiciones que ocupa una partícula antes y después de la deformación, siendo este campo definido sobre todos los puntos del cuerpo $\mathscr{B}$, como mostrado en la Figura 3.1.

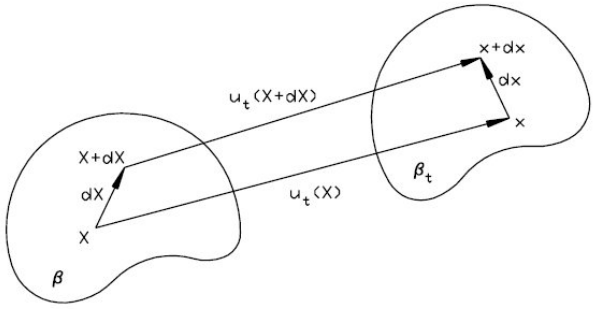


Fig. 3.1 Mapeamiento $\mathscr{X}_t$ que caracteriza la deformación del cuerpo en la configuración $\mathscr{B}$ a la configuración $\mathscr{B}_t$.

Siendo $\mathbf{x} = \mathscr{X}_t(\mathbf{X})$, podemos escribir

$$\mathbf{U}_t = \mathbf{U}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathscr{X}_t(\mathbf{X}) - \mathbf{X}, \tag{3.4}$$

o sea

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{U}_t(\mathbf{X}), \tag{3.5}$$

donde hemos introducido el campo $\mathbf{U}_t$ que es llamado *campo de desplazamiento* relativo a la configuración $\mathscr{B}$. Por supuesto, $\mathbf{U}_t$ deberá satisfacer ciertas restricciones de modo a garantizar que se cumplan las expresiones (3.3).

El campo tensorial $\mathbf{F}_t$ dado por

$$\mathbf{F}_t = \nabla \mathscr{X}_t = \nabla \mathbf{X} + \nabla \mathbf{U}_t = \mathbf{I} + \nabla \mathbf{U}_t \tag{3.6}$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad, representa el gradiente (respecto a la variable material $\mathbf{X}$) de la deformación. En ciertos casos, a partir de aquí, y por simplicidad en la notación, eliminaremos el índice t del mapeamiento, del vector campo de desplazamiento y del tensor gradiente de la deformación.

Diremos que una deformación $\mathscr{X}$ es *homogénea* si su gradiente es constante. Así, toda deformación homogénea admite la siguiente representación ([130, págs. 35–36])

$$\mathscr{X}(\mathbf{X}) = \mathscr{X}(\mathbf{X}_o) + \mathbf{F}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{X}_o \in \mathscr{B}, \tag{3.7}$$

donde

$$\mathbf{F} = \nabla \mathscr{X}.$$

Dos tipos de deformaciones homogéneas nos serán útiles más adelante. Diremos que $\mathscr{X}$ es una *translación* si

$$\mathscr{X}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{U} \tag{3.8}$$

donde $\mathbf{U}$ es un campo vectorial constante que caracteriza la translación.

Por otra parte, diremos que $\mathscr{X}$ es una *rotación* alrededor de un punto fijo $\mathbf{X}_o$ si

$$\mathscr{X}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}_o + \mathbf{R}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) \tag{3.9}$$

donde $\mathbf{R}$ é um tensor de rotação constante (es decir, $\mathbf{R} \in Rot$).

Supongamos ahora que $\mathscr{X}$ no sea homogénea luego, dada una vecindad suficientemente pequeña de $\mathbf{X}_o \in \mathscr{B}$, con $\mathbf{X}_o$ arbitrario y que designaremos $\mathscr{S}(\mathbf{X}_o)$, tenemos

$$\mathscr{X}(\mathbf{X}) = \mathscr{X}(\mathbf{X}_o) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_o)(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) + o(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) \quad \forall \mathbf{X} \in \mathscr{S}(\mathbf{X}_o). \tag{3.10}$$

De lo anterior podemos concluir que, en la vecindad de un punto $\mathbf{X}_o$ toda deformación es, con un error del orden de $o(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o)$, una deformación homogénea.

Procuremos ahora determinar una *medida* de la deformación. Para ello, sea $\mathbf{X} = \mathbf{X}_o + d\mathbf{X}$, que substituido en (3.10) nos dará (ver Figura 3.1)

$$d\mathbf{x} = \nabla \mathscr{X}(\mathbf{X}_o) d\mathbf{X} = \mathbf{F} d\mathbf{X}, \tag{3.11}$$

de donde

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot \mathbf{F} d\mathbf{X} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}. \tag{3.12}$$

Luego, una medida de la deformación de una *fibra* $d\mathbf{X}$ al pasar para la configuración deformada $d\mathbf{x}$ será dada por

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = 2\mathbf{E} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}, \tag{3.13}$$

donde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} \nabla \mathbf{U}), \tag{3.14}$$

es conocido con el nombre de *tensor de deformación de Green* [2]. A su vez, estamos usando la notación $\nabla^T \mathbf{U}$ en lugar de $(\nabla \mathbf{U})^T$ para facilitar la escritura.

Hasta aquí hemos adoptado una descripción para la deformación conocida como *descripción Lagrangiana* donde nos preocupamos en distinguir el punto material $\mathbf{X}$ durante el proceso de deformación. Dadas las propiedades de la deformación (3.1), se sigue que existe $\mathscr{X}_t^{-1}$, suficientemente regular. Luego podemos invertir nuestro razonamiento y pasar a distinguir el punto $\mathbf{x}$ en lugar del punto material $\mathbf{X}$. Es im-

[2] Algunos autores lo llaman tensor de deformación de Lagrange si bien, de acuerdo con Truesdell (vea [292]), el tensor $\mathbf{E}$ fue introducido por primera vez por Green en 1841 y St. Venant en 1844.

portante notar ahora que a medida que el parámetro t se modifica, el punto $\mathbf{x}$ pasa a ser el lugar ocupado por **diferentes** puntos materiales $\mathbf{X}$. Este tipo de descripción es conocida como *descripción Euleriana* o *espacial*. Si en lugar de posicionar nuestro análisis en función de los puntos materiales $\mathbf{X}$ de la configuración $\mathscr{B}$, nos posicionamos en los correspondientes puntos espaciales $\mathbf{x}$ (bajo la transformación $\mathscr{X}_t$) de la configuración $\mathscr{B}_t$, tendremos lo que se denomina descripción espacial, en contraste con la descripción material (ó de referencia) adoptada antes.

Empleando esta nueva descripción y utilizando un razonamiento similar al ya realizado para la descripción Lagrangiana tenemos

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{u}(\mathbf{x}), \tag{3.15}$$

donde hemos introducido la descripción espacial del campo de desplazamiento $\mathbf{u}$[3]. Con esto obtenemos

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}, \tag{3.16}$$

con

$$(\mathbf{F}^{-1})_e = \operatorname{grad} \mathscr{X}^{-1} = \operatorname{grad} \mathbf{x} - \operatorname{grad} \mathbf{u} = \mathbf{I} - \operatorname{grad} \mathbf{u}, \tag{3.17}$$

donde $\operatorname{grad}(\cdot)$ es el gradiente con respecto a la variable espacial $\mathbf{x}$, y la notación $(\cdot)_e$ indica la descripción espacial del campo $(\cdot)$, en este caso $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ es un campo material, y también su inversa $\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{X})$. Luego resulta $(\mathbf{F}^{-1})_e(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{-1}(\mathscr{X}_t^{-1}(\mathbf{x}))$ (ver Sección 3.2.2). De las expresiones anteriores resulta

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}\mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = 2\mathbf{A} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} \tag{3.18}$$

donde $\mathbf{A}$ es conhecido como *tensor de deformación de Almansi*, y estará dado por

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}^T \mathbf{u} + \operatorname{grad} \mathbf{u} - \operatorname{grad}^T \mathbf{u} \operatorname{grad} \mathbf{u}), \tag{3.19}$$

que es la descripción espacial de la medida de deformación.

Si ahora suponemos que los desplazamientos y sus gradientes son tales que

$$\|\mathbf{u}\|, \|\nabla \mathbf{u}\| \text{ y } \|\operatorname{grad} \mathbf{u}\| < \varepsilon, \tag{3.20}$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, será posible despreciar en (3.14) y en (3.19) los términos de mayor orden, dados por $\nabla^T \mathbf{U} \nabla \mathbf{U}$ o por $\operatorname{grad}^T \mathbf{u} \operatorname{grad} \mathbf{u}$, frente a los términos lineales $\nabla \mathbf{U}$ y $\operatorname{grad} \mathbf{u}$ respectivamente, además de ser posible asumir que los campos de desplazamientos en ambas descripciones espacial y material coinciden. De este resultado y de las expresiones (3.13) y (3.18) obtenemos

$$\mathbf{E} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \mathbf{A} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (\mathbf{A}_m \mathbf{F} d\mathbf{X}) \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}) = \mathbf{F}^T \mathbf{A}_m \mathbf{F} d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}, \tag{3.21}$$

donde $(\cdot)_m$ es la descripción material del campo espacial $(\cdot)$. En este caso la descripción material del campo espacial $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ es $\mathbf{A}_m(\mathbf{X}) = \mathbf{A}(\mathscr{X}_t(\mathbf{X}))$ (ver Sección 3.2.2).

[3] Aquí cabe resaltar que la siguiente relación es válida $\mathbf{u}(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}=\mathscr{X}(\mathbf{X})} = \mathbf{u}(\mathscr{X}(\mathbf{X})) = \mathbf{U}(\mathbf{X})$.

Ahora, vea que

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{A}_m \mathbf{F} = (\mathbf{I} + \nabla^T \mathbf{U}) \mathbf{A}_m (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{U}) = \\ \mathbf{A}_m + \nabla^T \mathbf{U} \mathbf{A}_m + \mathbf{A}_m \nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} \mathbf{A}_m \nabla \mathbf{U} = \mathbf{A}_m + o(\mathbf{A}_m) \quad (3.22)$$

Lo anterior nos muestra que, bajo las hipótesis anteriores, los tensores de Green y de Almansi difieren en términos de orden superior. Si ahora despreciamos tales términos llegaremos a la conclusión de que $\nabla = \text{grad}$, o sea, los gradientes espacial y material coinciden y por lo tanto

$$\mathbf{E} = \mathbf{A} = \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u}), \quad (3.23)$$

el cual es conocido como *tensor de deformación infinitesimal*.

Decimos que una deformación infinitesimal es *rígida* si la medida de deformación dada por el tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ resulta nula para todo punto del cuerpo. De lo anterior resulta que, para una deformación infinitesimal rígida se verifica que

$$\nabla \mathbf{u} = -\nabla^T \mathbf{u}. \quad (3.24)$$

O sea, el gradiente del campo de desplazamiento correspondiente a una deformación infinitesimal rígida es un campo tensorial antisimétrico.

Lo anterior nos permite introducir la siguiente definición: un campo de desplazamiento infinitesimal se dice *rígido* si su gradiente es constante y antisimétrico o, lo que es equivalente, si admite la siguiente representación

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_o) + \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{X}_o \in \mathscr{B}, \quad (3.25)$$

donde $\mathbf{W}$ es un tensor constante antisimétrico. A su vez, haciendo uso del vector axial de $\mathbf{W}$, representado aquí por $\mathbf{w}$, lo anterior también equivale a (ver la expresión (1.164) y [83, pág. 18]):

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}(\mathbf{X}_o) + \mathbf{w} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{X}_o \in \mathscr{B}. \quad (3.26)$$

Notando que

$$(\mathbf{u}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_o)) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) = \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) = \\ - \mathbf{W}(\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}_o) = 0, \quad (3.27)$$

por ser $\mathbf{W}$ antisimétrico, resulta

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) - \mathbf{u}(\mathbf{X}_o) \perp \mathbf{X} - \mathbf{X}_o. \quad (3.28)$$

En otras palabras, el desplazamiento de $\mathbf{X}$ en relación a $\mathbf{X}_o$ es ortogonal al vector $\mathbf{X} - \mathbf{X}_o$ para toda deformación infinitesimal rígida.

3.2.2 Movimiento. Tasa de Deformación

Definimos el *movimiento* de un cuerpo $\mathscr{B}$, como la familia uniparamétrica de aplicaciones

$$\begin{aligned} \mathscr{X} : \mathscr{B} \times [t_0, t_f] &\to \mathscr{E}, \\ (\mathbf{X}, t) &\mapsto \mathbf{x} = \mathscr{X}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde $\mathscr{X}$ es una deformación[4]. Luego, el punto

$$\mathbf{x} = \mathscr{X}(\mathbf{X}, t), \tag{3.30}$$

es el lugar ocupado por la partícula $\mathbf{X}$ en el instante de tiempo t. A su vez, la región ocupada por el cuerpo en el instante t está dada por

$$\mathscr{B}_t = \mathscr{X}(\mathscr{B}, t). \tag{3.31}$$

Como ya fue observado, en algunos casos es conveniente trabajar con las variables $(\mathbf{x}, t)$ en lugar de $(\mathbf{X}, t)$. Para formalizar esto, introduciremos el concepto de *trayectória*

$$\mathscr{T} = \{(\mathbf{x}, t); \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t, t \in [t_0, t_f]\}. \tag{3.32}$$

Como para cada t, $\mathscr{X}(\cdot, t) : \mathscr{B} \to \mathscr{B}_t$ es una aplicación biunívoca, existe por lo tanto su inversa $\mathscr{X}_t^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathscr{X}_t^{-1} : \mathscr{B}_t &\to \mathscr{B}, \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}, \end{aligned} \tag{3.33}$$

que nos permite obtener las siguientes identidades

$$\mathscr{X}(\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = \mathbf{x}, \tag{3.34}$$

$$\mathscr{X}^{-1}(\mathscr{X}(\mathbf{X}, t), t) = \mathbf{X}. \tag{3.35}$$

Haciendo uso de estas aplicaciones podemos describir un determinado campo, sea en función de $(\mathbf{X}, t)$ (en este caso decimos que temos la *descripción material* de este campo) o en función de $(\mathbf{x}, t)$ (en este caso tenemos su *descripción espacial*). Sea, por ejemplo, el campo material

$$\phi : \mathscr{B} \times [t_0, t_f] \mapsto \phi(\mathbf{X}, t), \tag{3.36}$$

luego, su descripción espacial será dada por

$$\phi_e(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x}, t), t). \tag{3.37}$$

Igualmente, la descripción material del campo espacial $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$ será dada por

[4] Observe la equivalencia de notación $\mathscr{X}_t(\mathbf{X}) = \mathscr{X}(\mathbf{X}, t)$, ver (3.1).

$$\varphi_m(\mathbf{X},t) = \varphi(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t). \tag{3.38}$$

Obviamente, de lo anterior se sigue que

$$(\phi_e)_m = \phi, \tag{3.39}$$
$$(\varphi_m)_e = \varphi. \tag{3.40}$$

De esta forma, será necesario distinguir las derivadas respecto a las variables materiales de las derivadas respecto a las variables espaciales. Tenemos así

- Dado el campo material ϕ, las expresiones:

$$\dot{\phi}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{X},t)\bigg|_{\mathbf{X}\text{ fijo}}, \tag{3.41}$$

$$\nabla\phi(\mathbf{X},t) = \nabla_{\mathbf{X}}\phi(\mathbf{X},t)\bigg|_{t\text{ fijo}}, \tag{3.42}$$

  representan, respectivamente, las derivadas con respecto a t manteniendo el punto material $\mathbf{X}$ fijo y el gradiente con respecto a $\mathbf{X}$ manteniendo t fijo. Estas derivadas son conocidas como *tasa material* (o derivada total con respecto al tiempo) y *gradiente material* de ϕ, respectivamente.
- Dado el campo espacial φ, las expresiones

$$\varphi'(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x},t)\bigg|_{\mathbf{x}\text{ fijo}}, \tag{3.43}$$

$$\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{x},t) = \nabla_{\mathbf{x}}\varphi(\mathbf{x},t)\bigg|_{t\text{ fijo}}, \tag{3.44}$$

  son llamadas, respectivamente, *tasa espacial* (o derivada espacial con respecto al tiempo) y *gradiente espacial* de φ.

Veamos algunos ejemplos que nos serán útiles más adelante. Sea la descripción material (3.29), luego

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t}(\mathbf{X},t)\bigg|_{\mathbf{X}\text{ fijo}}, \tag{3.45}$$

es la descripción material de la velocidad de la partícula $\mathbf{X}$ mientras que

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\partial^2 \mathscr{X}}{\partial t^2}(\mathbf{X},t)\bigg|_{\mathbf{X}\text{ fijo}}, \tag{3.46}$$

representa la descripción material de la aceleración.

Usando $\mathscr{X}^{-1}$ podemos obter la descripción espacial de la velocidad que la denotaremos por $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$. En efecto

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t}(\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x},t),t). \tag{3.47}$$

Observe que $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ es la velocidad de un punto material $\mathbf{X}$ que en instante t ocupa la posición $\mathbf{x}$ del espacio euclidiano.

Analogamente, podemos pensar en calcular la derivada temporal del mapeamiento inverso (3.33), que se define como

$$\mathbf{X}' = \frac{\partial \mathscr{X}^{-1}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\bigg|_{\mathbf{x}=\mathscr{X}(\mathbf{X},t) \text{ fijo}}, \tag{3.48}$$

la cual es denominada *velocidad inversa* [131, 181], y que en su descripción material resulta

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial \mathscr{X}^{-1}}{\partial t}(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t). \tag{3.49}$$

Observe que de (3.45) y (3.48), y usando la (3.34), obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}\bigg|_{\mathbf{x} \text{ fijo}} = \frac{\partial}{\partial t}\mathscr{X}(\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x},t),t)\bigg|_{\mathbf{x} \text{ fijo}} = \\ \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t}(\mathbf{X},t)\bigg|_{\mathbf{X} \text{ fijo}} + \nabla \mathscr{X}(\mathbf{X},t)\frac{\partial \mathscr{X}^{-1}}{\partial t}(\mathbf{x},t)\bigg|_{\mathbf{x}=\mathscr{X}(\mathbf{X},t) \text{ fijo}} = \\ \dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X},t) + \mathbf{F}(\mathbf{X},t)\mathbf{X}'(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t). \end{aligned} \tag{3.50}$$

Esto implica la siguiente relación entre la descripción material de la velocidad real y la velocidad inversa

$$\mathbf{v}_m = -\mathbf{F}\mathbf{V}. \tag{3.51}$$

También resulta necesario calcular la tasa material (derivada total con respecto al tiempo) de un campo espacial $\varphi = \varphi(\mathbf{x},t)$. Como el nombre indica, queremos la tasa de variación de φ manteniendo el punto material $\mathbf{X}$ fijo. Para poder realizar este cálculo, procedemos primero a obtener la descripción material del campo espacial φ luego, calculamos la tasa material y, finalmente, retornamos a la descripción espacial. Lo anterior corresponde a

$$\dot{\varphi} = \dot{\left(\overline{(\varphi_m)}\right)}_e, \tag{3.52}$$

o en forma extendida

$$\dot{\varphi}(\mathbf{x},t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t)\bigg|_{\mathbf{X}=\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x},t)}. \tag{3.53}$$

Es posible demostrar (ver [130, pág. 62]) que la tasa material conmuta con las transformaciones materiais y espaciales, es decir

$$(\dot{\phi})_e = \dot{\overline{(\phi_e)}} = \dot{\phi}_e, \tag{3.54}$$

$$(\dot{\varphi})_m = \dot{\overline{(\varphi_m)}} = \dot{\varphi}_m. \tag{3.55}$$

En particular, tomando como campo espacial φ la descripción espacial de la velocidad $\mathbf{v}$ tenemos, como consecuencia del resultado anterior, que

$$(\dot{\mathbf{v}})_m = \overline{(\mathbf{v}_m)}^{\cdot} = \ddot{\mathbf{x}}. \tag{3.56}$$

Es decir, $\dot{\mathbf{v}}$ es la descripción espacial de la aceleración.

Haciendo uso de la regla de la cadena tenemos que, si ϕ y $\mathbf{u}$ son campos espaciales, escalar y vectorial respectivamente, suficientemente regulares se verifican las siguientes relaciones

$$\dot{\phi} = \phi' + \operatorname{grad}\phi \cdot \mathbf{v}, \tag{3.57}$$

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}' + (\operatorname{grad}\mathbf{u})\mathbf{v}. \tag{3.58}$$

Con efecto, usando la regla de la cadena tenemos que

$$\dot{\phi}(\mathbf{x},t) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t)\Big|_{\mathbf{X}\text{ fijo}}\right)_e =$$

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t)\Big|_{\mathbf{x}=\mathscr{X}(\mathbf{X},t)\text{ fijo}} + \operatorname{grad}\phi(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t)\cdot\frac{\partial\mathscr{X}}{\partial t}(\mathbf{X},t)\Big|_{\mathbf{X}\text{ fijo}}\right)\Big|_{\mathbf{X}=\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x},t)} =$$

$$\phi'(\mathbf{x},t) + \operatorname{grad}\phi(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x},t), \tag{3.59}$$

y la (3.57) queda demostrada. Analogamente se prueba la (3.58).

Luego, en el caso particular de $\mathbf{u} = \mathbf{v}$

$$\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}' + (\operatorname{grad}\mathbf{v})\mathbf{v}. \tag{3.60}$$

Las expresiones anteriores nos permiten relacionar las tasas materiales y espaciales.

Una relación similar puede establecerse entre el gradiente espacial y el material. En efecto, sea $\mathbf{u}$ un campo vectorial espacial suficientemente regular, luego

$$\nabla\mathbf{u}_m = (\operatorname{grad}\mathbf{u})_m\mathbf{F}, \tag{3.61}$$

donde $\mathbf{F}$ es el tensor gradiente de deformación. Lo anterior se demuestra fácilmente. Basta para ello aplicar la regla de la cadena en la expresión

$$\mathbf{u}_m(\mathbf{X},t) = (\mathbf{u}(\mathbf{x},t))_m = \mathbf{u}(\mathscr{X}(\mathbf{X},t),t) \tag{3.62}$$

luego

$$\nabla\mathbf{u}_m = (\operatorname{grad}\mathbf{u})_m\nabla\mathscr{X} = (\operatorname{grad}\mathbf{u})_m\mathbf{F}. \tag{3.63}$$

Otra forma (más operacional) para demostrar lo anterior es la siguiente. Tenemos por definición

$$d\mathbf{u} = (\operatorname{grad}\mathbf{u})d\mathbf{x} \tag{3.64}$$

luego, sabiendo que $d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}$, podemos escribir

$$(d\mathbf{u})_m = (\operatorname{grad}\mathbf{u})_m \mathbf{F} d\mathbf{X} \tag{3.65}$$

A su vez

$$(d\mathbf{u})_m = \nabla \mathbf{u}_m d\mathbf{X}. \tag{3.66}$$

y de la comparación de estas dos últimas expresiones obtenemos el resultado ya demostrado en (3.63).

Uno de los movimientos que nos será util más adelante es el *movimiento rígido*. Decimos que el movimiento es rígido si, para todo instante de tiempo t, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\| \mathscr{X}(\mathbf{X},t) - \mathscr{X}(\mathbf{X}_o,t) \right\| = 0 \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{X}_o \in \mathscr{B}. \tag{3.67}$$

En otras palabras, el movimiento $\mathscr{X}$ es rígido si la distancia entre dos puntos materiales del cuerpo permanece inalterada en todo el tiempo.

Sea $\mathscr{X}$ un movimiento y $\mathbf{v}$ su correspondiente campo de velocidades, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathscr{X}(\mathbf{X},t), \quad \mathbf{X} \in \mathscr{B},\ t \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x},t) &= \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t}(\mathbf{X},t)\bigg|_{\mathbf{X}=\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x},t)}, \end{aligned} \tag{3.68}$$

luego, las siguientes proposiciones son equivalentes

- $\mathscr{X}$ es rígido,
- para cada t, $\mathbf{v}(\cdot,t)$ tiene la forma de un campo de desplazamiento infinitesimal rígido en $\mathscr{B}_t$. En otras palabras, $\mathbf{v}$ admite la representación

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{y},t) + \mathbf{W}(t)(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \tag{3.69}$$

  para todo $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathscr{B}_t$ y donde $\mathbf{W}(t)$ es un tensor antisimétrico independiente de $\mathbf{x}$,
- el campo espacial $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}$ es antisimétrico en todo $(\mathbf{x},t) \in \mathscr{T}$.

La demostración de las proposiciones anteriores puede ser encontrada en [130, pág. 70].

Si el campo de velocidades no es rígido y para $\mathbf{x}$ suficientemente próximo de $\mathbf{y}$, tendremos que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{y},t) + \operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathbf{y},t)(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + o(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.70}$$

Designando con $\mathbf{L} = \operatorname{grad}\mathbf{v}(\mathbf{y},t)$ y recordando que siempre podemos descomponer cualquier tensor en una parte simétrica y una antisimétrica dadas por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}+\mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\mathbf{v} + \operatorname{grad}\mathbf{v}^T) = (\operatorname{grad}\mathbf{v})^s, \tag{3.71}$$

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}-\mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\mathbf{v} - \operatorname{grad}\mathbf{v}^T) = (\operatorname{grad}\mathbf{v})^a, \tag{3.72}$$

tenemos que

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}. \tag{3.73}$$

Luego, la expresión (3.70) puede ser reescrita como

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}(\mathbf{y},t) + \mathbf{W}(\mathbf{y},t)(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + \mathbf{D}(\mathbf{y},t)(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + o(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{3.74}$$

Por tanto, en la vecindad de un punto $\mathbf{y}$ y con un error del orden de $o(\mathbf{x}-\mathbf{y})$, el campo de velocidades $\mathbf{v}$ es la suma de un campo de velocidades rígido con un campo de la forma $\mathbf{D}(\mathbf{y},t)(\mathbf{x}-\mathbf{y})$. No resulta difícil mostrar que el tensor $\mathbf{D}$ (parte simétrica del tensor gradiente espacial del campo de velocidades) está asociado a la tasa de variación del cuadrado de la longitud de una fibra infinitesimal, en la configuración actual $\mathscr{B}_t$, a partir del punto $\mathbf{y}$ en el instante t. Por esta razón, el campo tensorial espacial $\mathbf{D}$ es conocido como *tasa de deformación*. Veamos esto. Tenemos primeramente

$$\dot{\overline{(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})}} = 2d\mathbf{x}\cdot\dot{\overline{(d\mathbf{x})}} = 2d\mathbf{x}\cdot(\dot{\mathbf{F}}d\mathbf{X})_e. \tag{3.75}$$

Por otra parte, usando la (3.61) tenemos que

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial \nabla \mathscr{X}}{\partial t}(\mathbf{X},t) = \nabla\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t}(\mathbf{X},t) = \nabla\dot{\mathbf{x}} = \nabla\mathbf{v}_m = (\operatorname{grad}\mathbf{v})_m\mathbf{F}, \tag{3.76}$$

o sea,

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L}_m\mathbf{F}, \tag{3.77}$$

que, substituida en la expresión (3.75), conduce a

$$\dot{\overline{(d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x})}} = 2d\mathbf{x}\cdot(\mathbf{L}_m\mathbf{F}d\mathbf{X})_e = 2d\mathbf{x}\cdot\mathbf{L}d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x}\cdot(\mathbf{D}+\mathbf{W})d\mathbf{x} = 2\mathbf{D}d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}, \tag{3.78}$$

como queríamos demostrar.

Otro movimiento que nos interesará posteriormente es el *movimiento isocórico*, o sea, el movimiento a volumen constante. Sea $\mathscr{X}$ el movimiento relativo a la configuración de referencia $\mathscr{B}$. Dada la parte $\mathscr{P}$ de $\mathscr{B}$ tenemos que

$$\mathscr{P}_t = \mathscr{X}(\mathscr{P},t), \tag{3.79}$$

será la región ocupada por la parte $\mathscr{P}$ del cuerpo en el instante t. Su volumen está dado por

$$\operatorname{vol}(\mathscr{P}_t) = \int_{\mathscr{P}_t} dV. \tag{3.80}$$

Del significado del $\det\mathbf{F} = \det\nabla\mathscr{X}$, podemos realizar este cálculo directamente en la configuración de referencia [5]

$$\operatorname{vol}(\mathscr{P}_t) = \int_{\mathscr{P}} \det\mathbf{F}\, dV. \tag{3.81}$$

Por definición, un movimiento se dice isocórico si, para toda parte $\mathscr{P}_t$ de $\mathscr{B}_t$ y todo t, permanece constante su volumen, o sea

[5] Ver [130, pág. 51]. Para una demostração rigurosa de la primeira de las equaciones (14) que aparece en la referencia anterior vea [59, pág. 247–254].

$$\dot{\overline{(\text{vol}\,\mathscr{P}_t)}} = 0, \tag{3.82}$$

para todo $\mathscr{P}_t$ de $\mathscr{B}_t$ y para todo t. Así

$$\dot{\overline{(\text{vol}\,\mathscr{P}_t)}} = \dot{\overline{\left(\int_{\mathscr{P}} \det\mathbf{F}\,dV\right)}} = \int_{\mathscr{P}} \dot{\overline{(\det\mathbf{F})}}\,dV. \tag{3.83}$$

Nos falta ahora saber cual es la derivada del determinante. De [130, pág. 23], y usando la (3.77), tenemos que

$$\dot{\overline{(\det\mathbf{F})}} = (\det\mathbf{F})\,\text{tr}(\dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}) = (\det\mathbf{F})\,\text{tr}\,\mathbf{L}_m = (\det\mathbf{F})(\text{tr}(\text{grad}\,\mathbf{v}))_m = (\det\mathbf{F})(\text{div}\,\mathbf{v})_m \tag{3.84}$$

luego,

$$\dot{\overline{(\text{vol}\,\mathscr{P}_t)}} = \int_{\mathscr{P}} (\text{div}\,\mathbf{v})_m \det\mathbf{F}\,dV = \int_{\mathscr{P}_t} \text{div}\,\mathbf{v}\,dV_t. \tag{3.85}$$

Como, para un movimiento isocórico, la expresión anterior debe ser nula para todo $\mathscr{P}_t$ se tiene localmente que

$$\text{div}\,\mathbf{v} = \text{tr}\,\mathbf{L} = \text{tr}\,\mathbf{D} = 0. \tag{3.86}$$

3.2.3 Acciones de Movimiento. Restricciones Cinemáticas

En las secciones anteriores fueron definidos conceptos relacionados a la cinemática de los cuerpos deformables. Vimos así que todas las configuraciones posibles que un cuerpo puede tomar en $\mathscr{E}$ pueden colocarse en correspondencia biunívoca con los campos de desplazamientos asociados a una cierta configuración de referencia $\mathscr{B}$.

En otras palabras, dada la configuración $\mathscr{B}_t$ y $t \in [t_o, t_f]$, la misma puede obtenerse a partir del campo $\mathbf{U}_t$ definido en $\mathscr{B}$. Por lo tanto, será equivalente hablar de la configuración $\mathscr{B}_t$ o de la configuración asociada a $\mathbf{U}_t$, siempre y cuando resulte conocida la configuración de referencia $\mathscr{B}$. También será equivalente hablar de la descripción espacial del campo $\mathbf{U}_t$, que llamamos $\mathbf{u}_t$, y que está definido en $\mathscr{B}_t$.

El conjunto de todas las *configuraciones posibles* que nuestro cuerpo puede tomar, constituye el espacio vectorial $\mathscr{U}$. A este espacio le endosaremos la topología más adecuada al problema mecánico que se esté analizando. En este sentido es importante notar que, en esta primera parte de nuestro trabajo, el tratamiento será fundamentalmente algebraico, recurriendo así a un tratamiento más geométrico que nos permitirá colocar con claridad los fundamentos mecánicos sin oscurecer la presentación con aspectos excesivamente técnicos.

Consideremos el cuerpo en una configuración $\mathbf{u}_t \in \mathscr{U}$. Luego, un movimiento arbitrario a partir de la configuración $\mathbf{u}_t$ será caracterizado por una familia uni-

paramétrica de configuraciones posibles $\mathbf{u}_t(\mathbf{x},\tau),\ \tau\in[t,t_f]$, tal que $\mathbf{u}_t(\mathbf{x},\tau)$ en $\tau=t$ sea coincidente con la configuración $\mathbf{u}_t$.

A cada movimiento a partir de $\mathbf{u}_t$ le corresponderá, en el instante $\tau=t$, un campo de velocidades $\mathbf{v}$ (descripción espacial) que será llamado *acto* o *acción de movimiento* a partir de $\mathbf{u}_t$. Esta acción de movimiento será dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t)=\frac{\partial \mathbf{U}_t}{\partial\tau}(\mathbf{X},\tau)\bigg|_{\substack{\tau=t\\ \mathbf{X}=\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x},t)}}. \tag{3.87}$$

El conjunto de *todas* las acciones de movimiento *posibles* a partir de la configuración $\mathbf{u}_t\in\mathscr{U}$ nos define el espacio vectorial $\mathscr{V}$ constituido por todos los campos de velocidades que podemos imprimir al cuerpo en $\mathbf{u}_t$. Como es fácil notar, el campo de velocidad real del cuerpo en el instante t es un elemento de $\mathscr{V}$, los demás son campos *virtuales* de velocidades.

De manera general, el movimiento de un cuerpo deberá satisfacer ciertas restricciones cinemáticas (ver Figura 3.2). Las configuraciones posibles que satisfacen estas restricciones son llamadas *configuraciones admisibles*. El subconjunto de $\mathscr{U}$ formado por *todas* las configuraciones admisibles será designado por

$$\mathrm{Kin}_u=\{\mathbf{u}\in\mathscr{U},\ \mathbf{u}\text{ es una configuración cinemáticamente admisible}\}. \tag{3.88}$$

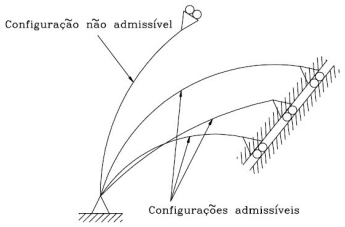


Fig. 3.2 Configuraciones admisibles dada una restricción cinemática impuesta sobre el cuerpo.

Todo movimiento a partir de la configuración admisible $\mathbf{u}_t\in\mathrm{Kin}_u$, es decir, toda familia uniparamétrica $\mathbf{u}_t(\mathbf{x},\tau),\ \tau\in[t,t_f]$ tal que para todo $\tau\in[t,t_f]$ resulte $\mathbf{u}_t(\mathbf{x},\tau)\in\mathrm{Kin}_u$, será llamado *movimiento admisible*. En otras palabras, un movimiento a partir de una configuración admisible será admisible si cada una de las configuraciones de ese movimiento es también admisible.

A cada movimiento admisible a partir de $\mathbf{u}_t\in\mathrm{Kin}_u$ le corresponderá una acción de movimiento $\mathbf{v}\in\mathscr{V}$ llamada *acción de movimiento cinemáticamente admisible* y el conjunto de todas las acciones de movimiento cinemáticamente admisibles constituye el subconjunto $\mathrm{Kin}_v\subset\mathscr{V}$

$$\mathrm{Kin}_v=\{\mathbf{v}\in\mathscr{V},\ \mathbf{v}\text{ cinemáticamente admisible}\}. \tag{3.89}$$

De la propia definición de Kin_v, vemos que el mismo **depende** de la configuración $\mathbf{u}_t$. En otras palabras, dadas dos configuraciones admisibles y diferentes, los conjuntos Kin_v a ellas asociadas no son necesariamente iguales.

En particular, diremos que $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ es una configuración con restricciones cinemáticas si $\mathrm{Kin}_v \subseteq \mathscr{V}$, es decir, Kin_v es un subconjunto propio de $\mathscr{V}$ (Kin_v no es el propio $\mathscr{V}$). Así, en la Figura 3.2, dada una configuración admisible, las acciones de movimiento admisibles deben ser tales que en el apoyo fijo la velocidad es nula y en el móvil debe ser paralela al plano inclinado. En este ejemplo, toda configuración admisible es una configuración con restricciones cinemáticas.

La observación de la naturaleza nos muestra la existencia de diferentes tipos de restricciones cinemáticas. En este trabajo nos limitaremos solamente a los siguientes tipos

- sin restricciones,
- con restricciones *bilaterales* sin fricción (ver Figura 3.3),
- restricciones *unilaterales* sin fricción y sin adherencia (ver Figura 3.4).

En el caso de que el cuerpo no esté sujeto a ningún tipo de restricción cinemática, diremos que el cuerpo está **libre**, verificándose que

$$\mathrm{Kin}_v = \mathscr{V}. \tag{3.90}$$

Las restricciones bilaterales sin fricción son aquellas en que si la acción de movimiento está impedida en una dirección, también estará impedida en la dirección opuesta, de allí el nombre *bilateral* (ver Figura 3.3). A su vez en las direcciones permitidas, el movimiento se realiza sin tener que vencer ningún tipo de resistencia (más adelante formalizaremos este concepto). Para este tipo de restricciones resulta fácil verificar que $\mathrm{Kin}_v = \bar{\mathbf{v}} + \mathrm{Var}_v$ donde

- $\bar{\mathbf{v}} \in \mathrm{Kin}_v$, es una acción de movimiento **arbitraria** que satisface las restricciones cinemáticas prescriptas.
- $\mathrm{Var}_v = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} \in \mathscr{V}, \mathbf{v} = 0$ en aquellos puntos donde están prescriptas las acciones de movimiento$\}$

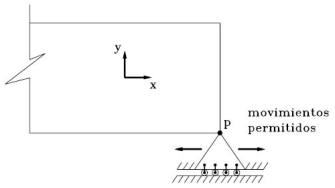


Fig. 3.3 Restricciones bilaterales. El movimiento lateral es permitido en ambas direcciones, mientras que el movimiento vertical está impedido en ambas direcciones.

La definición anterior nos muestra que si $\mathbf{v} \in \mathrm{Var}_v$, también se verifica que $\alpha\mathbf{v} \in \mathrm{Var}_v$. Vemos así que Var_v es un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$ y Kin_v será por

lo tanto una *translación* de este subespacio vectorial (ver Apéndice A.11). Se puede observar también que si las restricciones (bilaterales) son de tipo homogéneas, siempre podremos tomar $\bar{\mathbf{v}} = 0$ resultando $\mathrm{Kin}_v = \mathrm{Var}_v$. En el caso general, para restricciones bilaterales no homogéneas, tendremos

$$\mathrm{Var}_v = \mathrm{Kin}_v - \bar{\mathbf{v}}. \tag{3.91}$$

Es decir, toda acción de movimiento perteneciente a Var_v, puede ser descripta como la diferencia entre acciones de movimiento cinemáticamente admisibles independientemente de ser homogéneas o no homogéneas. En la literatura, las acciones de movimiento $\mathbf{v} \in \mathrm{Var}_v$ son llamadas *acciones de movimiento virtuales cinemáticamente admisibles*.

En el caso de restricciones unilaterales sin fricción y sin adherencia (ver Figura 3.4), las mismas se caracterizan por el hecho de que si la acción de movimiento está impedida en una dirección **no lo está** en la dirección opuesta. En las direcciones permitidas, el movimiento se realiza sin tener que vencer ningún tipo de resistencia [6]. Para este tipo de restricción podemos verificar nuevamente que $\mathrm{Kin}_v = \bar{\mathbf{v}} + \mathrm{Var}_v$ donde ahora Kin_v es la translación en $\bar{\mathbf{v}}$ del cono convexo de vértice en el origen Var_v (ver Apéndice A.12). Debemos notar la **no linealidad** inducida por este tipo de restricción. En efecto, dependiendo de la configuración $\mathbf{u}_t$ en que se encuentre el cuerpo, una dada restricción unilateral puede o no estar activa para esta configuración [7]. Para el ejemplo de la Figura 3.4 el conjunto Var_v está dado por

$$\mathrm{Var}_v = \{\mathbf{v} \in V; (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y)(P) \geq 0\}, \tag{3.92}$$

donde $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y)(P)$ representa la componente según el eje y del campo de velocidades $\mathbf{v}$ calculada en el punto P. En este ejemplo simple podemos observar la característica del conjunto Var_v. En efecto, si $\mathbf{v} \in Var_v$ entonces $\lambda\mathbf{v}$, con $\lambda \in R^+$, también pertenece a Var_v. Finalmente, no resulta difícil mostrar que (3.91) también se verifica para este tipo de restricción. Lo anterior también nos muestra que la restricción unilateral es una restricción más **general** que la de tipo bilateral, incluyendo a este último tipo como caso particular.

Resumiendo, cualquiera que sea el tipo de restricción cinemática a la cual un cuerpo está restringido, siempre se verifica $\mathrm{Kin}_v = \bar{\mathbf{v}} + \mathrm{Var}_v$, donde $\bar{\mathbf{v}} \in \mathrm{Kin}_v$ es una acción de movimiento arbitraria compatible con las restricciones cinemáticas. A su vez, dependiendo del tipo de restricción cinemática, Var_v puede ser un subespacio

[6] Más adelante, cuando abordemos los problemas unilaterales con o sin fricción, estas limitaciones serán eliminadas.

[7] Aquí es importante detenernos para algunos comentarios. En la mayoría de los cursos de grado (y también de postgrado), la mecánica es analizada considerando exclusivamente restricciones del tipo bilateral. Ese es el tipo de vínculo que nuestros estudiantes ven en estos cursos. Nada se informa sobre los de tipo unilateral. De esta manera, se podría creer que se trata de una restricción poco frecuente. Todo lo contrario, este tipo de restricción ocurre en casi todo componente mecánico. Ejemplos típicos son las uniones entre componentes, soportes de tubulaciones y/o componentes, problemas de estampado, conformación, etc. El desconocimiento total de este tipo de restricción conduce al estudiante a querer extender, para el caso de restricciones unilaterales, los modelos mecánicos válidos para apoyos bilaterales con los consecuentes errores.

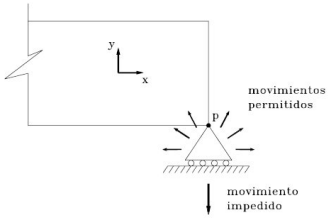


Fig. 3.4 Restricciones unilaterales. El movimiento está impedido únicamente en una de las direcciones verticales.

vectorial de $\mathscr{V}$ (caso de restricciones bilaterales), o un cono convexo de vértice en el origen (caso de restricciones unilaterales).

Continuando con nuestro análisis, vimos que a partir del conocimiento del campo de velocidades $\mathbf{v}$ podemos definir el campo de tasas de deformación como en (3.71). Podemos así introducir el espacio vectorial $\mathscr{W}$, cuyos elementos son todos los campos tensoriales simétricos definidos en la configuración actual. De la propia definición, vemos que no todo $\mathbf{D} \in \mathscr{W}$ está asociado a algún campo de acción de movimiento $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$. En efecto, dado $\mathbf{D}$ tiene que existir $\mathbf{v}$ tal que

$$\mathbf{D} = (\text{grad}\mathbf{v})^s = \mathscr{D}\mathbf{v}, \tag{3.93}$$

donde introducimos el operador $\mathscr{D}$ para simplificar la notación[8]. En particular, si dado $\mathbf{D} \in \mathscr{W}$ existe $\mathbf{v} \in \text{Kin}_v$ tal que lo anterior se verifique, diremos que $\mathbf{D}$ es una tasa de deformación *compatible* cinemáticamente admisible. A su vez, el conjunto de todas las acciones de movimiento posibles rígidas $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ constituye el subespacio vectorial $\mathscr{N}(\mathscr{D})$ de $\mathscr{V}$ llamado *espacio nulo* del operador tasa de deformación

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V},\ \mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{O}\ \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t\}. \tag{3.94}$$

[8] En realidad también para resaltar al lector los aspectos importantes: primero definimos nuestras variables *primales* que entendemos *gobiernan* un dado problema, luego definimos como *aproximar* esos campos alrededor de um dado punto via un dado operador lineal $\mathscr{D}$.

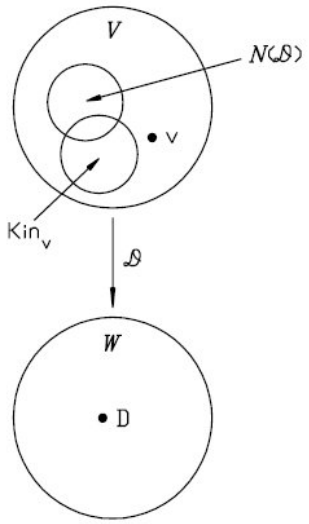


Fig. 3.5 Espacios vectoriales y demás elementos introducidos por el modelo cinemático adoptado.

Resumiendo, el estudio de la cinemática de los cuerpos deformables a partir de su configuración actual $\mathscr{B}_t$, nos ha permitido introducir los siguientes elementos (ver Figura 3.5)

- el espacio vectorial $\mathscr{V}$ de acciones de movimiento posibles,
- el operador (lineal) tasa de deformación $\mathscr{D}(\cdot) = (\text{grad}(\cdot))^s$,
- el espacio vectorial $\mathscr{W}$ de las tasas de deformación,
- el subespacio vectorial $\mathscr{N}(\mathscr{D})$ de acciones de movimiento rígidas,
- el subconjunto Kin_v de $\mathscr{V}$ de acciones de movimiento cinemáticamente admisibles, o sea, compatibles con los vínculos y que, como ya vimos, dependiendo del tipo de vínculo, podrá ser el propio espacio $\mathscr{V}$ (cuerpo libre de restricciones cinemáticas), la translación del subespacio vectorial Var_v (cuerpo con restricciones de tipo bilateral), o la translación del cono convexo de vértice en el origen, que también designamos por Var_v (cuerpo con restricciones de tipo unilateral).

3.3 Dualidad entre Fuerzas y Acciones de Movimiento.

Otro concepto de vital importancia en Mecánica es el de "acción" que un cuerpo realiza sobre otro $\mathscr{B}$ en su configuración $\mathscr{B}_t$. La forma "clásica" de caracterizar esta acción es a través de un vector o campo vectorial "fuerza" que surge así, como un ente *a priori* totalmente independiente de la cinemática adoptada para modelar el problema.

No obstante el éxito alcanzado por esta esquematización, que nos haría pensar ser la única manera de definir este concepto de fuerza, nosotros adoptaremos una segunda esquematización, aparentemente más abstracta que la primera pero que viene a traducir la experiencia concreta con que nos enfrentamos día a día. Dentro de este concepto, la acción (que denominaremos *fuerza*) que un sistema ejerce sobre otro no surge como un concepto *a priori* y sí como un elemento en *dualidad* a una determinada acción de movimiento, siendo esta dualidad definida a través del concepto *a priori* de *potencia* o *trabajo virtual*.

Contrariamente a lo podríamos pensar, esta segunda esquematización es tan antigua como la propia Mecánica. A su vez, podemos ver que a partir de los primeros pasos tendientes a dar a la Mecánica una estructura matemática precisa, el concepto de *potencia* surgió como algo básico y fundamental. En este sentido debemos destacar los trabajos pioneros de J. Bernoulli (1717), definitivamente consagrados por D'Alembert (1743). Por otra parte, esta segunda forma de definir las fuerzas que actúan sobre un cuerpo es más natural que la primera, ya que viene a expresar una experiencia física muy común. En efecto, si queremos conocer el peso de un objeto qualquiera, por ejemplo una valija que se encuentra apoyada en el piso, lo que hacemos es levantarla ligeramente y evaluamos este peso por la potencia (o trabajo) que fue necesario realizar para ejecutar esta acción de movimiento. En otras palabras, lo que hemos hecho fue introducir una acción de movimiento *virtual* que apartó la valija de su configuración actual (en nuestro ejemplo la configuración de reposo sobre el piso) en que ella se encontraba.

De manera similar, si queremos conocer si la correa del ventilador de nuestro automóvil está adecuadamente tensionada, con nuestros dedos tratamos de desplazarla de su configuración actual. Se esta acción de movimiento es rígida, no podremos establecer esta tensión, mas si nuestra acción de movimiento provoca una deformación en la correa, la medida de la potencia puesta en juego en este proceso nos dirá el *valor* de la tensión en la correa.

Concluímos así que la introducción de acciones de movimiento para evaluar las fuerzas externas e internas que actúan sobre un cuerpo en una configuración dada asume un significado físico incontestable. Más aun, podemos afirmar que es algo inherente a la persona humana. En efecto, si preguntamos a un niño cual de dos pequeños objetos es el más pesado, él realizará de manera totalmente intuitiva acciones de movimiento sobre esos objetos y nos responderá con precisión cual de ellos es el más pesado.

Para formalizar la idea anterior, consideremos el cuerpo en una configuración $\mathscr{B}_t$ libre de restrições. Luego se verifica que $\mathrm{Kin}_u \equiv \mathscr{U}$ y que el conjunto de todas las acciones de movimiento cinemáticamente admisibles Kin_v es tal que $\mathrm{Kin}_v \equiv \mathscr{V}$, donde $\mathscr{V}$ es el espacio vectorial (real) de todas las acciones de movimiento posibles. El sistema de *fuerzas externas* f que en el instante t actúa sobre el cuerpo $\mathscr{B}$ está caracterizado por un funcional lineal y continuo en $\mathscr{V}$[9], cuyo valor en $\mathbb{R}$, para cada $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$, es la potencia virtual del sistema de fuerzas f para esta acción de movimiento

[9] Si $\mathscr{V}$ no es de dimensión finita, para la continuidad del funcional lineal tendremos que escoger una topologia adecuada para $\mathscr{V}$, e intimamente relacionada con el problema mecánico que se está analizando. Con el objetivo de mantener la presentación de este capítulo lo más simple posible, esta

$\mathbf{v}$, la cual se expresa como $P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle = f(\mathbf{v})$. El conjunto de todos los sistemas de fuerzas f, es decir, el conjunto de todos los funcionales lineales y continuos de $\mathscr{V}$, define el espacio vectorial $\mathscr{V}'$ llamado *espacio de fuerzas externas*[10].

Vemos así que en nuestra presentación dos aspectos surgen como fundamentales

- Dado un problema mecánico, lo primero que debemos definir es el espacio de acciones de movimiento $\mathscr{V}$ y su correspondiente concepto de acciones rígidas.
- El segundo concepto fundamental es el de *dualidad* entre el espacio $\mathscr{V}$ y el espacio de fuerzas $\mathscr{V}'$. En otras palabras, dado el modelo cinemático, el sistema de fuerzas que son compatibles con este modelo quedará totalmente definido por dualidad a través de la forma bilineal

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{V}' \times \mathscr{V} &\to \mathbb{R}, \\ (f, \mathbf{v}) &\mapsto P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle. \end{aligned} \tag{3.95}$$

  Lo anterior también nos muestra que, cuanto más rico sea nuestro espacio $\mathscr{V}$, es decir, cuanto más amplia sea nuestra definición de acción de movimiento, más refinada será nuestra definición de fuerzas (ver [114], [115] [116], y Apéndice B).

  En los ejemplos siguientes vamos a ver la universalidad de estos conceptos.

Ejemplo 3.1 *Sea nuestro cuerpo dado por una única partícula P libre en $\mathscr{E}$. Luego $\mathrm{Kin}_v = \mathscr{V} \equiv V$, donde V es el espacio vectorial tridimensional asociado al espacio euclidiano puntual $\mathscr{E}$. Una forma lineal sobre V puede representarse como un producto escalar de vectores*

$$P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \quad \mathbf{F} \in V', \mathbf{v} \in V, \tag{3.96}$$

donde $V = \mathbb{R}^3$ y por lo tanto $V' = \mathbb{R}^3$. De lo anterior, vemos que las fuerzas que pueden actuar sobre la partícula P, compatibles con la cinemática adoptada, están representadas por un vector actuando en P de dirección e intensidad dada por $\mathbf{F}$. Vemos así que la dualidad nos proporciona la idea clásica de fuerza.

Ejemplo 3.2 *Consideremos el caso de un cuerpo rígido que también supondremos que en la configuración t se encuentra libre de todo vínculo que impida su movimiento (el cuerpo rígido está libre). Como el cuerpo es rígido y está libre, las únicas acciones de movimiento admisibles serán aquellas que garantan que el cuerpo permanezca rígido. Luego, las acciones de movimiento para el instante de tiempo t sólo podrán ser acciones rígidas, esto es, serán campos de velocidades rígidas. De esta manera, un elemento arbitrario de V está dado por*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{W}(\mathbf{x} - O) = \mathbf{v}_O + \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - O), \tag{3.97}$$

última propiedad será ignorada ya que la misma sólo es necesária en algunos puntos puramente técnicos. Para más detalles sobre este tema ver [213] y ver Apéndice A.14 y A.16.

[10] Este espacio es conocido en la matemática como *espacio dual* de $\mathscr{V}$. Para más detalles ver Apéndice A.16.

donde $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *es la velocidad del punto* $\mathbf{x} \in \mathscr{B}_t$, $\mathbf{v}_O$ *es la velocidad del punto* O, $O \in \mathscr{B}_t$ *arbitrario,* $\mathbf{W}$ *es un tensor antisimétrico constante y* $\mathbf{w}$ *su vector axil, representando la rotación instantánea alrededor del eje definido por* $\mathbf{w}$ *que pasa por el punto* O. *De las consideraciones anteriores se sigue que el espacio* $\mathscr{V}$ *de acciones de movimiento posibles (y admisibles por el cuerpo estar libre), es un espacio vectorial de dimensión 6, tres asociadas a* $\mathbf{v}_O$ *y tres asociadas a* $\mathbf{w}$, *es decir*

$$\mathscr{V} = V \times V. \tag{3.98}$$

Nuevamente, las formas lineales sobre este espacio de dimensión finita pueden representarse a través del producto escalar, definiendo así los vectores $\mathbf{F}_O$ *y* $\mathbf{m}_O \in V' \times V'$ *que representan, respectivamente, la resultante del sistema de fuerzas actuando sobre* $\mathscr{B}_t$ *y el momento de este sistema respecto al punto* O. *En efecto*

$$\begin{aligned} P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle &= \langle f, \mathbf{v}_O + \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - O) \rangle = \langle f, \mathbf{v}_O \rangle + \langle f, \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - O) \rangle \\ &= \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - O) = \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{v}_O + (\mathbf{x} - O) \times \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{w} \\ &= \mathbf{F}_O \cdot \mathbf{v}_O + \mathbf{m}_O \cdot \mathbf{w}. \end{aligned} \tag{3.99}$$

Por otra parte, como la representación del campo de velocidades rígidas es independiente del punto O, *podemos tomar otro punto de* $\mathscr{B}_t$ *como punto para la descripción de los moviminetos. Sea* P *este nuevo punto, luego*

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_P + \mathbf{W}(\mathbf{x} - P) = \mathbf{v}_P + \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - P), \tag{3.100}$$

donde

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_O + \mathbf{w} \times (P - O), \tag{3.101}$$

y la potencia será dada por

$$P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{F}_P \cdot \mathbf{v}_P + \mathbf{m}_P \cdot \mathbf{w}. \tag{3.102}$$

Restando miembro a miembro (3.99) *y* (3.102), *tenemos*

$$0 = (\mathbf{F}_O - \mathbf{F}_P) \cdot \mathbf{v}_O + \{\mathbf{m}_O - [\mathbf{m}_P + (P - O) \times \mathbf{F}_P]\} \cdot \mathbf{w}, \tag{3.103}$$

y como $\mathbf{v}_O$ *y* $\mathbf{w}$ *son arbitrarios, concluimos que*

$$\mathbf{F}_O = \mathbf{F}_P = \mathbf{F}, \tag{3.104}$$

$$\mathbf{m}_O = \mathbf{m}_P + (P - O) \times \mathbf{F}. \tag{3.105}$$

Con lo que recuperamos los resultados clásicos de la mecánica de los cuerpos rígidos. Los esfuerzos f *están caracterizados por un vector* $\mathbf{F}$ *llamado resultante de las fuerzas y por un vector* $\mathbf{m}_O$ *llamado resultante de los momentos. Como podemos apreciar,* $\mathbf{F}$ *es independiente del punto de reducción* O *elegido para la descripción de las acciones de movimiento mientras que* $\mathbf{m}_O$ *depende del punto de reducción.*

3.4 Dualidad entre Esfuerzos Internos y Tasas de Deformación

Otro concepto introducido en Mecánica del Continuo es el de *esfuerzo interno*. Para definirlo, recurrimos al ejemplo de la correa del ventilador. Allí vimos que era necesario introducir una acción de movimiento y esta acción de movimiento debía implicar en una deformación no rígida, para poder evaluar la "tensión de la correa".

Lo anterior nos lleva a adoptar las siguientes **hipótesis**:

- Los esfuerzos internos están dados por un funcional lineal y continuo sobre las acciones de movimiento y su gradiente. El valor $p_i(\mathbf{v}, \operatorname{grad}\mathbf{v})$ que este funcional toma para cada par ($\mathbf{v}$, $\operatorname{grad}\mathbf{v}$) es llamado *potencia virtual interna*. Por definición, $p_i(\mathbf{v}, \operatorname{grad}\mathbf{v})$ es un campo escalar definido en la configuración actual $\mathscr{B}_t$. La integral sobre el volumen de $\mathscr{B}_t$ de este campo, recibe el nombre *potencia interna total* que designaremos de manera compacta por P_i.
- La potencia P_i puede expresarse a través de

$$P_i = \int_{\mathscr{B}_t} p_i \, dV = -\int_{\mathscr{B}_t} (\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{T}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{v})\, dV, \tag{3.106}$$

  donde el signo negativo resultará evidente más adelante.
- A su vez, de la observación de que toda acción rígida no nos permite evaluar el esfuerzo interno, tendremos que

$$P_i = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}). \tag{3.107}$$

Vamos a analizar la expresión (3.106) para distintos campos $\mathbf{v}$.

i) Sea $\mathbf{v}$ una translación, luego $\mathbf{v} = \mathbf{c}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t$ ($\mathbf{c}$ un vector constante en $\mathbb{R}^3$), y tenemos que $\operatorname{grad}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ implica $\mathbf{D} = \mathbf{W} = \mathbf{O}$; luego

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, dV = 0, \tag{3.108}$$

para toda translación $\mathbf{v}$, que por su vez conduce a

$$\left(\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{f}\, dV\right)\cdot\mathbf{c} = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \tag{3.109}$$

con lo que tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{f}\, dV = \mathbf{0}. \tag{3.110}$$

Como esta expresión debe valer para toda parte $\mathscr{P}_t$ del cuerpo $\mathscr{B}_t$, entonces llegamos a que

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t. \tag{3.111}$$

ii) Sea $\mathbf{v}$ una acción rígida, luego $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{W}(\mathbf{x} - O)$ donde $\mathbf{v}_O$ es un vector constante y $\mathbf{W}$ un tensor antisimétrico constante. Tenemos así que

$$\operatorname{grad}\mathbf{v} = \mathbf{W} \tag{3.112}$$

a partir de esto y de la (3.111) obtenemos

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T}\cdot\mathbf{W}\,dV = 0, \tag{3.113}$$

para todo $\mathbf{W}$ antisimétrico y constante. Esto nos permite concluir que

$$\left(\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T}\,dV\right) \in Sym, \tag{3.114}$$

y como vale para toda parte $\mathscr{P}_t$ de $\mathscr{B}_t$ tenemos

$$\mathbf{T} \in Sym \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t. \tag{3.115}$$

Los resultados anteriores nos conducen finalmente a

$$P_i = \int_{\mathscr{B}_t} p_i\,dV = -\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}\,dV = -(\mathbf{T},\mathbf{D}), \tag{3.116}$$

es decir, el *esfuerzo interno* está caracterizado por un funcional lineal y continuo sobre el espacio de acciones de deformación $\mathscr{W}$. El conjunto de todos estes funcionales lineales constituye el espacio de esfuerzos internos $\mathscr{W}'$, dual de $\mathscr{W}$ y cuyos elementos están representados por campos tensoriais simétricos $\mathbf{T}$ llamados *campos de tensión de Cauchy*.

Como consecuencia de nuestras hipótesis, podemos ver que P_i resulta inalterado toda vez que a la acción de movimiento $\mathbf{v}$ se le superponga una acción rígida. Lo anterior nos dice que P_i es **objetivo** y de la objetividad del campo $\mathbf{D}$ se sigue que el esfuerzo interno $\mathbf{T}$ también debe ser objetivo.

Resumiendo, para establecer un determinado modelo mecánico procedemos según el esquema siguiente

1. Consideramos nuestro cuerpo $\mathscr{B}$ ocupando en el instante t la configuración **actual** $\mathscr{B}_t$ (o $\mathbf{u}_t$) de $\mathscr{E}$. Por simplicidad, supondremos también que la región $\mathscr{B}_t$ es conexa, abierta y limitada por la frontera regular $\partial\mathscr{B}_t$ [11].
2. Para esta configuración $\mathscr{B}_t$, definimos el espacio vectorial $\mathscr{V}$ cuyos elementos hemos designado por acciones de movimiento. Para su construcción será necesario llevar en consideración las hipótesis cinemáticas del modelo.[12].
3. Definido $\mathscr{V}$, construimos el espacio de tasas de deformación $\mathscr{W}$.

[11] Por regular queremos decir que se trata de un contorno de Lipschitz (ver [244, pág. 323]).

[12] Por ejemplo, si estamos trabajando con cuerpos rígidos, $\mathscr{V}$ estará formado por campos $\mathbf{v}$ que satisfacen las restricciones de rigidez; si se trata de un problema de flexión de vigas y empleamos el modelo clásico de vigas (modelo de Bernoulli): los campos $\mathbf{v}$ deben ser tales que las secciones transversales al eje de la viga permanezcan planas y normales al eje; si se trata de un problema de torsión, los campos deben ser tales que aseguren que las secciones roten rígidamente alrededor del eje de la pieza; si estamos con un problema de flexión de cáscaras y estamos adoptando las hipótesis de Kirchhoff-Love: los campos deben ser tales que garanticen que la normal a la superficie media permanezca normal durante la acción de movimiento; si estamos trabajando con cuerpos incompresibles los campos deben asegurar esta condición. Por supuesto, admitiremos para los elementos $\mathbf{v}$ de $\mathscr{V}$ la regularidad (topologia en $\mathscr{V}$) necesaria como para garantizar que las operaciones

4. A través del operador tasa de deformación $\mathscr{D}$, que para el caso de la mecánica clásica de cuerpos tridimensonales está dado $(\text{grad}(\cdot))^s$, definimos las acciones rígidas, es decir, el espacio $\mathscr{N}(\mathscr{D})$.
5. Conocidas las restricciones cinemáticas al movimiento establecemos también Kin_v y Var_v.
6. Con estos elementos y definiciones, introducimos las siguientes hipótesis:

   - El esfuerzo externo f que actúa sobre el cuerpo en la configuración $\mathscr{B}_t$ es un funcional lineal y continuo sobre $\mathscr{V}$, esto es, $f \in \mathscr{V}'$, siendo $\mathscr{V}'$ el espacio dual de $\mathscr{V}$, y su valor en $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ es la potencia externa virtual

   $$P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle, \tag{3.117}$$

   donde $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{V}' \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, por ahora no especificada, que pone en dualidad los espacios $\mathscr{V}'$ y $\mathscr{V}$.
   - El esfuerzo interno $\mathbf{T}$ es también un funcional lineal y continuo sobre $\mathscr{W}$, es decir, $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$, siendo $\mathscr{W}'$ el espacio dual de $\mathscr{W}$, y su valor en $\mathbf{D} \in \mathscr{W}$ es la potencia interna virtual

   $$P_i = \int_{\mathscr{B}_t} p_i \, dV = -\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \, dV = -(\mathbf{T}, \mathbf{D}). \tag{3.118}$$

   Observamos que aquí **adoptamos/especificamos** una expresión para el producto de dualidade, $(\mathbf{T}, \mathbf{D})$, dado, en este caso, por una densidad p_i (potencia por unidad de volumen).
   - $P_i = 0$ para toda acción de movimiento rígida.

   Las expresiones (3.117) y (3.118) surgen como consecuencia de la continuidad admitida en el modelo. Matemáticamente, son consecuencias del teorema de representación de Riesz (ver [244, pág. 111]) que nos dice que todo funcional lineal y limitado pode ser expresado a través de un produto interno.

Es importante resaltar que, a partir de la expresión de la Potencia Interna Total P_i y del Principio de las Potencias Virtuales, que veremos en la sección siguiente, será posible establecer una representación para f, y por lo tanto para el producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Esto será analisado para el caso de cuerpos tridimensionales en las secciones siguientes mientras que, la aplicación de estos conceptos para los problemas de torsión, estados planos, placas, cáscaras y conducción de calor será visto en capítulos específicos. Los conceptos anteriores están representados gráficamente en la Figura 3.6.

Los espacios $\mathscr{V}'$ y $\mathscr{W}'$ son los espacio duales (topológicos) de $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ y las formas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $(\cdot, \cdot)$ representan los pares en dualidad en $\mathscr{V}' \times \mathscr{V}$ y $\mathscr{W}' \times \mathscr{W}$, respectivamente. Luego, podemos definir un nuevo operador $\mathscr{D}^* : \mathscr{W}' \to \mathscr{V}'$, llamado operador *adjunto* por algunos autores (ver [162], [19] y [172]), u operador *transpuesto* por otros (ver por ejemplo [213] y [223]). Nosotros lo llamaremos indistintamente

---

que realizaremos más adelante estén correctas. En los capítulos siguientes estas consideraciones serán analizadas con más detalle.

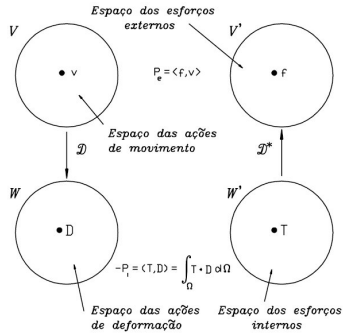


Fig. 3.6 Formulación Variacional: principales elementos.

de operador adjunto u **operador de equilibrio** ya que este será, como veremos más adelante, su significado mecánico. Este nuevo operador queda definido de la siguiente manera

$$(\mathbf{T}, \mathscr{D}\mathbf{v}) = \langle \mathscr{D}^* \mathbf{T}, \mathbf{v} \rangle \quad \mathbf{v} \in \mathscr{V}. \tag{3.119}$$

Haciendo uso de este operador, conjuntamente con el Princípio de las Potencias Virtuales, será posible hallar una caracterización para los esfuerzos externos **compatibles** con el modelo mecánico que se esté elaborando. En particular en las secciones siguientes mostraremos esto para el caso de cuerpos tridimensionales.

Ejercicio 3.1. Para cada uno de los siguientes casos encuentre el operador de equilibrio $\mathscr{D}^*$

(i) v campo escalar suficientemente regular, $\mathscr{D}(\cdot) = \frac{d(\cdot)}{dx}$, t campo escalar

$$P_i = -\left(t, \frac{dv}{dx}\right) = -\int_0^L t \frac{dv}{dx}\, dx. \tag{3.120}$$

(ii) v campo escalar suficientemente regular, $\mathscr{D}(\cdot) = \frac{d^2(\cdot)}{dx^2}$, p campo escalar

$$P_i = -\left(p, \frac{d^2v}{dx^2}\right) = -\int_0^L p \frac{d^2v}{dx^2}\, dx. \tag{3.121}$$

(iii) $\mathbf{v}$ campo vectorial suficientemente regular, $\mathscr{D}(\cdot) = (\mathrm{grad}(\cdot))^s$, $\mathbf{T}$ campo tensorial de orden 2

$$P_i = -(\mathbf{T}, \mathrm{grad}\,\mathbf{v}) = -\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\mathrm{grad}\,\mathbf{v})^s\, dV. \tag{3.122}$$

(iv) $\mathbf{v}$ campo vectorial suficientemente regular, $\mathscr{D}(\cdot) = \mathrm{grad}(\mathrm{grad}(\cdot))$, $\mathbf{M}$ campo tensorial de orden 3

$$P_i = -(\mathbf{M}, \mathrm{grad}(\mathrm{grad}\,\mathbf{v})) = -\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{M} \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{grad}\,\mathbf{v})\, dV. \tag{3.123}$$

(v) **v** campo vectorial suficientemente regular, $\mathscr{D}(\cdot) = \text{rot}(\cdot)$, **s** campo vectorial

$$P_i = (\mathbf{s}, \text{rot}\,\mathbf{v}) = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{s} \cdot \text{rot}\,\mathbf{v}\, dV. \tag{3.124}$$

3.5 Cuerpos Libres

El otro principio sobre el cual vamos a construir toda nuestra mecánica es el Principio de las Potencias Virtuales (de aquí en adelante referido por PPV). Este principio establece las restricciones bajo las cuales existe *equilibrio* global y sus consecuencias desde el punto de vista puntual o local. También, a partir de él, podremos determinar una representación para f, es decir, establecer cuales son las cargas externas compatibles con el modelo.

Vamos a presentar este principio siguiendo un orden creciente de complejidad. Así, primero analizaremos el caso de cuerpos libres, luego el de cuerpos con restricciones bilaterales y, por último, el caso de cuerpos con restricciones unilaterales.

Supongamos, entonces, que en el instante t nuestro cuerpo $\mathscr{B}$ se encuentra en la configuración $\mathscr{B}_t$ libre de restricciones. En este caso, $\text{Kin}_u = \mathscr{U}$ y $\text{Kin}_v = \mathscr{V}$, es decir, el espacio vectorial de todas las configuraciones posibles coincide con el de las admisibles y el espacio vectorial de todas las acciones de movimiento posibles coincide con el de las admisibles. Como podemos apreciar, estas acciones las realizamos sobre $\mathbf{u}_t$ [13] y tienden a apartar el cuerpo del estado natural en que se encuentra. Lo importante es que son acciones que el movimiento real no necesariamente experimenta en t. Es por esto último que las llamamos acciones *virtuales* de movimiento o *variaciones* de las acciones de movimiento real. Por último, el conjunto de todas estas acciones virtuales de movimiento fue designado con Var_v. Así, enunciamos a seguir el PPV para el caso de cuerpos libres.

3.5.1 Principio de la Potencia Virtual

Para todo referencial Galileano [14] y para cada instante de tempo t, el cuerpo $\mathscr{B}$ se encuentra en equilibrio (estático) **en la configuración libre de restricciones cinemáticas** $\mathscr{B}_t$ bajo la acción del sistema de fuerzas $f \in \mathscr{V}'$ si

- se satisface

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.125}$$

  es decir, si la potencia virtual externa de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo en la configuración $\mathscr{B}_t$ es nula para toda acción de movimiento virtual rígida;

[13] Como ya mencionado, es indistinto hablar de la configuración $\mathscr{B}_t$ como de $\mathbf{u}_t$.

[14] Por referencial Galileano se entiende también *referencial absoluto*.

- y, además, se satisface

$$P_i + P_e = -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.126}$$

  es decir, si la suma de la potencia interna y de la externa es nula para toda acción de movimiento virtual.

Si extendemos este principio para incluir el concepto de equilibrio dinámico, debemos agregar a las potencias anteriores la potencia correspondiente a las *fuerzas de inercia*. En otras palabras, a las fuerzas externas f que actúan sobre el cuerpo, debemos agregar la fuerza $\rho\dot{\mathbf{v}}$ [15]. Tenemos así

$$P_e = \langle f^*, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad f^* = f - \rho\dot{\mathbf{v}}. \tag{3.127}$$

Notemos que, en el caso dinámico, el PPV no es otra cosa que el propio principio de D'Alembert (ver [163]).

Retornando al PPV, notamos que la primera parte nos permite caracterizar las fuerzas $f \in \mathscr{V}'$ compatibles con el modelo. De hecho, para el caso que nos ocupa se tiene

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V}, \mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_O + \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - O)\}, \tag{3.128}$$

donde O es arbitrario y $\mathbf{v}_O \in \mathscr{V}$ y $\mathbf{w} \in \mathscr{V}$ son también arbitrarios. Luego, $\dim \mathscr{N}(\mathscr{D}) = 6$ y para todo $\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$ tenemos

$$\begin{aligned} P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle &= \langle f, \hat{\mathbf{v}}_O + \hat{\mathbf{w}} \times (\mathbf{x} - O) \rangle = \langle f, \hat{\mathbf{v}}_O \rangle + \langle f, \hat{\mathbf{w}} \times (\mathbf{x} - O) \rangle \\ &= \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_O + \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{w}} \times (\mathbf{x} - O) = \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_O + (\mathbf{x} - O) \times \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{w}} \\ &= \mathbf{R}_f \cdot \hat{\mathbf{v}}_O + \mathbf{m}_O \cdot \hat{\mathbf{w}} = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_O, \hat{\mathbf{w}}) \in \mathscr{V} \times \mathscr{V}, \end{aligned} \tag{3.129}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_f &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{m}_O &= \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{3.130}$$

El resultado anterior nos dice que las fuerzas externas compatibles con el modelo deben ser tales que su resultante $\mathbf{R}_f$ sea nula y que la resultante de momentos $\mathbf{m}_O$ con respecto al punto arbitrario O debe ser igualmente nula. Si las fuerzas externas f son conocidas, este dato será compatible con el problema si la restricción anterior es satisfecha. Observe también que el conjunto de las $f \in V'$ que satisfacen el PPV no es vacío ya que $f = 0$ es un elemento de este conjunto. Mecánicamente, lo anterior nos dice que el sistema de fuerza nulo es compatible con el equilibrio de $\mathscr{B}$ en la configuración $\mathscr{B}_t$.

La segunda parte del PPV nos permite extender la definición de equilibrio para acciones de movimiento no necesariamente rígidas. Se puede observar que la segunda parte del PPV incluye la primera como caso particular ya que, por hipótesis,

[15] Observar que $\dot{\mathbf{v}}$ es la descripción espacial de la aceleración del movimiento **real**.

admitimos que $P_i = 0$ para todo $\mathbf{v}$ rígido. Por otra parte, la aplicación de la segunda parte del PPV presenta una dificultad, ya que establece una relación, relación de equilibrio, entre el esfuerzo interno $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ y el esfuerzo externo $f \in \mathscr{V}'$ compatible con el equilibrio (esto es, $P_e = 0 \; \forall \mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$). Por tanto, para que la segunda parte del PPV tenga sentido, será necesario mostrar que existe $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ tal que (3.126) sea satisfecha para un dado $f \in \mathscr{V}'$ en equilibrio. A continuación mostramos este resultado.

Teorema 3.1 Teorema de la Representación. *Sea* $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ *una configuración en equilibrio bajo la acción del sistema de fuerzas externas* $f \in \mathscr{V}'$. *Luego, existe* $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ *tal que*

$$f = \mathscr{D}^* \mathbf{T}. \tag{3.131}$$

Demostración. Por hipótesis, $f \in \mathscr{V}'$ es tal que $\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \;\; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}) \Rightarrow f \perp \mathscr{N}(\mathscr{D})$ (es decir, f es ortogonal a $\mathscr{N}(\mathscr{D})$) $\Rightarrow f \in \mathscr{N}(\mathscr{D})^\perp$ (es decir, pertenece al complemento ortogonal de $\mathscr{N}(\mathscr{D})$).

Por otra parte sabemos que $\mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}) \Rightarrow \mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}) \Leftrightarrow (\mathbf{T}, \mathscr{D}\mathbf{v}) = \langle \mathscr{D}^* \mathbf{T}, \mathbf{v} \rangle = 0 \;\; \forall \mathbf{T} \in \mathscr{W}' \Leftrightarrow \mathbf{v} \in R(\mathscr{D}^*)^\perp$. Concluimos así que

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = R(\mathscr{D}^*)^\perp, \tag{3.132}$$

de donde (por ser $R(\mathscr{D})$ cerrado en $\mathscr{W}$ [16])

$$\mathscr{N}(\mathscr{D})^\perp = (R(\mathscr{D}^*)^\perp)^\perp = R(\mathscr{D}^*). \tag{3.133}$$

De lo anterior concluimos que, si f está en equilibrio en $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$, resulta

$$f \in \mathscr{N}(\mathscr{D})^\perp = R(\mathscr{D}^*) \Rightarrow \exists \mathbf{T} \in \mathscr{W}' \text{ tal que } \mathscr{D}^* \mathbf{T} = f. \tag{3.134}$$

Y el resultado queda demostrado. ■

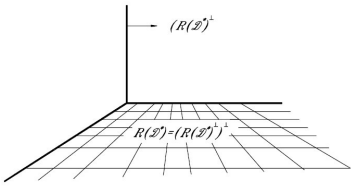


Fig. 3.7 Ortogonalidad en dimensión finita.

Del teorema anterior tenemos que para cualquier $\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$

[16] Para el lector no acostumbrado al análisis funcional, el resultado anterior es una generalización de lo que ocurre en dimensión finita. En la Figura 3.7, tenemos $R(\mathscr{D}^*)$ representado por el subespacio bidimensional (plano XY en la figura) del espacio $\mathscr{V}'$ tridimensional.

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^* \mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}), \tag{3.135}$$

expresión que corresponde exactamente a la segunda parte del PPV. En otras palabras, la segunda parte del PPV es en realidad una consecuencia de la primera.

Esta expresión nos proporciona la representación para f ó, de forma equivalente, la expresión de la operación de dualidade $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre $\mathscr{V}'$ e $\mathscr{V}$. Del punto de vista práctico, lo anterior, en el contexto de la mecánica del continuo, corresponde a determinar el operador $\mathscr{D}^*$ a través de la *integración por partes* de la expresión de la Potencia Interna

$$P_i = -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) \quad \text{con } \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v. \tag{3.136}$$

Del PPV podemos introducir los siguientes conjuntos

$$\text{Est}_T = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W}';\ -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v\}, \tag{3.137}$$

que es el conjunto de todos los esfuerzos internos equilibrados con el sistema de cargas $f \in \mathscr{V}'$ (del Teorema de la Representación vemos que Est_T es no vacío), y

$$\text{Var}_T = \{\hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{W}';\ (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v\}, \tag{3.138}$$

que es el subespacio vectorial de $\mathscr{W}'$ integrado por todos los esfuerzos internos $\hat{\mathbf{T}}$ en equilibrio con $f = 0$, de allí el nombre dado a $\hat{\mathbf{T}}$: *esfuerzo interno autoequilibrado*.

De estas definiciones se sigue que $\hat{\mathbf{T}} \in \text{Var}_T \Leftrightarrow \mathscr{D}^*\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}^*) \Rightarrow \text{Var}_T = \mathscr{N}(\mathscr{D}^*)$, y siendo $R(\mathscr{D}) = \{\mathbf{D} \in \mathscr{W};\ \exists \mathbf{v} \in \mathscr{V} \text{ tal que } \mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{D}\}$, luego, $\hat{\mathbf{T}} \in \text{Var}_T \Leftrightarrow (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = 0\ \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v \Leftrightarrow \hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{D}(\text{Var}_v)^\perp = R(\mathscr{D})^\perp \Rightarrow \text{Var}_T = R(\mathscr{D})^\perp$. Así, tenemos

$$\text{Var}_T = \mathscr{N}(\mathscr{D}^*) = R(\mathscr{D})^\perp, \tag{3.139}$$

y recordando nuevamente que $R(\mathscr{D})$ es un subespacio cerrado de $\mathscr{W}$ tenemos

$$\text{Var}_T^\perp = \mathscr{N}(\mathscr{D}^*)^\perp = R(\mathscr{D}), \tag{3.140}$$

resultado que nos será útil más adelante.

También podemos observar que:

$$\text{Est}_T = \mathbf{T}_o + \text{Var}_T, \tag{3.141}$$

donde $\mathbf{T}_o \in \text{Est}_T$ es arbitrario, es decir, Est_T es la translación del subespacio vectorial Var_T cuyos elementos son todos los esfuerzos internos autoequilibrados. También, podemos ver que cualquier elemento de Est_T puede ser representado por la suma del elemento $\mathbf{T}_o$ y un elemento de Var_T[17] y, viceversa, todo elemento de Var_T puede ser expresso por la diferencia de elementos de Est_T. Finalmente, es interesante resaltar que el Teorema de la Representación nos garantiza, para un $f \in \mathscr{V}'$ equilibrado, la existencia del campo $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ tal que (3.131) sea verdadero pero no nos garantiza la unicidad. De hecho si $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ está asociado a $f \in \mathscr{V}'$ a través de

[17] Esta propiedad de los elementos de Var_T hace que en la literatura se los conozca también como *variaciones admisibles* sobre los elementos de Est_T.

(3.131), $\mathbf{T}+\hat{\mathbf{T}}$ también lo está para todo $\hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T$. En otras palabras, el esfuerzo interno que equilibra la carga f queda determinado excepto en un esfuerzo interno autoequilibrado.

Otros dos aspectos fundamentales del PPV y del Teorema de la Representación es el de proporcionarnos: 1) una representación para el sistema de esfuerzos externos f, hasta ahora no especificado y 2) proporcionarnos la *forma local* de las equaciones de equilibrio. De hecho, tenemos que

1. Si $f \in \mathscr{V}'$ está en equilibrio vimos que

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.142}$$

o sea, por tratarse de cuerpos libres

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \langle \mathscr{D}^*\mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v = \mathscr{V}, \tag{3.143}$$

lo que nos proporciona una representación para f. Veamos esto más detalladamente para el caso de un cuerpo tridimensional. Suponiendo que todos los campos poseen adecuada regularidad como para que las operaciones que realizaremos a continuación tengan sentido, y sabiendo que $\mathbf{T} \in Sym$, resulta

$$\begin{aligned}\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})^s \, dV = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}} \, dV = \\ \int_{\mathscr{B}_t} [\operatorname{div}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}) - \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{v}}] \, dV = -\int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div}\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV + \int_{\partial\mathscr{B}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dS = \\ \langle \mathscr{D}^*\mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}} \rangle. \end{aligned} \tag{3.144}$$

Obtenemos así que el operador equilibrio está dado por

$$\mathscr{D}^*(\cdot) = \begin{cases} -\operatorname{div}(\cdot) & \text{en } \mathscr{B}_t, \\ (\cdot)\mathbf{n} & \text{en } \partial\mathscr{B}_t. \end{cases} \tag{3.145}$$

A su vez, se obtiene que el esfuerzo externo $f \in \mathscr{V}'$ compatible con el modelo cinemático adoptado está caracterizado por una *densidad de fuerza de cuerpo* $\mathbf{b} = -\operatorname{div}\mathbf{T}$ definida por unidad de volumen en $\mathscr{B}_t$ y por una *densidad de fuerza de superficie* $\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{n}$ definida por unidad de superficie en $\partial\mathscr{B}_t$. Como se puede observar, del PPV y de la hipótesis de que $P_i = -(\mathbf{T}, \mathbf{D}) = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} \, dV$, obtuvimos una representacion para el funcional lineal $f \in \mathscr{V}'$

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV + \int_{\partial\mathscr{B}_t} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dS. \tag{3.146}$$

2. Del resultado anterior el PPV toma, para el modelo que nos ocupa, la forma extendida

$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}} \, dV - \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV - \int_{\partial\mathscr{B}_t} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dS = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.147}$$

que, asumiendo suficiente regularidad, vimos que nos conducía a

$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dV + \int_{\partial\mathscr{B}_t} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T}\cdot(\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})^s\,dV = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T}\cdot\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}}\,dV = \int_{\mathscr{B}_t} [\operatorname{div}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}) - \operatorname{div}\mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{v}}]\,dV = \int_{\mathscr{B}_t} -\operatorname{div}\mathbf{T}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dV + \int_{\partial\mathscr{B}_t} \mathbf{T}\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS \quad \forall\hat{\mathbf{v}}\in \mathrm{Var}_v. \tag{3.148}$$

Agrupando términos obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}_t} (\operatorname{div}\mathbf{T}+\mathbf{b})\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dV - \int_{\partial\mathscr{B}_t} (\mathbf{T}\mathbf{n}-\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}}\in \mathrm{Var}_v = \mathscr{V}. \tag{3.149}$$

De lo anterior concluimos que

$$\operatorname{div}\mathbf{T}+\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{3.150}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{a} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_t, \tag{3.151}$$

conocidas como *Equaciones Locales* de equilibrio o *Ecuaciones de Euler* o *Ecuaciones de Euler-Lagrange* dentro de la terminología del Cálculo de las Variaciones (ver [111], [259], [298]). Observe que estas ecuaciones pudieron ser alcanzadas solamente debido al hecho de que supusimos inicialmente que todos los campos eram suficientemente regulares. Cuando tal regularidad no está presente, las operaciones anteriormente realizadas pierden sentido y las Ecuaciones de Euler-Lagrange deben ser entendidas en un sentido generalizado (sentido de las distribuciones). Sin embargo, aún en esta situación, el PPV mantiene su validez. Es este tipo de falta de regularidad que acaba generando las ecuaciones de salto, que pueden ser fácilmente encontradas a través de la metodología anterior, bastando apenas verificar la regularidad del campo $\mathbf{T}$ al realizar la integración por partes para encontrar la expresión correcta para los esfuerzos externos. De hecho, si admitimos que sobre la superficie S (interior al cuerpo) tenemos discontinuidad del campo $\mathbf{T}$, al integrar por partes surgirá un término adicional $\int_S [\![\mathbf{T}]\!]\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS$. En otras palabras, en este caso de falta de regularidad, el esfuerzo externo f podrá incluir una representación adicional dada por la carga por unidad de superficie $\mathbf{a}_S$ definida sobre esa superficie de discontinuidad S. Observe, entonces, que toda vez que se verifica el equilibrio, las fuerzas de superficie $\mathbf{a}$ están relacionadas con el estado de tensiones $\mathbf{T}$ a través de

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{a} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_t, \tag{3.152}$$

y, caso exista discontinuidad en S por

$$[\![\mathbf{T}]\!]\mathbf{n} = \mathbf{a}_S \quad \text{en } S. \tag{3.153}$$

El resultado anterior no es otra cosa que el Teorema de Cauchy, que puede, por lo tanto, ser obtenido como consecuencia del PPV (ver [132]).

Vemos así que, dado un sistema de fuerzas $f \in \mathscr{V}'$, el PPV nos permite determinar si está en equilibrio y, a través de la segunda parte del PPV, determinar el (los) esfuerzo(s) interno(s) $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ que equilibra(n) este sistema o, viceversa, dado $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$ determinar $f \in \mathscr{V}'$ que lo equilibra. Por otra parte, el PPV permite determinar que tipo de esfuerzos externos f son admisibles al modelo.

A continuación, veremos las condiciones que deben ser satisfechas para que una tasa de deformación $\mathbf{D} \in \mathscr{W}$ sea *compatible*, esto es, $\exists \mathbf{v} \in \mathscr{V}$ tal que $\mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{D}$.

3.5.2 Principio de la Potencia Virtual Complementaria

El campo tasa de deformación $\mathbf{D}$, definido en la configuración $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ en equilibrio, es compatible si y solamente si

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T = \mathscr{N}(\mathscr{D}^*). \tag{3.154}$$

Demostración. De hecho, si $\mathbf{D}$ es compatible tenemos que $\exists \mathbf{v} \in \mathscr{V}$ tal que

$$\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}, \tag{3.155}$$

luego, para todo $\hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T = \mathscr{N}(\mathscr{D}^*)$ resulta

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D}) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{v}) = \langle \mathscr{D}^* \hat{\mathbf{T}}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = 0. \tag{3.156}$$

Supongamos ahora que

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T = \mathscr{N}(\mathscr{D}^*), \tag{3.157}$$

luego

$$\mathbf{D} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}^*)^{\perp}. \tag{3.158}$$

De la relación (3.140) tenemos

$$\mathbf{D} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}^*)^{\perp} = R(\mathscr{D}) \Rightarrow \exists \mathbf{v} \in \mathscr{V} \text{ tal que } \mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}, \tag{3.159}$$

con lo que demostramos el llamado Principio de la Potencia Virtual Complementaria (PPVC). ■

Tenemos así que el Principio de la Potencia Virtual Complementaria nos permite determinar cuando $\mathbf{D}$ es compatible. La existencia de $\mathbf{v}$ está asegurada por este principio, no así su unicidad. De hecho, si $\mathbf{v}$ es solución de (3.154) (es decir satisface el PPVC), entonces el campo

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.160}$$

también es solución de (3.154). En otras palabras, la solución queda determinada excepto en una acción de movimiento rígido. Otras informaciones pueden obtenerse y el lector interesado puede consultar [213, Teorema 5.10.9, página 314].

3.6 Cuerpos con Restricciones Bilaterales

En esta sección vamos a considerar el caso totalmente opuesto al analizado en la sección anterior. Así, en lugar de suponer que en la configuración $\mathscr{B}_t$ ($\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$) el cuerpo está libre de restricciones cinemáticas, vamos a suponer que hemos prescripto las acciones de movimiento en toda la frontera $\partial\mathscr{B}_t$ de $\mathscr{B}_t$[18]. Si designamos por $\hat{\mathbf{v}}$ el campo de velocidades prescriptas en $\partial\mathscr{B}_t$ tenemos

$$\mathrm{Kin}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\ \mathbf{v}|_{\partial\mathscr{B}_t} = \bar{\mathbf{v}}\}. \tag{3.161}$$

Luego, Var_v será el subespacio vectorial de $\mathscr{V}$ dado por

$$\mathrm{Var}_v = \{\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V};\ \hat{\mathbf{v}}|_{\partial\mathscr{B}_t} = \mathbf{0}\}. \tag{3.162}$$

Como es fácil notar, dado $\mathbf{w} \in \mathrm{Kin}_v$ arbitrario, resulta

$$\mathrm{Kin}_v = \mathbf{w} + \mathrm{Var}_v, \tag{3.163}$$

esto es, Kin_v es la translación del subespacio vectorial Var_v de $\mathscr{V}$.

3.6.1 Principio de la Potencia Virtual

Para todo referencial Galileano y para cada instante de tiempo t, el cuerpo $\mathscr{B}$ se encuentra en equilibrio (estático) en la configuración con restricciones cinemáticas bilaterales $\mathscr{B}_t$, bajo la acción del sistema de fuerzas externas $f \in \mathscr{V}'$ si

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.164}$$

y

$$P_i + P_e = -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.165}$$

Así como en el caso de cuerpos libres, la primera parte del principio nos permite caracterizar cuales son las cargas f que son compatibles con el equilibrio. En particular, si

$$\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{\mathbf{0}\}, \tag{3.166}$$

[18] Esta hipótesis se hace sin pérdida de generalidad. De hecho, podríamos analogamente haber considerado que las restricciones cinemáticas son prescriptas sobre una porción de la frontera, digamos $\partial\mathscr{B}_{ta} \subset \partial\mathscr{B}_t$.

o sea, si las restricciones cinemáticas son tales que eliminan el movimiento rígido, tendremos que toda $f \in \mathscr{V}'$ podrá ser aplicada al cuerpo manteniendo el equilibrio ya que

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle f, \mathbf{0} \rangle = 0, \quad \forall f \in \mathscr{V}'. \tag{3.167}$$

Supongamos ahora que las restricciones cinemáticas no son suficientes para eliminar todas las acciones rígidas. Luego

$$\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{V}_\pi, \tag{3.168}$$

de donde, aplicando la primera parte del PPV, resulta que las cargas $f \in \mathscr{V}'$ deberán ser ortogonales al subespacio de movimientos rígidos permitidos $\mathscr{V}_\pi$, es decir

$$f \in \mathrm{Var}_v^\perp + \mathscr{N}(\mathscr{D})^\perp = (\mathscr{V}_\pi)^\perp. \tag{3.169}$$

Por ejemplo, consideremos el ejemplo de la Figura 3.8. Luego $\mathscr{V}_\pi$ es el subespacio de vectores paralelos al plano π y del PPV tendremos

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{v}} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}_\pi, \tag{3.170}$$

que nos muestra que la resultante $\mathbf{F}$ de las cargas aplicadas f debe ser ortogonal al plano π para tener equilibrio (estático).

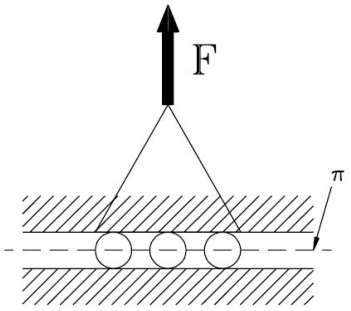


Fig. 3.8 Cuerpo con restricciones cinemáticas bilaterales. Ejemplo de carga externa compatible con el equilibrio.

El ejemplo anterior nos muestra como, dada la cinemática, determinamos el conjunto $\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D})$ y como, de este conjunto y del PPV, podemos caracterizar totalmente las cargas f compatibles con el equilibrio.

Nuevamente, así como en el caso de cuerpos libres, la segunda parte del principio nos permite determinar los esfuerzos internos $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ que equilibran la carga $f \in \mathscr{V}'$. El teorema a continuación nos muestra que estos esfuerzos existen.

Teorema 3.2 Teorema de la Representación. *Sea* $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ *una configuración con restricciones cinemáticas bilaterales en equilibrio bajo la acción de las cargas* $f \in \mathscr{V}'$. *Luego, existen* $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ *y* $r \in \mathscr{V}'$ *tales que*

$$f = \mathscr{D}^*\mathbf{T} - r, \tag{3.171}$$

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \Leftrightarrow r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}, \tag{3.172}$$

donde r es denominada reacción de vínculo*. A su vez se dice que* $\mathbf{T}$ *y r equilibran* f*.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que

$$f \in (\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}))^{\perp} \Leftrightarrow f \in \mathrm{Var}_v^{\perp} + \mathscr{N}(\mathscr{D})^{\perp}. \tag{3.173}$$

La Figura 3.9 nos muestra una representación geométrica del resultado anterior para el caso de dimensión finita. Este resultado, y la relación (3.133), nos conduce a

$$f \in \mathrm{Var}_v^{\perp} + R(\mathscr{D}^*). \tag{3.174}$$

Lo anterior nos muestra que existen $-r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}$ y $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ tales que

$$f = \mathscr{D}^*\mathbf{T} - r, \tag{3.175}$$

ó, de forma equivalente,

$$\mathscr{D}^*\mathbf{T} = f + r. \tag{3.176}$$

A su vez, por ser $-r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}$ resulta

$$\langle -r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.177}$$

Y el resultado queda demostrado. ■

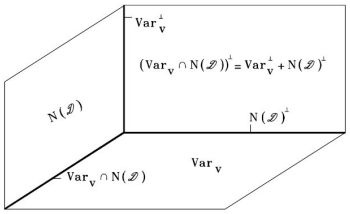


Figura 3.9: $(\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathcal{D}))^{\perp} = \mathrm{Var}_v^{\perp} + \mathscr{N}(\mathcal{D})^{\perp}$.

Fig. 3.9 $(\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}))^{\perp} = \mathrm{Var}_v^{\perp} + \mathscr{N}(\mathscr{D})^{\perp}$.

Como consecuencia del teorema anterior, tenemos lo siguiente.

1. Si $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ con restricciones bilaterales, está en equilibrio bajo la acción de las cargas $f \in \mathscr{V}'$ tenemos

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^*\mathbf{T} - r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^*\mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\mathbf{v}) \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.178}$$

con lo que arribamos a la expresión de la segunda parte del PPV y que nos permite determinar los esfuerzos internos $\mathbf{T}$ en equilibrio con las cargas f ó, recíprocamente, dado $\mathbf{T}$ nos permite encontrar los esfuerzos externos que lo equilibran. Es importante notar que el cálculo de $\mathbf{T}$ proporcionado por la segunda parte del PPV **no depende** de la reacción de vínculo r ya que ésta es **ortogonal** a todo Var_v o, en otras palabras, su potencia para todo $\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$ es nula.

2. Como mencionamos, las reacciones de vínculo r no pueden ser evaluadas a través de su potencia para campos virtuales $\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$ porque son ortogonales a estos campos (conocemos su dirección pero no su valor). Para calcularlas, recurrimos al Teorema de la Representación que nos proporcionó la manera de calcularlas, o sea

$$r = \mathscr{D}^*\mathbf{T} - f. \tag{3.179}$$

Haciendo uso del PPV, lo anterior corresponde a

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^*\mathbf{T} - f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) - \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}. \tag{3.180}$$

Desde el punto de vista mecánico, lo que hicimos fue simplemente substituir la restricción cinemática por su correspondiente dual, la força de vínculo r, resultando así el cuerpo libre de restricciones. Luego, una vez determinado $\mathbf{T}$ en función de f a través del PPV, liberamos el cuerpo de la restricción cinemática impuesta en Var_v, y aplicando nuevamente el PPV a un cuerpo libre, y sujeto a esfuerzos externos dados por $r - \mathscr{D}^*\mathbf{T} + f$, calculamos r.[19].

De manera enteramente similar a la de la Sección 3.5, dada la carga $f \in \mathscr{V}'$ compatible con el equilibrio, podemos definir el conjunto

$$\mathrm{Est}_T = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W}'; -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v\} \tag{3.181}$$

que contiene todos los esfuerzos internos $\mathbf{T}$ en equilibrio con la carga f (del Teorema de la Representación vemos que este conjunto no es vacío). Podemos también definir

$$\mathrm{Var}_T = \{\hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{W}'; (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = 0 \; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v\} = (\mathscr{D}(\mathrm{Var}_v))^{\perp}, \tag{3.182}$$

como el subespacio vectorial formado por todos los esfuerzos internos autoequilibrados (equilibrados con $f = 0$). Las definiciones anteriores nos llevan a

[19] Como ejemplos de reacciones de vínculo, podemos citar la restricción cinemática asociada a la incompresibilidad ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, ver (3.86)). En este caso la reacción de vínculo r estará dada por un campo escalar p que se corresponde con la presión hidrostática que queda indeterminada en el cálculo del esfuerzo interior $\mathbf{T}$. Una vez calculado el esfuerzo $\mathbf{T}$ que equilibra la carga f, se procede a calcular p liberando el cuerpo de la restricción de incompresibilidad, esto es, se somete al cuerpo a acciones de movimiento que no satisfacen la restricción de incompresibilidad. De esta manera, $\mathbf{T}$, f y p realizan potencia y deberán satisfacer el PPV, obteniéndose asi el valor de p. Otro ejemplo clásico lo encontramos en la teoría de vigas, placas y cáscaras donde, por ejemplo, las fibras normales al plano medio deben permanecer no deformadas. En esta teoría, la reacción de vínculo que asegura la rigidez de estas fibras queda indeterminada (potencia nula) para toda acción de movimiento compatible con este tipo de restricción.

$$\text{Est}_T = \mathbf{T}_o + \text{Var}_T, \quad \mathbf{T}_o \in \text{Est}_T \text{ arbitrario.} \tag{3.183}$$

Tenemos por lo tanto nuevamente que Est_T es la translación de un subespacio vectorial de $\mathscr{W}'$.

Vamos, ahora, reescribir algunos de los resultados anteriores de forma extendida para el caso particular del cuerpo tridimensional.

Como vimos, dado $f \in \mathscr{V}'$ compatible con el equilibrio, la distribución de tensiones $\mathbf{T}$ era tal que

$$(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v, \tag{3.184}$$

para el cuerpo tridimensional que estamos estudiando (restricciones bilaterales). Por su vez, suponiendo $\mathbf{T}$ suficientemente regular, tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad} \hat{\mathbf{v}})^s \, dV = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot \operatorname{grad} \hat{\mathbf{v}} \, dV = \int_{\mathscr{B}_t} [\operatorname{div}(\mathbf{T}\hat{\mathbf{v}}) - \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{v}}] \, dV = \int_{\partial \mathscr{B}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV - \int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV = - \int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV, \tag{3.185}$$

en virtud de que $\hat{\mathbf{v}} = 0$ en *todo* $\partial \mathscr{B}_t$. Substituyendo (3.185) en (3.184) llegamos finalmente a

1. Una representación para $f \in \mathscr{V}'$

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = - \int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV, \tag{3.186}$$

   esto es, la carga f compatible con las restriciones cinemáticas impuestas en toda la frontera dada por $\partial \mathscr{B}_t$ *solamente* podrá estar representada por una densidad de fuerza de cuerpo $\mathbf{b}$ por unidad de volumen en $\mathscr{B}_t$, por lo tanto

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV, \tag{3.187}$$

   esto es, *no podemos prescribir cargas en la frontera* $\partial \mathscr{B}_t$.
2. La expresión del PPV toma la siguiente forma final

$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad} \hat{\mathbf{v}})^s \, dV = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v. \tag{3.188}$$

3. La forma local del equilibrio, dada en forma abstracta por $\mathscr{D}^* \mathbf{T} = f + r$, puede ser encontrada en la forma extendida a través de integración por partes

$$- \int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v, \tag{3.189}$$

   de donde encontramos finalmente

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}_t. \tag{3.190}$$

Encontremos ahora la reacción de vínculo a partir del PPV para cuerpos libres, liberando las restricciones en Var_v, como anteriormente mencionado

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad} \hat{\mathbf{v}})\, dV - \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}, \tag{3.191}$$

de donde

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dS - \int_{\mathscr{B}_t} (\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dV = \int_{\partial \mathscr{B}_t} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dS \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}. \tag{3.192}$$

Por lo tanto, llegamos a

$$\int_{\partial \mathscr{B}_t} (\mathbf{r} - \mathbf{T}\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dS = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}, \tag{3.193}$$

lo que, en la forma local, corresponde a

$$\mathbf{r} = \mathbf{T}\mathbf{n} \quad \text{en } \partial \mathscr{B}_t. \tag{3.194}$$

3.6.2 Principio de la Potencia Virtual Complementaria

Vamos ahora a analizar el problema dual al del equilibrio, esto es, el problema de compatibilidad cuando estamos en presencia de restricciones bilaterales.

El campo tasa de deformación $\mathbf{D}$, definido en la configuración $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$, en equilibrio, es compatible si y solamente si

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D}) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{w}) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \tag{3.195}$$

para $\mathbf{w} \in \mathrm{Kin}_v$ arbitrario.

Antes de proseguir con la demostración de la relación anterior, vamos primero a transformar la expresión abstracta (3.195) en su forma extendida

$$\int_{\mathscr{B}_t} \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}\, dV = \int_{\mathscr{B}_t} \hat{\mathbf{T}} \cdot (\operatorname{grad} \mathbf{w})^s\, dV = \int_{\mathscr{B}_t} [\operatorname{div}(\hat{\mathbf{T}}\mathbf{w}) - \operatorname{div} \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{w}]\, dV = \int_{\partial \mathscr{B}_t} \hat{\mathbf{T}}\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}\, dS = \int_{\partial \mathscr{B}_t} \hat{\mathbf{T}}\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}\, dS, \tag{3.196}$$

dado que $\operatorname{div} \hat{\mathbf{T}} = \mathbf{0}$ por ser $\hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T$ y $\mathbf{w}$ está prescripto en $\partial \mathscr{B}_t$ siendo igual a $\bar{\mathbf{v}}$. Así, el PPVC toma la forma

$$\int_{\mathscr{B}_t} \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}\, dV = \int_{\partial \mathscr{B}_t} \hat{\mathbf{T}}\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}}\, dS \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T. \tag{3.197}$$

Demostración. Si $\mathbf{D}$ es compatible, existe $\mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v$ tal que $\mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{D}$. Recordando que Kin_v es una variedad lineal (translación) de Var_v, esto es $\mathrm{Kin}_v = \mathbf{w} + \mathrm{Var}_v$ con $\mathbf{w} \in \mathrm{Kin}_v$ arbitrario, tenemos $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v$. Luego, resulta

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}(\mathbf{v} - \mathbf{w})) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \tag{3.198}$$

por la propia definición de Var_T, lo que nos muestra que la condición necesaria es verdadera.

Para demostrar la condición suficiente supongamos que

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D}) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{w}) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \tag{3.199}$$

donde $\mathbf{w} \in \mathrm{Kin}_v$, luego

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D} - \mathscr{D}\mathbf{w}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T. \tag{3.200}$$

Por lo que concluimos, de (3.182), que

$$\mathbf{D} - \mathscr{D}\mathbf{w} \in \mathrm{Var}_T^{\perp} = \mathscr{D}(\mathrm{Var}_v). \tag{3.201}$$

Así

$$\mathbf{D} \in \mathscr{D}\mathbf{w} + \mathscr{D}(\mathrm{Var}_v) = \mathscr{D}(\mathbf{w} + \mathrm{Var}_v) = \mathscr{D}(\mathrm{Kin}_v), \tag{3.202}$$

esto es, $\exists \mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v$ tal que $\mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{D}$, quedando así demostrada la suficiencia y, por lo tanto, el PPVC. ■

Como puede ser observado hasta ahora, siempre estuvimos preocupados en el análisis de casos extremos, es decir, o suponíamos que el cuerpo estaba totalmente libre de restricciones o entonces imponíamos restricciones cinemáticas en toda su frontera. Consideremos ahora el caso en que solamente en una parte de la frontera $\partial\mathscr{B}_t$ del cuerpo, llamada $\partial\mathscr{B}_{tv}$, imponemos restricciones cinemáticas. En tal caso, llamamos $\partial\mathscr{B}_{ta}$ a la parte de la frontera complementar tal que $\partial\mathscr{B}_t = \partial\mathscr{B}_{tv} \cup \partial\mathscr{B}_{ta}$. Por ejemplo $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}}$ en $\partial\mathscr{B}_{tv}$. En este caso, tenemos que

$$\mathrm{Kin}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\ \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv}\}, \tag{3.203}$$

$$\mathrm{Var}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\ \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv}\}. \tag{3.204}$$

Un análisis similar a los anteriormente realizados nos muestra que el sistema de fuerzas externas compatible deberá ser de la forma

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{ta}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dS \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.205}$$

esto es, f estará caracterizado por una densidade de fuerzas de cuerpo definida en $\mathscr{B}_t$, y aquí representada por $\mathbf{b}$, y por una densidade de fuerza de superfície, definida en $\partial\mathscr{B}_{ta}$, aquí dada por $\mathbf{a}$.

Es importante aquí resaltar que, quando nos referimos a $\partial\mathscr{B}_{tv}$ como la frontera donde tenemos alguna prescripción cinemática, debemos tener presente que en un mismo punto de $\partial\mathscr{B}_{tv}$ podemos tener algunas componentes de $\mathbf{v}$ libres y otras no.

Así, para este caso más general, el PPV establece

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.206}$$

y además

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.207}$$

Particularmente, en forma expandida para el caso del cuerpo tridimensional que nos ocupa, el PPV expresa, por un lado

$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{ta}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dS = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.208}$$

y por otro lado

$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\mathrm{grad}\, \hat{\mathbf{v}})^s\, dV = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{ta}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}}\, dS \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.209}$$

Por último, la forma local del equilibrio estará dada por $\mathscr{D}^*\mathbf{T} = f + r$, que para el cuerpo que nos ocupa y bajo adecuadas condiciones de regularidad corresponde a

$$\mathrm{div}\, \mathbf{T} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{3.210}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{a} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{ta}, \tag{3.211}$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{r} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tv}. \tag{3.212}$$

3.7 Cuerpos con Restricciones Unilaterales

En esta sección vamos a suponer que nuestro cuerpo se encuentra en una configuración $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ con restricciones cinemáticas del tipo unilateral sin fricción. En lo que sigue, limitaremos nuestra presentación al caso en que el conjunto de todas las acciones de movimiento admisibles (Kin_v) que podemos realizar en la configuración $\mathscr{B}_t$, es un cono convexo con vértice en el origen o bien una translación del mismo. Es decir

$$\mathrm{Kin}_v = \mathbf{w} + \mathrm{Var}_v, \tag{3.213}$$

donde Var_v es un cono convexo de vértice en el origen y $\mathbf{w}$ es la translación del origen.

Existe una variedad enorme de problemas mecánicos en que este tipo de restricción está presente. Veamos dos ejemplos simples.

1. Sea el cuerpo mostrado en la Figura 3.10. Como podemos observar, el conjunto de acciones de movimiento admisible es tal que en el punto A satisface la de-

sigualdad $\mathbf{v}(A) \geq 0$ (donde entendemos que la desigualdad se verifica en cada una de las componentes de $\mathbf{v}$). De lo anterior vemos que

$$\mathrm{Kin}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\ \mathbf{v}(A) \geq 0\}. \tag{3.214}$$

2. Sea el cuerpo mostrado en la Figura 3.11, donde suponemos que el "cuerpo" está dado por una cuerda que en la configuración de referencia ocupa la posición de la recta $\overline{ab}$. Vamos a suponer también que los desplazamientos que las partículas P de la cuerda pueden realizar sean sólo verticales (es decir según el eje y de la figura). Estos desplazamientos verticales son denotados por $\mathbf{u}_t$ (el desplazamiento horizontal no nos interesa pues lo hemos asumido nulo). Debido al obstáculo rígido definido por la curva $\varphi(x)$, $x \in [a,b]$, resulta que $\mathbf{u}_t$ satisface

$$\mathbf{u}_t \geq \varphi(x) \quad \forall x \in [a,b] \text{ y } \forall t \in [t_0,t_f] \tag{3.215}$$

y también

$$\mathbf{u}_t(a) = \mathbf{u}_t(b) = 0 \quad \forall t \in [t_0,t_f]. \tag{3.216}$$

Luego, llamando

$$\mathrm{Var}_u = \{\hat{\mathbf{u}} \in \mathscr{U};\ \hat{\mathbf{u}} \geq 0 \forall x \in [a,b] \text{ y } \hat{\mathbf{u}}(a) = \hat{\mathbf{u}}(b) = 0\}, \tag{3.217}$$

es fácil ver que el conjunto de todas las configuraciones admisibles está dado por

$$\mathrm{Kin}_u = \varphi + \mathrm{Var}_u, \tag{3.218}$$

que resulta así en la translación φ del cono convexo y de vértice en el origen Var_u. En este ejemplo vemos también como Kin_v depende de la configuración $\mathscr{B}_t$. En efecto, si $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ es tal que ningún punto de la cuerda se apoya sobre el obstáculo entonces, todas las acciones de movimiento verticales $\mathbf{v}$ tales que $\mathbf{v}(a) = \mathbf{v}(b) = 0$ son acciones admisibles. Luego Kin_v para esta configuración $\mathscr{B}_t$, será un subespacio vectorial del espacio de acciones de movimineto posibles $\mathscr{V}$. No ocurre lo mismo si en la configuración $\mathscr{B}_t$ parte de la cuerda apoya en el obstáculo. En este caso las acciones de movimiento admisibles Kin_v estarán dadas por campos $\mathbf{v}$ suficientemente regulares tales que

- $\mathbf{v}(a) = \mathbf{v}(b) = 0$;
- $\mathbf{v} \geq 0$ para todo punto en $\mathscr{B}_t$ apoyado en el obstáculo;
- $\mathbf{v}$ libre para todos los demás puntos de $\mathscr{B}_t$.

Lo anterior muestra que Kin_v, para la configuración $\mathscr{B}_t$, es el propio Var_v dadas por las acciones de movimiento $\mathbf{v}$ definidas anteriormente. Es fácil verificar que si $\mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v$ entonces $\alpha\mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$. Lo anterior nos muestra que Kin_v es en este caso un cono convexo con vértice en el origen.

Es interesante observar que los conjuntos Var_v analizados en las secciones anteriores (cuerpos libres y cuerpos con restricciones cinemáticas bilaterales) son casos particulares del que estamos estudiando ahora. El lector debe notar que todo espacio o subespacio vectorial es un cono convexo de vértice en el origen siendo que la

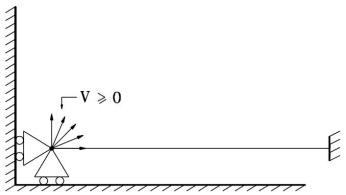


Fig. 3.10 Viga con restricción unilateral en $x = A$.

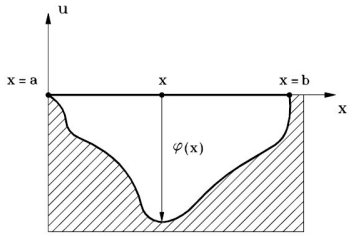


Fig. 3.11 Cuerda con restricción unilateral en todo su dominio.

inversa no se verifica. Luego las restricciones unilaterales son una generalización de las restricciones cinemáticas hasta aquí estudiadas.

Antes de continuar, nos preguntamos si el concepto de equilibrio establecido en las secciones anteriores permanece inalterado. Para responder esto, consideremos una bola rígida sobre una mesa (ver Figura 3.12). Luego, las acciones de movimiento admisibles son aquellas acciones rígidas paralelas al plano de la mesa o aquellas que tienden a "levantar" la bola. Es fácil ver que para este ejemplo se verifica que $\mathrm{Kin}_v = \mathrm{Var}_v$. En particular, para toda acción de movimiento rígida en el plano de la mesa, tendremos que la potencia externa a ella asociada es nula (ortogonalidad entre la fuerza de cuerpo y las acciones en el plano). A su vez, para las acciones admisibles que nos permiten "salir" del plano de la mesa, tendremos que "consumir nuestra energía" para realizarlas. Luego

$$P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle \leq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.219}$$

El resultado anterior nos muestra que para restricciones unilaterales la definición de equilibrio debe ser consistente con esta simple constatación.

3.7.1 Principio de la Potencia Virtual

Para todo referencial Galileano y para cada instante de tiempo t, el cuerpo $\mathscr{B}$ se encuentra en equilibrio (estático) en la configuración con restricciones cinemáticas unilaterales (sin fricción) $\mathscr{B}_t$, bajo la acción del sistema de fuerzas externas $f \in \mathscr{V}'$ si

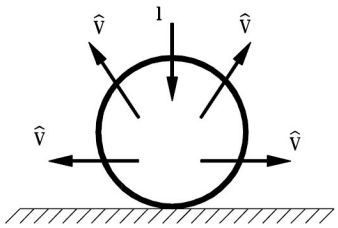


Fig. 3.12 Apoyo unilateral de una bola en una mesa.

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.220}$$

y también si

$$P_i + P_e = -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.221}$$

Nuevamente, la primera parte del principio nos permitirá caracterizar cuales son los sistemas de fuerzas externas $f \in \mathscr{V}'$ compatibles. Por ejemplo, consideremos la viga indicada en la Figura 3.13. Para esta viga tenemos que

$$\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = Rot^-, \tag{3.222}$$

donde Rot^- es el conjunto de todas las rotaciones antihorarias alrededor del punto O.

Las cargas $f \in \mathscr{V}'$ compatibles serán

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle f, \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - O) \rangle = \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \times (\mathbf{x} - O) = (\mathbf{x} - O) \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{m}_O \cdot \mathbf{w} \leq 0 \quad \forall \mathbf{w} \text{ antihorario.} \tag{3.223}$$

La expresión anterior nos dice que el momento de las cargas aplicadas f respecto al punto O, representado por $\mathbf{m}_O$, debe ser de sentido opuesto al de $\mathbf{w}$ es decir horario. Luego las cargas f deberán satisfacer esta restricción caso contrario no son compatibles con el equilibrio estático.

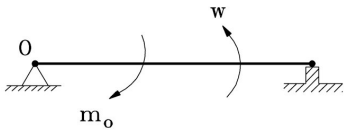


Fig. 3.13 Viga sobre apoyo unilateral.

La segunda parte del principio nos proporciona la distribución de esfurzos internos $\mathbf{T}$ que están en equilibrio con la carga aplicada f. A continuación, vamos a mostrar que dada f satisfaciendo la primera parte del PPV, entonces existe $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ que satisface la segunda parte del PPV.

Teorema 3.3 Teorema de la Representación. *Sea* $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ *una configuración con restricciones cinemáticas unilaterales (sin fricción) en equilibrio bajo la acción de las cargas* $f \in \mathscr{V}'$. *Luego, existen* $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ *y* $r \in \mathscr{V}'$ *tales que*

$$f = \mathscr{D}^*\mathbf{T} - r, \tag{3.224}$$

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle \geq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \Leftrightarrow r \in \mathrm{Var}_v^+, \tag{3.225}$$

donde r *es la reacción de vínculo. A su vez se dice que* $\mathbf{T}$ *y* r *equilibran* f.

Demostración. Por hipótesis, tenemos que

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.226}$$

es decir

$$f \in (\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}))^- = \mathrm{Var}_v^- + \mathscr{N}(\mathscr{D})^-, \tag{3.227}$$

pero $\mathscr{N}(\mathscr{D})$ es un subespacio de $\mathscr{V}$, luego

$$\mathscr{N}(\mathscr{D})^- = \mathscr{N}(\mathscr{D})^+ = \mathscr{N}(\mathscr{D})^\perp. \tag{3.228}$$

Recordando la expresión (3.133) tenemos finalmente

$$f \in \mathrm{Var}_v^- + R(\mathscr{D}^*), \tag{3.229}$$

La expresión anterior nos dice que existen $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ y $-r \in \mathrm{Var}_v^-$ (es decir $\langle -r, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$), tales que

$$f = \mathscr{D}^*\mathbf{T} - r, \tag{3.230}$$

ó, de forma equivalente

$$\mathscr{D}^*\mathbf{T} = f + r. \tag{3.231}$$

A su vez, dado que $-r \in \mathrm{Var}_v^-$ resulta

$$\langle -r, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle \geq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \Leftrightarrow r \in \mathrm{Var}_v^+. \tag{3.232}$$

Y el resultado queda probado. ■

En otras palabras, las reacciones de vínculo deben pertenecer al cono conjugado positivo del cono convexo con vértice en el origen de todas las acciones de movimiento virtuales cinemáticamente admisibles Var_v.

Con el resultado de este teorema tenemos finalmente

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^*\mathbf{T} - r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^*\mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}} \rangle - \langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) - \langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.233}$$

y recordando que $r \in \mathrm{Var}_v^+$, obtenemos finalmente que

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.234}$$

obteniéndose así la segunda parte del PPV.

Antes de continuar es importante resaltar algunos aspectos.

1. De manera similar al caso de cuerpo libre y cuerpo con restricciones bilaterales, en la definición de equilibrio (primera parte del PPV), no intervienen las reacciones de vínculo. Esto representa una ventaja adicional ya que en general no son conocidas. Ellas son nuevamente *eliminadas* por sus propiedades respecto a Var_v. Por ejemplo, en el caso de cuerpos libres o con restricciones bilaterales $r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}$ mientras que en el caso de restricciones unilaterales del tipo estudiadas resulta $r \in \mathrm{Var}_v^{+}$. En los tres casos tenemos

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle + \langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}). \tag{3.235}$$

   Para cuerpos libres o con restricciones bilaterales, el segundo término del primer miembro de la expresión anterior es nulo en virtud de que $r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}$ (en particular si el cuerpo está libre resulta $\mathrm{Var}_v = \mathscr{V}$, luego $r = 0$!). Para cuerpos con restricciones unilaterales el segundo término es positivo ($\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle \geq 0$) por ser $r \in \mathrm{Var}_v^{+}$. Esto nos permite *eliminar* r de la expresión anterior resultando $\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D})$. Pero, al hacer esto, *pagamos un precio* que es el de pasar de una igualdad (o ecuación) a una *desigualdad* o *inecuación*. Con esto, la distribución de esfuerzos internos (tensiones $\mathbf{T}$) para una dada carga f, compatible con el equilibrio, pasa a ser un problema que, siendo lineal para el caso de cuerpos libres o con restricciones bilaterales, resulta ahora ***no lineal*** para el caso de restricciones unilaterales.
2. Para un cuerpo tridimensional, la expresión compacta del PPV toma la forma

$$\int_{\partial \mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\mathrm{grad}\, \hat{\mathbf{v}})^s \, dV \geq \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dV + \int_{\partial \mathscr{B}_{ta}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}} \, dS \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.236}$$

Antes de plantear el Principio de la Potencia Virtual Complementaria para cuerpos con restricciones unilaterales, introduciremos las definiciones siguientes. Dada la carga equilibrada $f \in \mathscr{V}'$ podemos definir los conjuntos

$$\mathrm{Est}_T = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W};\; -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v\}, \tag{3.237}$$

y

$$\mathrm{Var}_T = \{\hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{W}';\; -(\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) \leq 0 \; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v\} = (\mathscr{D}(\mathrm{Var}_v))^{+}. \tag{3.238}$$

El conjunto Var_T es el conjunto de todas las tensiones *equilibradas* con la carga nula (de allí el nombre *tensiones autoequilibradas*. Como se puede verificar, Var_T es el cono conjugado positivo del cono convexo de vértice en el origen $\mathscr{D}(\mathrm{Var}_v)$. Como en los casos anteriores de restricciones al movimiento (libre y bilateral), se verifica

$$\mathrm{Est}_T = \mathbf{T}_o + \mathrm{Var}_T, \quad \mathbf{T}_o \in \mathrm{Est}_T \text{ arbitrario}, \tag{3.239}$$

es decir, Est_T es la translación del cono convexo Var_T.

Veamos ahora el problema dual del equilibrio es decir el problema de la compatibilidad.

3.7.2 Principio de la Potencia Virtual Complementaria

El campo tasa de deformación $\mathbf{D}$, definido en la configuración $\mathbf{u}_t \in \text{Kin}_u$ con restricciones cinemáticas unilaterales en equilibrio bajo la acción de la carga $f \in \mathscr{V}'$, es compatible si y sólo si

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D}) \geq (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{w}) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \text{Var}_T, \tag{3.240}$$

para $\mathbf{w} \in \text{Kin}_v$ arbitrario.

Demostración. Si $\mathbf{D}$ es compatible tenemos que existe el campo $\mathbf{v} \in \text{Kin}_v$ tal que $\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}$. A su vez, por ser $\mathbf{v} \in \text{Kin}_v = \mathbf{w} + \text{Var}_v$, tenemos $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in \text{Var}_v$ y entonces podemos escribir

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}(\mathbf{v} - \mathbf{w})) \geq 0 \Leftrightarrow (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{v}) \geq (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{w}) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \text{Var}_T, \tag{3.241}$$

lo que implica la condición necesaria.

Supongamos ahora que $\mathbf{D}$ satisface el PPVC luego

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D} - \mathscr{D}\mathbf{w}) \geq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \text{Var}_T \tag{3.242}$$

o sea

$$\mathbf{D} - \mathscr{D}\mathbf{w} \in (\text{Var}_T)^+, \tag{3.243}$$

que implica

$$\mathbf{D} \in \mathscr{D}\mathbf{w} + (\text{Var}_T)^+. \tag{3.244}$$

Recorando que $\text{Var}_T = (\mathscr{D}(\text{Var}_v))^+$ (ver (3.238)) y que $\mathscr{D}(\text{Var}_v)$ es un cono convexo cerrado de vértice en el origen, tenemos finalmente que

$$\mathbf{D} \in \mathscr{D}\mathbf{w} + [(\mathscr{D}(\text{Var}_v))^+]^+ = \mathscr{D}\mathbf{w} + \mathscr{D}(\text{Var}_v) = \mathscr{D}(\text{Kin}_v), \tag{3.245}$$

o sea, $\exists \mathbf{v} \in \text{Kin}_v$ tal que $\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}$, con lo que hemos demostrado el PPVC. ■

Para finalizar esta sección, es importante resaltar que los conceptos presentados para el caso de restricciones unilaterales son totalmente generales, válidos inclusive para restricciones bilaterales o de cuerpo libre. En otras palabras, las restricciones cinemáticas anteriores son un caso particular de un tipo de restricción más general que hemos llamado *unilateral*. Lo anterior se debe simplemente al hecho de que el conjunto de acciones virtuales de movimiento admisibles, Var_v, para el caso de restricciones unilaterales es un cono convexo cerrado de vértice en el origen. Para las otras restricciones cinemáticas (libre y bilateral) Var_v es un caso particular de un cono convexo. Por ejemplo, vimos que el equilibrio en presencia de restricciones unilaterales era caracterizado por la desigualdad, o inecuación (PPV), dada por

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v. \tag{3.246}$$

Ahora bien, si Var_v es un subespacio vectorial de $\mathscr{V}$ (que es el caso de restricciones bilaterales), se sigue que si $\hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v$ resulta $\alpha\hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Luego

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}(\alpha\hat{\mathbf{v}})) + \langle f, \alpha\hat{\mathbf{v}}\rangle \leq 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \text{ y } \forall\alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.247}$$

De la linealidad de los funcionales tenemos

$$\alpha[-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{v}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle] \leq 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \text{ y } \forall\alpha \in \mathbb{R}. \tag{3.248}$$

Como α puede tomar valores positivos y/o negativos, la única manera de satisfacer la expresión anterior es que se verifique

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.249}$$

recuperando así la expresión del PPV para el caso de restricciones bilaterales.

3.8 Descripción Lagrangiana del Principio de la Potencia Virtual

Es importante resaltar que la presentación del PPV, y su dual el PPVC, corresponde a lo que se llama en Mecánica "una descripción Euleriana del PPV (o del PPVC)". En otras palabras, todas las variables: acciones de movimiento, acciones de deformación, esfuerzos internos y externos, son campos definidos en la **configuración actual/espacial** $\mathscr{B}_t$. Así, por ejemplo, en el caso de restricciones bilaterales, el equilibrio estaba dado por

$$P_i + P_e = -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.250}$$

Para un cuerpo tridimensional, la potencia interna P_i está dada por

$$-P_i = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\mathrm{grad}\hat{\mathbf{v}})^s \, dV. \tag{3.251}$$

La expresión anterior es, por así decir, la forma de calcular la potencia interna (cuyo valor no depende de la configuración) a partir de cantidades definidas en **la configuración espacial del cuerpo**.

Para ciertos problemas, esta descripción no representa ningún inconveniente ya que la región $\mathscr{B}_t$ es conocida. En otros problemas, como es en general el caso de sólidos deformables (con cinemática dada como descripto en la Sección 3.2), en los cuales la propia región $\mathscr{B}_t$ es una incógnita del problema. No obstante ello, en estos casos siempre es conocida alguna región que llamaremos región de referencia $\mathscr{B}_r$. En muchos casos esta configuración de referencia es la propia configuración material $\mathscr{B}$. Luego y para estos problemas, será fundamental determinar la **descripción material o referencial**, también llamada **descripción Lagrangiana del PPV (o del PPVC)**.

Para ello, realizando un cambio de coordenadas podemos escribir

$$-P_i = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot \mathrm{grad}^s\hat{\mathbf{v}} \, dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}_m \cdot (\mathrm{grad}^s\hat{\mathbf{v}})_m \det\mathbf{F} \, dV. \tag{3.252}$$

De (3.29) y (3.38), recordamos que $\mathscr{X}_t : \mathscr{B} \to \mathscr{B}_t$ y $\mathbf{T}_m(\mathbf{X}) = \mathbf{T}(\mathscr{X}_t(\mathbf{X}))$, y definimos el campo de desplazamiento en la configuración material como $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ tal que $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{U}(\mathbf{X})$ (vea la (3.5)). Además, de la transformación del diferencial de volúmen de dominio surgió $\det\mathbf{F} = \det\nabla\mathscr{X}_t$. A su vez, de la (3.63) sabemos que $(\operatorname{grad}\mathbf{v})_m = \nabla\mathbf{v}_m\mathbf{F}^{-1}$. Substituyendo estos resultados en la expresión (3.252) y recordando que $\mathbf{T}$ es simétrico, obtenemos

$$-P_i = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}_m \cdot (\operatorname{grad}^s\hat{\mathbf{v}})_m \det\mathbf{F} dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}_m \cdot (\nabla\hat{\mathbf{v}}_m\mathbf{F}^{-1})^s \det\mathbf{F} dV = \\ = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}_m \cdot \nabla\hat{\mathbf{v}}_m\mathbf{F}^{-1} \det\mathbf{F} dV = \int_{\mathscr{B}} (\det\mathbf{F}\mathbf{T}_m\mathbf{F}^{-T}) \cdot \nabla\hat{\mathbf{v}}_m dV = \\ \int_{\mathscr{B}} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \nabla\hat{\mathbf{v}}_m dV. \quad (3.253)$$

El campo $\tilde{\mathbf{T}}$, es conocido como *tensor de tensión de Piola-Kirchhoff de primera especie*. Como podemos apreciar, $\tilde{\mathbf{T}}$ no es simétrico y el elemento dual con el cual realiza potencia está dado por $\nabla\hat{\mathbf{v}}_m$. De todas maneras hemos arribado a una descripción material del cálculo de P_i.

De forma similar, considerando restricciones cinemáticas impuestas sobre la porción del contorno dada por $\partial\mathscr{B}_{tv}$ (cuya representación en la configuración de referencia viene dada por $\partial\mathscr{B}_v$, con vector normal exterior dado por $\mathbf{n}$), la descripción material para el cálculo de la potencia externa P_e se obtiene como sigue dada por

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial\mathscr{B}_t \setminus \partial\mathscr{B}_{tv}} \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS = \\ \int_{\mathscr{B}} \det\mathbf{F}\mathbf{b}_m \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dV + \int_{\partial\mathscr{B} \setminus \partial\mathscr{B}_v} \mathbf{a}_m \|\mathbf{F}^{-1}\mathbf{n}\| \det\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dS = \\ \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}^* \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dV + \int_{\partial\mathscr{B} \setminus \partial\mathscr{B}_v} \mathbf{a}^* \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dS, \quad (3.254)$$

donde hemos usado la transformación del elemento de superficie para pasar a la configuración de referencia.

Haciendo uso de los resultados anteriores llegamos a la expresión de la Descripción Lagrangiana del PPV. Tenemos así: *Dados los esfuerzos externos* $\mathbf{b}^*$ *y* $\mathbf{a}^*$ *en equilibrio (es decir su potencia para toda acción rígida de movimiento es nula), el estado de esfuerzos internos (que para el caso de cuerpos tridimensionales corresponde al tensor de Piola-Kirchhoff de primera especie) a ellos asociado será tal que*

$$-\int_{\mathscr{B}} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \nabla\hat{\mathbf{v}}_m dV + \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}^* \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dV + \int_{\partial\mathscr{B} \setminus \partial\mathscr{B}_v} \mathbf{a}^* \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dS = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}}_m \in (\mathrm{Var}_v)_m, \quad (3.255)$$

donde $(\mathrm{Var}_v)_m$ contiene todos los campos cinemáticamente admisibles descriptos en la configuración de referencia.

Ahora bien, la descripción anterior tiene el inconveniente de trabajar con un campo $\tilde{\mathbf{T}}$ **no simétrico**. Otra descripción material del PPV, pero esta vez involu-

crando un campo de tensiones simétrico, se obtiene observando lo siguiente

$$-P_i = \int_{\mathscr{B}} \tilde{\mathbf{T}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}_m dV = \int_{\mathscr{B}} (\det \mathbf{F} \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}_m dV =$$
$$\int_{\mathscr{B}} (\det \mathbf{F} (\mathbf{F}\mathbf{F}^{-1}) \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T}) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}}_m dV = \int_{\mathscr{B}} (\det \mathbf{F}\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{F}^T \nabla \hat{\mathbf{v}}_m dV =$$
$$\int_{\mathscr{B}} \overline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{F}^T \nabla \hat{\mathbf{v}}_m dV = \int_{\mathscr{B}} \overline{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{F}^T \nabla \hat{\mathbf{v}}_m)^s dV, \quad (3.256)$$

donde

$$\overline{\mathbf{T}} = \det \mathbf{F}\, \mathbf{F}^{-1} \mathbf{T}_m \mathbf{F}^{-T}, \quad (3.257)$$

representa un campo tensorial simétrico definido en $\mathscr{B}$ conocido con el nombre de *tensor de tensión de Piola-Kirchhoff de segunda especie* y el elemento dual con el cual realiza potencia está dado por $(\mathbf{F}^T \nabla \hat{\mathbf{v}}_m)^s$.

Con este resultado obtenemos una segunda descripción material para el PPV, que corresponde a

$$-\int_{\mathscr{B}} \overline{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{F}^T \nabla \hat{\mathbf{v}}_m)^s dV + \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}^* \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dV + \int_{\partial \mathscr{B} \setminus \partial \mathscr{B}_v} \mathbf{a}^* \cdot \hat{\mathbf{v}}_m dS = 0$$
$$\forall \hat{\mathbf{v}}_m \in (\mathrm{Var}_v)_m, \quad (3.258)$$

Veamos el sentido físico del tensor $(\mathbf{F}^T \nabla \hat{\mathbf{v}}_m)^s$. Para ello recordemos que (vea la (3.14))

$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} \nabla \mathbf{U}) \quad (3.259)$$

donde, para simplificar la notación hemos eliminado el subíndice t en $\mathbf{U}_t$. El campo $\hat{\mathbf{v}}_m$ define en cada punto $\mathbf{X} \in \mathscr{B}$ una dirección, podemos así estudiar la tasa de variación de la medida de la deformación $\mathbf{E}(\mathbf{U})$ según la dirección $\hat{\mathbf{v}}_m$. Para ello y con $\alpha \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{U} + \alpha \hat{\mathbf{v}}_m) = \mathbf{E}(\mathbf{U}) + \alpha \mathscr{D}(\mathbf{E}(\mathbf{U}))[\hat{\mathbf{v}}_m] + o(\alpha), \quad (3.260)$$

donde la notación $\mathscr{D}(\mathbf{E}(\mathbf{U}))[\hat{\mathbf{v}}_m]$ representa el *diferencial de Gâteaux de* $\mathbf{E}$ *calculado en el punto* $\mathbf{U}$ *según la dirección* $\hat{\mathbf{v}}_m$, es decir

$$\mathscr{D}(\mathbf{E}(\mathbf{U}))[\hat{\mathbf{v}}_m] = \frac{d}{d\alpha} \mathbf{E}(\mathbf{U} + \alpha \hat{\mathbf{v}}_m) \Big|_{\alpha=0}. \quad (3.261)$$

A su vez

$$\mathbf{E}(\mathbf{U} + \alpha \hat{\mathbf{v}}_m) = \frac{1}{2}\left[\nabla(\mathbf{U} + \alpha \hat{\mathbf{v}}_m) + \nabla^T(\mathbf{U} + \alpha \hat{\mathbf{v}}_m) + \nabla^T(\mathbf{U} + \alpha \hat{\mathbf{v}}_m) \nabla(\mathbf{U} + \alpha \hat{\mathbf{v}}_m)\right] =$$
$$\mathbf{E}(\mathbf{U}) + \frac{\alpha}{2}(\nabla \hat{\mathbf{v}}_m + \nabla^T \hat{\mathbf{v}}_m + \nabla^T \hat{\mathbf{v}}_m \nabla \mathbf{U} + \nabla^T \mathbf{U} \nabla \hat{\mathbf{v}}_m) + \frac{\alpha^2}{2}(\nabla^T \hat{\mathbf{v}}_m \nabla \hat{\mathbf{v}}_m). \quad (3.262)$$

Luego

$$\frac{d}{d\alpha}\mathbf{E}(\mathbf{U}+\alpha\hat{\mathbf{v}}_m)\Big|_{\alpha=0} = \frac{1}{2}(\nabla\hat{\mathbf{v}}_m + \nabla^T\hat{\mathbf{v}}_m + \nabla^T\hat{\mathbf{v}}_m\nabla\mathbf{U} + \nabla^T\mathbf{U}\nabla\hat{\mathbf{v}}_m). \tag{3.263}$$

Por otro lado

$$\mathbf{F}^T\nabla\hat{\mathbf{v}}_m = (\mathbf{I}+\nabla^T\mathbf{U})\nabla\hat{\mathbf{v}}_m = \nabla\hat{\mathbf{v}}_m + \nabla^T\mathbf{U}\nabla\hat{\mathbf{v}}_m. \tag{3.264}$$

Comparando ambas expresiones concluímos que

$$(\mathbf{F}^T\nabla\hat{\mathbf{v}}_m)^s = \frac{d}{d\alpha}\mathbf{E}(\mathbf{U}+\alpha\hat{\mathbf{v}}_m)\Big|_{\alpha=0}. \tag{3.265}$$

Obtenemos así el significado físico que procurábamos. El campo tensorial simétrico $(\mathbf{F}^T\nabla\hat{\mathbf{v}}_m)^s$ representa la tasa de variación de la medida de la deformación $\mathbf{E}$ para la configuración $\mathbf{U}$ según la dirección $\hat{\mathbf{v}}_m$.

Antes de finalizar esta sección es interesante observar

- En las secciones anteriores hemos presentado el PPV en su *descripción espacial*, que es la *natural* ya que el equilibrio entre los esfuerzos internos y externos $\mathbf{T}$ y f es un concepto inherente a la configuración espacial, es decir, el equilibrio entre estos esfuerzos es **siempre** en la configuración actual/espacial. Si bien existen numerosos problemas donde esta configuración es conocida, existen otros donde eso no ocurre. Entretanto, en estos casos lo que conocemos es una configuración que aquí hemos llamado *configuración de referencia o material*. Eso fue la motivación que nos llevó a **reescribir** el PPV en lo que llamamos *descripción Lagrangiana* del PPV. Pero, independientemente de que los cálculos estén siendo realizados en esta configuración de referencia, esto no debe llevar al lector a pensar que el equilibrio está ocurriendo en esa configuración de referencia.
- En la definición espacial del PPV la dependencia respecto a la configuración actual $\mathbf{u}_t$ quedaba establecida por el hecho que los campos y la integral están definidos en la configuración $\mathscr{B}_t$. En la descripción material del PPV haciendo uso del tensor de Piola-Kirchhoff de segunda especie, esta dependencia (ahora en términos de $\mathbf{U}_t$) está explicitamente colocada a través del tensor $\mathbf{F}$.
- Si el problema es dinámico, será necesario incluir en la expresión de la potencia externa $\langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle$ la potencia asociada a las fuerzas de inercia dada por

$$P_e^{inerc} = -\int_{\mathscr{B}_t} \rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV. \tag{3.266}$$

En la descripción material lo anterior toma la forma

$$P_e^{inerc} = -\int_{\mathscr{B}} \rho_m\ddot{\mathbf{U}}\cdot\hat{\mathbf{v}}_m \det\mathbf{F}dV = -\int_{\mathscr{B}} \rho^*\ddot{\mathbf{U}}\cdot\hat{\mathbf{v}}_m dV, \tag{3.267}$$

que es un funcional lineal en $\hat{\mathbf{v}}_m$ (pero no en $\mathbf{U}$).

3.9 Configuraciones Precargadas y con Tensiones Residuales

Como ya hemos mencionado anteriormente, el PPV es válido para cualquier comportamiento del material. De hecho el PPV sólo establece cual es el estado de tensiones $\mathbf{T}$ que equilibra la carga f. Aún más, vimos que no era único ya que la adición de un estado de tensiones autoequilibrado no afecta el equilibrio de $\mathbf{T}$ con f. En otras palabras el PPV no nos informa cual es el estado de deformación que tendría el cuerpo para que, a través de su comportamiento material (ecuaciones constitutivas) defina el estado $\mathbf{T}$ que equilibra f.

Luego, si queremos tener también esta respuesta será necesario agregar al PPV la información del comportamiento del material. En forma resumida y como veremos más adelante, esta información queda caracterizada por una ley de comportamiento (*ecuación constitutiva*) que establece una correspondencia entre la (posiblemente historia de la) deformación y la tensión. En el caso de sólidos, esto es alcanzado mediante ensayos realizados en probetas del material en su estado *virgen* es decir libre de deformaciones y/o tensiones iniciales. En otras palabras y simplificando nuestra presentación al caso de materiales sin memoria, estos ensayos (sumados a principios termodinámicos) proporcionan en general ecuaciones constitutivas del tipo $\overline{\mathbf{T}} = \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E})$. Es decir, establecen una relación entre la deformación $\mathbf{E}$ (o su equivalente $\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}$) y el tensor de Piola-Kirchhoff de segunda especie.

Cuando incorporamos esta información constitutiva en el PPV, el problema del equilibrio (lineal en $\mathbf{T}$) pasa a ser ahora un problema (generalmente altamente no lineal) de determinar $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ [20] (descripción espacial) tal que

$$\int_{\mathscr{B}_t} \left[\frac{1}{\det \mathbf{F}} \mathbf{F}\overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E}((\mathbf{u}_t)_m))\mathbf{F}^T \right]_e \cdot \mathrm{grad}^s \hat{\mathbf{v}} dV = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{3.268}$$

donde la notación $[\cdot]_e$ representa la descripción espacial del campo en cuestión. Luego, en el caso de que la configuración actual/espacial $\mathscr{B}_t$ sea conocida, la solución del problema anterior proporciona no sólo el campo $\mathbf{u}_t$, sino también el estado de deformación y, por lo tanto, el estado de tensiones $\mathbf{T}$ por medio de la correspondiente ecuación constitutiva empleada en la expresión del PPV (3.268), así como también la configuración material $\mathscr{B}$, que es dada por la tansformación

$$\mathbf{x} \in \mathscr{B}_t, \quad \mathbf{x} - \mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = \mathbf{X} \in \mathscr{B}. \tag{3.269}$$

Un ejemplo clásico de esta situación corresponde al caso del proyecto de un puente de gran embergadura donde el proyectista define la configuración del puente en su estado cargado (es decir define $\mathscr{B}_t$) y desea calcular $\mathscr{B}$ que es la configuración del puente durante su etapa constructiva (libre de cargas y deformaciones). Otro caso que ha surgido en estas últimas décadas es en cálculos de hemodinámica, especificamente en la interacción entre la sangre y las paredes arteriales. De hecho, el avance de las máquinas de adquisición de imágenes médicas ha sido tal que en la actualidad

[20] Recuerde que $\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) = (\mathbf{U}_t(\mathbf{X}))_e$ es el campo de desplazamientos definido en la configuración espacial $\mathscr{B}_t$.

es posible conocer la configuración de equilibrio de la arteria para cualquier instante del ciclo cardíaco. O sea, la información obtenida de esas imágenes nos proporciona la configuración sujeta a la carga ejercida por la presión sanguínea así como también por fuerzas actuando en la dirección axial de los vasos.

Para el caso en que $\mathscr{B}_t$ no es conocido pero, en su lugar, conocemos la configuración material $\mathscr{B}$, el PPV consiste ahora en determinar el campo $\mathbf{U}_t \in (\mathrm{Kin}_u)_m$ (ahora su descripción material) tal que

$$\int_{\mathscr{B}} \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E}(\mathbf{U}_t)) \cdot (\mathbf{F}^T \nabla \hat{\mathbf{v}}_m)^s dV = \langle f_m, \hat{\mathbf{v}}_m \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_m \in (\mathrm{Var}_v)_m, \tag{3.270}$$

donde ahora las acciones virtuales de movimiento están caracterizadas por sus descripciones materiales (vea también (3.258)). La solución del problema proporciona así las descripciones materiales del desplazamiento $\mathbf{U}_t$, su correspondiente deformación $\mathbf{E}$, el estado de tensiones asociado mediante la ecuación constitutiva $\overline{\mathbf{T}}$ y, evidentemente, la configuración equilibrada $\mathscr{B}_t$ dada por

$$\mathbf{X} \in \mathscr{B}, \quad \mathbf{X} + \mathbf{U}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t. \tag{3.271}$$

Como comentado anteriormente, existen problemas donde la configuración de referencia (conocida) no es una configuración libre de cargas. Es decir esta configuración ya es una configuración donde un cierto nivel de carga está equilibrado con el estado de tensiones que el cuerpo tiene en esa configuración. En otros problemas (que pueden ser simultáneos con el anterior) tenemos *tensiones residuales* (que surgen en el cuerpo debido a diversos fenómenos/procesos) y que deben ser llevadas en cuenta para poder conocer correctamente el estado final de tensiones cuando el cuerpo es sometido a las cargas de operación. Ejemplo clásico de esto último es lo que ocurre durante el proceso de laminación. Otras veces son incorporadas tensiones residuales en el componente mecánico de manera a favorecer el comportamiento final cuando sujeto a cargas en regimen de funcionamiento. Un ejemplo típico de esta situación es en la fabricación de cañones donde el caño es sometido a una presión interna que lleva al surgimiento de deformaciones plásticas en parte de la espesura de la pared. Luego, al ser retirada esta presión, se da origen a tensiones residuales que aseguran que el regimen de funcionamiento al cual estará siendo expuesto durante su vida útil sea puramente elástico. Otro ejemplo típico del surgimiento de tensiones residuales ocurre en artérias donde diversos procesos de crecimiento y muerte de los tejidos lleva al surgimiento de estas tensiones.

Note que el primer tipo de problema, la configuración conocida, que llamaremos $\mathscr{B}_r$, es una configuración en equilibrio con un cierto nivel de carga f_r. Luego, tal situación no presenta nada de nuevo ya que es exactamente similar el caso del equilibrio en $\mathscr{B}_t$. De esta manera, en esta sección vamos a concentranos en analizar el segundo tipo de problema, donde admitimos la existencia de tensiones residuales. Este problema será estudiado en su descripción espacial (cuando conocemos la configuración actual) y en su descripción material (cuando conocemos esta descripción en lugar de la espacial). Devido a la no linealidad de estas ecuaciones, mostraremos la

deducción de las linealizaciones necesárias para resolver el problema vía la derivada Gâteaux de los operadores tensoriales involucrados.

Para simplificar, limitaremos la presentación al caso de un cuerpo con una distribución de tensiones $\mathbf{T}$ equilibrada en la configuración actual (espacial) $\mathscr{B}_t$ con el sistema de cargas f caracterizado por una presión p actuando sobre la superficie $\partial\mathscr{B}_{tp} \subset \partial\mathscr{B}_t$, cuya normal exterior es $\mathbf{n}$ definida en todo punto de esta superficie. A su vez, vamos a suponer que este estado de tensiones $\mathbf{T}$ está constituido por una distribución de tensiones de carácter constitutivo $\mathbf{T}_C$, donde el subíndice C fue introducido para destacar la componente del estado de tensiones que depende del comportamiento del material, y por una tensión residual, llamada $\mathbf{T}_R$, que vamos a suponer está dada por el campo **conocido** de tensión de Piola–Kirchhoff de segunda especie $\overline{\mathbf{T}}_R$. Luego, tenemos que el tensor de tensión de Cauchy resulta

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_R + \mathbf{T}_C = \left[\frac{1}{\det\mathbf{F}}\mathbf{F}\left[\overline{\mathbf{T}}_R + \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E}((\mathbf{u}_t)_m))\right]\mathbf{F}^T\right]_e. \tag{3.272}$$

Aquí es importante observar que, en el caso de existir una nolinealidad en el comportamiento del material, la ecuación constitutiva que permite caracterizar $\overline{\mathbf{T}}$ en función de $\mathbf{E}((\mathbf{u}_t)_m)$ debe llevar en cuenta el impacto sobre la misma del estado de tensiones residuales $\overline{\mathbf{T}}_R$.

Luego, aplicando el PPV tenemos el siguiente problema variacional: determinar $\mathbf{u}_t \in \mathrm{Kin}_u$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}_t}\left[\frac{1}{\det\mathbf{F}}\mathbf{F}\left[\overline{\mathbf{T}}_R + \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E}((\mathbf{u}_t)_m))\right]\mathbf{F}^T\right]_e \cdot \mathrm{grad}^s\hat{\mathbf{v}}\,dV = \int_{\partial\mathscr{B}_{tp}} p\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS \qquad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.273}$$

Por otro lado y como ya fue mostrado, la descripción material del equilibrio resulta ahora dada por: determinar $\mathbf{U}_t \in (\mathrm{Kin}_u)_m$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}}\left[\overline{\mathbf{T}}_R + \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E}(\mathbf{U}_t))\right]\cdot(\mathbf{F}^T\nabla\hat{\mathbf{v}}_m)^s dV = \int_{\partial\mathscr{B}_p} p_m\mathbf{F}^{-T}\mathbf{N}\cdot\hat{\mathbf{v}}_m \det\mathbf{F}\,dS \qquad \forall\hat{\mathbf{v}}_m \in (\mathrm{Var}_v)_m, \tag{3.274}$$

donde $\mathbf{N}$ es la normal exterior a la superficie $\partial\mathscr{B}_p \subset \partial\mathscr{B}$ donde está aplicada la presión p_m, que es la descripción material de la distribución de presión.

Recordemos que las siguientes relaciones entre $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{U}_t$ se verifican, caracterizando la transfomación (deformación) que lleva $\mathscr{B}$ a $\mathscr{B}_t$ y viceversa

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \mathscr{X}_t(\mathbf{X}) = \mathbf{X} + \mathbf{U}_t(\mathbf{X}), \quad \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t, \mathbf{X} \in \mathscr{B},\\
\mathbf{X} &= \mathscr{X}_t^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{u}_t(\mathbf{x}), \quad \mathbf{X} \in \mathscr{B}, \mathbf{x} \in \mathscr{B}_t,\\
\mathbf{u}_t(\mathbf{x}) &= (\mathbf{U}_t(\mathbf{X}))_e = \mathbf{U}_t(\mathscr{X}_t^{-1}(\mathbf{x})),\\
\mathbf{F} &= \nabla\mathscr{X}_t = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{U}_t,\\
\mathbf{f} &= \mathrm{grad}\,\mathscr{X}_t^{-1} = \mathbf{I} - \mathrm{grad}\,\mathbf{u}_t,
\end{aligned} \tag{3.275}$$

donde $\nabla(\cdot)$ y $\mathrm{grad}(\cdot)$ representan, respectivamente, los gradientes respecto en las coordenadas materiales y espaciales. Finalmente tenemos también que

$$[\mathbf{F}^{-1}]_e = \mathbf{f}, \tag{3.276}$$

$$[\mathbf{f}^{-1}]_m = \mathbf{F}. \tag{3.277}$$

3.10 Linealizaciones del PPV

Como ya mencionado, los dos problemas (3.273) y (3.274) son en general altamente no lineales. Luego, para resolverlos será necesario recurrir, por ejemplo, a métodos del tipo Newton–Raphson, en los cuales es obligatorio el cálulo de las tangentes para cada paso del proceso iterativo. Estas tangentes son obtenidas a través del cálculo de las derivadas de Gâteaux de los operadores presentes en esas ecuaciones no lineales (vea Apéndice C.5). En primer lugar, veremos algunos resultados básicos que serán útiles para realizar esos cálculos tanto para el caso de la descripción espacial como el de la descripción material.

3.10.1 Resultados Básicos

Consideremos el (campo) desplazamiento descripto materialmente $\mathbf{U}$ ($\mathbf{u}$ es su descripción espacial) [21] perturbado con el campo $\delta\mathbf{U}$ de la siguiente manera $\mathbf{U}_\tau = \mathbf{U} + \tau\delta\mathbf{U}$. Con esto, el gradiente de deformación, originalmente dado por $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{U}$, resulta ahora $\mathbf{F}_\tau = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{U}_\tau = \mathbf{I} + \nabla(\mathbf{U} + \tau\delta\mathbf{U})$. Con esto en mano vamos a calcular las derivadas de Gâteaux de los siguientes operadores envolviendo $\mathbf{F}_\tau$. Estos resultados serán útiles en la obtención de las linealizaciones que estamos buscando. Tenemos así

$$\left.\frac{d}{d\tau}\mathbf{F}_\tau\right|_{\tau=0} = \nabla\delta\mathbf{U} = (\mathrm{grad}\,\delta\mathbf{u})_m\mathbf{F}, \tag{3.278}$$

$$\left.\frac{d}{d\tau}\mathbf{F}_\tau^{-1}\right|_{\tau=0} = -\mathbf{F}^{-1}(\nabla\delta\mathbf{U})\mathbf{F}^{-1} = -\mathbf{F}^{-1}(\mathrm{grad}\,\delta\mathbf{u})_m, \tag{3.279}$$

$$\left.\frac{d}{d\tau}\det\mathbf{F}_\tau\right|_{\tau=0} = \det\mathbf{F}(\mathbf{F}^{-T}\cdot\nabla\delta\mathbf{U}) = \det\mathbf{F}(\mathrm{div}\,\delta\mathbf{u})_m, \tag{3.280}$$

$$\left.\frac{d}{d\tau}\mathbf{E}_\tau\right|_{\tau=0} = (\mathbf{F}^T(\nabla\delta\mathbf{U}))^s = \mathbf{F}^T(\mathrm{grad}\,\delta\mathbf{u})^s_m\mathbf{F}. \tag{3.281}$$

Ejercicio 3.2. Probar que las identidades (3.278), (3.279), (3.280) y (3.281) son válidas.

[21] Aquí simplificamos la notación poniendo $\mathbf{U} = \mathbf{U}_t$ para la descripción material del desplazamiento y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_t$ para la espacial.

El lector podrá notar que en las expresiones anteriores, los diferenciales de Gâteaux fueron escritos de dos maneras diferentes: (i) una en función de campos definidos en la configuración material, $\delta\mathbf{U}$, y otra en función de su descripción espacial, $\delta\mathbf{u}$. Esto será usado en el cálculo de la linealización de la ecuación variacional (3.274).

Consideremos ahora la descripción espacial del campo $\mathbf{u}$ que es perturbado produciendo $\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}$. Luego $[\mathbf{F}^{-1}]_e = \mathbf{I} - \operatorname{grad}\mathbf{u}$ resulta en $[\mathbf{F}^{-1}]_{e,\tau} = \mathbf{I} - \operatorname{grad}\mathbf{u}_\tau = \mathbf{I} - \operatorname{grad}(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u})$. Las derivadas Gâteaux de los siguientes operadores envolviendo $\mathbf{F}_{e,\tau}$ están dadas por

$$\frac{d}{d\tau}[\mathbf{F}^{-1}]_{e,\tau}\bigg|_{\tau=0} = -\operatorname{grad}\delta\mathbf{u}, \tag{3.282}$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{F}_{e,\tau}\bigg|_{\tau=0} = \mathbf{F}_e(\operatorname{grad}\delta\mathbf{u})\mathbf{F}_e, \tag{3.283}$$

$$\frac{d}{d\tau}\det\mathbf{F}_{e,\tau}\bigg|_{\tau=0} = \det\mathbf{F}_e(\mathbf{F}_e^T\cdot\operatorname{grad}\delta\mathbf{u}), \tag{3.284}$$

$$\frac{d}{d\tau}\mathbf{E}_{e,\tau}\bigg|_{\tau=0} = \mathbf{F}_e^T(\mathbf{F}_e(\operatorname{grad}\delta\mathbf{u}))^s\mathbf{F}_e. \tag{3.285}$$

Ejercicio 3.3. Probar que las identidades (3.282), (3.283), (3.284) y (3.285) son válidas.

Finalmente, resaltamos que la notación $(\cdot)^s$ indica la parte simétrica del correspondiente tensor de segundo orden $(\cdot)$. Estas expresiones serán usadas en el cálculo de la linealización de la ecuación variacional (3.273).

3.10.2 Descripción Espacial Conocida

El problema (3.273) puede ser escrito de una manera compacta de la siguiente forma: determinar $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u$ tal que

$$\langle\mathscr{R}_e(\mathbf{u}),\hat{\mathbf{v}}\rangle_{\mathscr{B}_t} = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.286}$$

La técnica de Newton–Raphson aplicada al problema anterior consiste en la siguiente aproximación: para un punto $\mathbf{u}^k \in \mathrm{Kin}_u$ calcular el incremento $\delta\mathbf{u} \in \mathrm{Var}_v$ tal que

$$\langle\mathscr{R}_e(\mathbf{u}^k),\hat{\mathbf{v}}\rangle_{\mathscr{B}_t} + \frac{d}{d\tau}\langle\mathscr{R}_e(\mathbf{u}^k+\tau\delta\mathbf{u}),\hat{\mathbf{v}}\rangle_{\mathscr{B}_t}\bigg|_{\tau=0} = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.287}$$

A medida que las iteraciones avanzan (k crece) se espera que $\mathbf{u}^k \to \mathbf{u}$ y, por otro lado, $\delta\mathbf{u} \to \mathbf{0}$. Llevando en cuenta los resultados presentados en la Sección (3.10.1) no resulta difícil obtener la derivada en (3.287), llegando así al siguiente problema

linealizado: dado $\mathbf{u}^k \in \mathrm{Kin}_u$, determinar $\delta\mathbf{u} \in \mathrm{Var}_v$ tal que

$$-\int_{\mathscr{B}_t} (\mathbf{F}_e^T \cdot \operatorname{grad}\delta\mathbf{u})\mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})^s \, dV + \int_{\mathscr{B}_t} 2(\mathbf{F}_e(\operatorname{grad}\delta\mathbf{u})\mathbf{T}) \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})^s \, dV + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{D}_e(\mathbf{F}_e \operatorname{grad}\delta\mathbf{u})^s \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})^s \, dV = -\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})^s \, dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tp}} p\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{3.288}$$

donde

$$\mathbf{T} = \left[\frac{1}{\det\mathbf{F}} \mathbf{F}\big(\overline{\mathbf{T}}_R + \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_m))\big)\mathbf{F}^T \right]_e, \tag{3.289}$$

$$\mathbf{D}_e(\mathbf{F}_e \operatorname{grad}\delta\mathbf{u})^s = \frac{1}{\det\mathbf{F}_e} \mathbf{F}_e \left[\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{T}}}{\partial\mathbf{E}} \right)_e \mathbf{F}_e^T (\mathbf{F}_e \operatorname{grad}\delta\mathbf{u})^s \mathbf{F}_e \right] \mathbf{F}_e^T. \tag{3.290}$$

Como podemos apreciar, $\mathbf{D}_e$ es un tensor de quarto orden que transforma tensores simétricos de segundo orden en tensores también simétricos de segundo orden y cuyas componentes en un sistema cartesiano están dadas por

$$[\mathbf{D}_e]_{ijkl} = \frac{1}{\det\mathbf{F}_e} [\mathbf{F}_e]_{ia} [\mathbf{F}_e]_{jb} [\mathbf{F}_e]_{kc} [\mathbf{F}_e]_{ld} \left[\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{T}}}{\partial\mathbf{E}} \right)_e \right]_{abcd}. \tag{3.291}$$

Ejercicio 3.4. Provar que la forma lineal (3.288) es válida.

3.10.3 Descripción Material Conocida

De manera similar a la realizada con el PPV en su descripción espacial, el problema (3.274) puede ser reescrito en forma compacta resultando en el problema siguiente: determinar $\mathbf{U} \in (\mathrm{Kin}_u)_m$ tal que

$$\langle \mathscr{R}_m(\mathbf{U}), \hat{\mathbf{v}}_m \rangle_{\mathscr{B}} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_m \in (\mathrm{Var}_v)_m. \tag{3.292}$$

La técnica de Newton–Raphson aplicada al problema anterior consiste en el siguiente problema lineal: para un punto $\mathbf{U}^k \in (\mathrm{Kin}_u)_m$ calcular el incremento $\delta\mathbf{U} \in (\mathrm{Var}_v)_m$ tal que

$$\langle \mathscr{R}_m(\mathbf{U}), \hat{\mathbf{v}}_m \rangle_{\mathscr{B}} + \frac{d}{d\tau} \langle \mathscr{R}_m(\mathbf{U}^k + \tau\delta\mathbf{U}), \hat{\mathbf{v}}_m \rangle_{\mathscr{B}} \Big|_{\tau=0} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_m \in (\mathrm{Var}_v)_m. \tag{3.293}$$

A medida que el proceso iterativo avanza (k crece) se espera que $\mathbf{U}^k \to \mathbf{U}$ y, por otro lado, $\delta\mathbf{U} \to \mathbf{0}$. Llevando en cuenta los resultados presentados en la Sección 3.10.1 no resulta difícil tampoco en este caso obtener la derivada en (3.293). Sin embargo, es usual escribir estas derivadas no en la configuración material $\mathscr{B}$, y sí en la configura-

ción espacial *actualizada para la iteración k*, que llamaremos $\mathscr{B}_t^k$, y que se obtiene aplicando la transformación $\mathbf{x}^k = \mathbf{X} + \mathbf{U}^k$ (fue por esto que en la Sección 3.10.1 hemos escrito de dos maneras los diferenciales de Gâteaux de los operadores). En lo que sigue, y para simplificar la notación, vamos a eliminar el índice k con lo que esta configuración actulizada pasará a ser designada simplemente por $\mathscr{B}_t$ que el lector no debe confundir con la *verdadera* configuración espacial de equilibrio. De la misma forma, los campos estarán descriptos en esta configuración, y por lo tanto tampoco haremos diferencia entre la notaciones $(\cdot)_{e^k}$ y $(\cdot)_e$. Observe por lo tanto que haremos abuso de notación, denotando $\mathrm{Kin}_u = ((\mathrm{Kin}_u)_m)_{e^k}$ y $\mathrm{Var}_u = ((\mathrm{Var}_u)_m)_{e^k}$. Obtenemos así el siguiente problema linealizado: dado $\mathbf{U}_e \in \mathrm{Kin}_u$, determinar $\delta\mathbf{U}_e \in \mathrm{Var}_v$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{D}_e(\operatorname{grad}\delta\mathbf{U}_e)^s \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})^s\, dV + \int_{\mathscr{B}_t} (\operatorname{grad}\delta\mathbf{U}_e)\mathbf{T}_e \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})\, dV \\ + \int_{\partial\mathscr{B}_{tp}} [p((\operatorname{grad}\delta\mathbf{U}_e)^T - (\operatorname{div}\delta\mathbf{U}_e)\mathbf{I})\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}]\, dS = \\ - \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T}_e \cdot (\operatorname{grad}\hat{\mathbf{v}})\, dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tp}} p\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}\, dS \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \end{aligned} \tag{3.294}$$

donde

$$\mathbf{T}_e = \left[\frac{1}{\det\mathbf{F}}\mathbf{F}\big(\overline{\mathbf{T}}_R + \overline{\mathbf{T}}(\mathbf{E}(\mathbf{U}))\big)\mathbf{F}^T\right]_e, \tag{3.295}$$

$$\mathbf{D}_e(\operatorname{grad}\delta\mathbf{U}_e)^s = \frac{1}{\det\mathbf{F}_e}\mathbf{F}_e\left[\left(\frac{\partial\overline{\mathbf{T}}}{\partial\mathbf{E}}\right)_e \mathbf{F}_e^T(\operatorname{grad}\delta\mathbf{U}_e)^s\mathbf{F}_e\right]\mathbf{F}_e^T. \tag{3.296}$$

Ejercicio 3.5. Provar que la forma lineal (3.294) es válida.

3.11 Deformaciones y Desplazamientos Infinitesimales

Ciertos problemas en la Mecánica de los Medios Continuos pueden ser modelados dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales y pequeños desplazamientos. En este caso todas las configuraciones $\mathscr{B}_t, t \in [t_0, t_f]$, se confunden con una única configuración $\mathscr{B}$ del espacio euclidiano tridimensional. Cuando esto ocurre, hemos visto que (asumiendo que la configuración de referencia coincide con la configuración $\mathscr{B}$)

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{I}, \quad \nabla(\cdot) \equiv \operatorname{grad}(\cdot), \quad \mathbf{E} \equiv (\nabla\mathbf{u})^s = \mathscr{D}\mathbf{u}, \tag{3.297}$$

donde $\mathbf{u}$ es el campo de desplazamientos. Por otra parte, se verifica también que

$$\mathbf{T} \equiv \tilde{\mathbf{T}} \equiv \overline{\mathbf{T}}. \tag{3.298}$$

Es decir, el tensor de tensiones de Cauchy puede confundirse con los tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff de primera y segunda especie.

Dentro de estas hipótesis vamos a rever el PPV y el PPVC para cada uno de los casos correspondientes a los diferentes tipos de restricciones cinemáticas estudiados.

3.11.1 Restricciones Bilaterales

Supongamos que el conjunto de configuraciones cinemáticamente admisibles Kin_u es independiente del tiempo. En este caso y supuesto restricciones bilaterales, Kin_u es una variedad lineal (translación) del subespacio vectorial Var_u de $\mathscr{U}$. En otras palabras y para un incremento de tiempo suficientemente pequeño (infinitesimal) δt, siempre podremos identificar el subespacio de todas las acciones de movimiento admisibles virtuales, Var_v, con Var_u formado por todos los desplazamientos virtuales cinemáticamente admisibles. Luego

$$\mathrm{Kin}_u = \mathbf{u}_o + \mathrm{Var}_u, \quad \mathbf{u}_o \in \mathrm{Kin}_u \text{ arbitrario.} \tag{3.299}$$

La definición del equilibrio puede ahora ser dada a partir del Principio del Trabajo Virtual (PTV) que no es otra cosa que el PPV cuando identificamos la acción de movimiento virtual $\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$ con el desplazamiento virtual $\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{v}}\delta t \in \mathrm{Var}_u$ [22]. De esta manera el PTV consistirá en lo siguiente: *el sistema de cargas f está en equilibrio (estático) en la configuración* $\mathbf{u}$ *dentro de las hipótesis de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos si*

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.300}$$

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u. \tag{3.301}$$

Es decir, el trabajo virtual de las cargas aplicadas debe ser nulo para todo desplazamiento virtual rígido cinemáticamente admisible y, a su vez, la suma de los trabajos internos y externos debe ser nula para todo desplazamiento virtual cinemáticamente admisible. Así, el lector podrá notar que basta substituir las palabras *potencia* por *trabajo* y *acción de movimiento* por *desplazamiento*, obteniendo así el PTV a partir del PPV.

Ejercicio 3.6. Utilizando un razonamiento totalmente similar, plantee el Principio del Trabajo Virtual Complementario en el caso de deformaciones y desplazamientos infinitesimales.

Por último debemos observar que en la definición de equilibrio, la configuración actual no juega ningún papel. Es decir, el equilibrio dentro de las hipótesis de deformaciones y desplazamientos infinitesimales con restricciones bilaterales es una

[22] En la literatura es común ver esta exigencia de desplazamientos virtuales infinitamente pequeños. Esta restricción no es necesaria ya que el PPV es lineal en las acciones de movimiento virtuales. Por lo tanto, no interesa la magnitud de esta acción y sí su dirección. En otras palabras, en el PTV la magnitud del desplazamiento virtual $\hat{\mathbf{u}}$ no juega ningún papel.

propiedad independiente de la configuración. Esto último como veremos en breve, no ocurre cuando tenemos restricciones unilaterales.

3.11.2 Restricciones Unilaterales

Supongamos ahora que Kin_u es una variedad cónica que depende de la configuración actual que estemos considerando. Como ya vimos

$$\mathrm{Kin}_u(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \tag{3.302}$$

donde hemos colocado la dependencia de $\mathbf{u}$ en evidencia, pues

$$\mathrm{Var}_u(\mathbf{u}) = \{\hat{\mathbf{u}} \in \mathscr{U}; \mathbf{u} + \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Kin}_u\}, \tag{3.303}$$

es el conjunto de todos los desplazamientos virtuales (perturbaciones que podemos realizar sobre elementos en $\mathrm{Kin}_u(\mathbf{u})$) cinemáticamente admisibles que podemos introducir en la configuración $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u$. Nuevamente, podemos identificar el cono convexo de acciones de movimiento cinemáticamente admisibles Var_v en la configuración $\mathbf{u}$ con el cono convexo $\mathrm{Var}_u(\mathbf{u})$ de desplazamientos virtuales a través de $\hat{\mathbf{u}} = \delta t \hat{\mathbf{v}}$. Un ejemplo de este caso puede verse en la Figura 3.14.

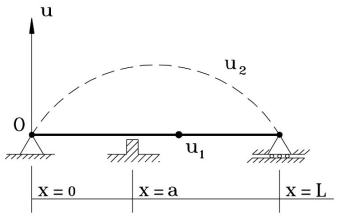


Fig. 3.14 Viga sobre apoyo unilateral en el punto $x = a$.

Para este ejemplo tenemos

$$\mathrm{Kin}_u(u_1) = \{u \in \mathscr{U}, u(0) = u(L) = 0, u(a) \geq 0\} = \mathrm{Var}_u(u_1), \tag{3.304}$$

donde u_1 es la configuración (línea recta) indicada en la figura. Supongamos ahora la viga en la configuración u_2 tal que

$$u_2(0) = u_2(L) = 0 \quad \text{y} \quad u_2(a) = b > 0. \tag{3.305}$$

Luego, en esta nueva configuración tenemos

$$\mathrm{Kin}_u(u_2) = u_2 + \mathrm{Var}_u(u_2), \tag{3.306}$$

donde

$$\mathrm{Var}_u(u_2) = \{u \in \mathscr{U}, u(0) = u(L) = 0, u(a) \geq -b\}. \tag{3.307}$$

Este ejemplo nos muestra claramente que Var_u depende de la configuración que estemos adoptando. Aquí es interesante resaltar que, si bien por las hipótesis asumidas estamos confundiendo todas las configuraciones con una única configuración, eso no implica que lo mismo estemos haciendo con las restricciones unilaterales. Es decir, para una configuración el vínculo unilateral está activo (lo que ocurre en la configuración u_1) mientras que en otro no lo está (como ocurre con la configuración u_2 y donde para este caso estamos permitiendo desplazamientos virtuales positivos y/o negativos pero siempre mayores que $-b$).

Luego, aún dentro de las hipótesis de deformaciones y desplazamientos infinitesimales, el PTV define el equilibrio para una dada configuración. Tenemos así: *el sistema de cargas f está en equilibrio (estático) en la configuración* $\mathbf{u}$ *dentro de las hipótesis de pequeñas deformaciones y pequeños desplazamientos si*

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in Var_u(\mathbf{u}) \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{3.308}$$

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}). \tag{3.309}$$

Vemos así que en el caso de restricciones unilaterales y aún dentro de la teoría de deformaciones y desplazamientos infinitesimales, **el equilibrio depende de la configuración en que se encuentra el cuerpo**. Lo anterior nos muestra nuevamente la no linealidad intrínseca asociada a este tipo de restricciones cinemáticas.

3.12 Comentarios Finales

Como pudimos apreciar a lo largo de este capítulo, la Formulación Variacional se constituye en la forma más natural para abordar los problemas de la Mecánica, proporcionando una sistemática para modelar un determinado problema con el mínimo de hipótesis. En los capítulos siguientes el lector podrá ver en detalle la aplicación de esta metodología en diferentes problemas.

Si el modelo así construido no corresponde a la realidad, el mismo podrá ser mejorado bastando para ello *mejorar* la cinemática adoptada con lo que ampliaremos nuestro espacio de acciones de movimiento y nuestra definición de tasas de deformación. La dualidad entre acciones de movimiento y esfuerzos permite automáticamente caracterizar los esfuerzos internos y externos que serán permitidos (compatibles) en el modelo (ver [113]–[115] y [182]).

Observe también que en todo el análisis realizado hasta el presente momento no hemos hecho intervenir el *comportamiento del material* que constituye el cuerpo en estudio. Evidentemente, la respuesta del cuerpo a una determinada acción externa dependerá del material que lo compone. Este aspecto será tratado en los capítulos siguientes. También es importante resaltar que nuestra presentación se limitó a mostrar un sólo aspecto de la mecánica donde los efectos y acoplamientos térmicos, electromagnéticos, etc. fueron dejados de lado. No obstante esto, la Formulación Va-

riacional puede fácilmente extenderse de manera a incluir estos efectos, para lo cual bastará aumentar nuestro concepto de acciones de movimiento (véase, por ejemplo el trabajo [182] donde se encuentra una amplia bibliografía).

Por último, como resultará evidente más adelante, la Formulación Variacional nos proporcionará también el (los) algoritmo(s) numérico(s) más adecuado(s) para el cálculo de soluciones aproximadas.

3.13 Lectura Adicional

Al lector interesado en aumentar sus conocimientos en los temas expuestos en este capítulo, se recomienda la lectura de los libros de P. Chadwic, [47], de G. Duvaut y J. L Lions, [75], de I. Ekeland and R. Temam, [77], de R. A. Feijóo, [83], de W. Flugge, [105], de M. Fremond, [108], de Y. C. Fung, [110], de P. Germain, [116], y sus trabajos asociados al tema del Principio de la Potencia Virtual ([113]–[115]), de M. E. Gurtin, [129]–[130], C. Lanczos, [163], de I-Shih Liu, [169], de L. E. Malvern, [176], de G. A. Maugin, [182], de S. G. Mikhlin, [191], de J. T. Oden y J. N. Reddy, [223], de P. D. Panagiotopoulos, [230], de C. Truesdell, [292], y de C. Truesdell y R. A. Toupin, [293], de K. Washizu, [296], y los trabajos de G. Romano y colaboradores, [247]–[254], y los trabajos [92]–[94], [279], citados en la bibliografía.

Capítulo 4
Cuerpos de Material Hiperelástico en Deformaciones Infinitesimales

4.1 Introducción

En el Capítulo 3 hemos presentado los principios generales de la mecánica y, como pudimos apreciar, estos principios son comunes a los diferentes cuerpos e independientes del material que los constituye.

En este capítulo mostraremos la aplicación de los principios de la mecánica al caso de cuerpos de material hiperelástico en deformaciones infinitesimales. Para ello, trataremos de seguir la siguiente línea de presentación: definición de la ecuación constitutiva y determinación de sus propiedades, obtención de formulaciones variacionales y principios de mínimo, soluciones aproximadas, algoritmos numéricos, y ejemplos.

4.2 Comportamiento Uniaxial

Un material elástico lineal se caracteriza porque al realizar un ensayo uniaxial obtemos una relación

$$\sigma = I\!E\,\varepsilon, \quad I\!E > 0, \tag{4.1}$$

donde σ es la tensión, ε la deformación y $I\!E$ el módulo de elasticidad de Young.

A continuación , vamos a resaltar algunas características que, si bien son obvias, nos resultarán útiles en nuestra presentación

i) $\varepsilon = 0 \Rightarrow \sigma = 0$, en otras palabras, estamos admitiendo que en la configuración en que el cuerpo se encuentra no tiene ni deformación ni tensión inicial.
ii) Por ser $I\!E \neq 0$ existe la relación inversa $\varepsilon = I\!E^{-1}\sigma$.
iii) Podemos definir la función *densidad de energía de deformación* $\pi = \pi(\varepsilon)$ dada por

$$\pi(\overline{\varepsilon}) = \int_0^{\overline{\varepsilon}} \sigma(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{\overline{\varepsilon}} I\!E\,\varepsilon\,d\varepsilon = \frac{1}{2} I\!E\,\overline{\varepsilon}^2 \geq 0. \tag{4.2}$$

iv) La densidad de energía de deformación es nula si y sólo si $\overline{\varepsilon} = 0$.

v) De la definición de la densidad de energía de deformación obtenemos

$$\overline{\sigma} = \left.\frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon}\right|_{\overline{\varepsilon}}, \tag{4.3}$$

en otras palabras, la tensión $\overline{\sigma}$ asociada por la ecuación constitutiva elástica (lineal en el ejemplo) con la deformación $\overline{\varepsilon}$, ver la expresión (4.1), se obtiene calculando la derivada de la densidad de energía de deformación y evaluándola en el punto $\overline{\varepsilon}$.

vi) La función densidad de energía de deformación es, en el ejemplo que nos ocupa, una parábola con ramas ascendentes ($I\!E > 0$) y, por lo tanto, es una función estrictamente convexa. Esta propiedad la colocaremos en evidencia de una manera más general. En efecto

$$\pi(\varepsilon) = \pi(\varepsilon_0) \left.\frac{d\pi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2\pi}{d\varepsilon^2}\right|_{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 = \\ \pi(\varepsilon_0) + I\!E\,\varepsilon_0(\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{1}{2} I\!E (\varepsilon - \varepsilon_0)^2 \geq \pi(\varepsilon_0) + \sigma(\varepsilon_0)(\varepsilon - \varepsilon_0), \tag{4.4}$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si $\varepsilon = \varepsilon_0$.

vii) De la misma manera que definimos la función de densidad de energía de deformación π, podemos definir la función $\pi^* = \pi^*(\sigma)$ llamada función *densidad de energía complementaria* dada por

$$\pi^*(\overline{\sigma}) = \int_0^{\overline{\sigma}} \varepsilon(\sigma) d\sigma = \int_0^{\overline{\sigma}} \frac{1}{I\!E} \sigma \, d\sigma = \frac{1}{2I\!E} \overline{\sigma}^2 \geq 0, \tag{4.5}$$

e igual a cero si y sólo si $\overline{\sigma} = 0$.

viii) De la definición anterior podemos observar que

$$\overline{\varepsilon} = \left.\frac{d\pi^*}{d\sigma}\right|_{\overline{\sigma}}, \tag{4.6}$$

es decir, la deformación $\overline{\varepsilon}$ asociada por la ecuación constitutiva elástica con la tensión $\overline{\sigma}$ puede obtenerse por intermedio del cálculo de la derivada de la función densidad de energía complementaria calculada en el punto $\overline{\sigma}$.

ix) También observamos que

$$\pi^*(\sigma) = \pi^*(\sigma_0) + \left.\frac{d\pi^*}{d\sigma}\right|_{\sigma_0} (\sigma - \sigma_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{d^2\pi^*}{d\sigma^2}\right|_{\sigma_0} (\sigma - \sigma_0)^2 \geq \\ \pi^*(\sigma_0) + \varepsilon(\sigma_0)(\sigma - \sigma_0), \tag{4.7}$$

e igual si y sólo si $\sigma = \sigma_0$. En otras palabras, la función de densidad de energía complementaria es también estrictamente convexa.

x) Los resultados anteriores son totalmente válidos aún para materiales con comportamiento elástico no lineal siempre que la relación constitutiva $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (o su inversa $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$) sea una función monótona creciente, es decir

$$(\sigma^B - \sigma^A)(\varepsilon^B - \varepsilon^A) \geq 0 \quad \forall \varepsilon^A, \varepsilon^B, \tag{4.8}$$

e igual a cero si y sólo si $\varepsilon^A = \varepsilon^B$ donde $\sigma^B = \sigma\left(\varepsilon^B\right)$ y $\sigma^A = \sigma\left(\varepsilon^A\right)$. En particular, para $\varepsilon^B = \varepsilon^A + d\varepsilon = \varepsilon$ y empleando la notación $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ tenemos

$$(\sigma - \sigma^A)d\varepsilon \geq 0, \tag{4.9}$$

e integrando entre ε^A y ε

$$\int_{\varepsilon^A}^{\varepsilon} (\sigma - \sigma^A)d\varepsilon \geq 0, \tag{4.10}$$

de donde

$$\int_{\varepsilon^A}^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon - \sigma^A(\varepsilon - \varepsilon^A) \geq 0 \Rightarrow \pi(\varepsilon) - \pi(\varepsilon^A) \geq \sigma^A(\varepsilon - \varepsilon^A), \tag{4.11}$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si $\varepsilon = \varepsilon^A$.
De forma similar, considere que la ecuación $\varepsilon = \varepsilon(\sigma)$ es monótona creciente, es decir

$$(\varepsilon^B - \varepsilon^A) \cdot (\sigma^B - \sigma^A) \geq 0 \quad \forall \sigma^A, \sigma^B, \tag{4.12}$$

e igual a cero si y sólo si $\sigma^B = \sigma^A$. Nuevamente, para $\sigma^B = \sigma = \sigma^A + d\sigma$ tenemos

$$(\varepsilon - \varepsilon^A)d\sigma \geq 0, \tag{4.13}$$

e integrando entre σ^A y σ resulta

$$\int_{\sigma^A}^{\sigma} (\varepsilon - \varepsilon^A)d\sigma \geq 0, \tag{4.14}$$

de donde

$$\int_{\sigma^A}^{\sigma} \varepsilon d\sigma - \varepsilon^A(\sigma - \sigma^A) \geq 0 \Rightarrow \pi^*(\sigma) - \pi^*(\sigma^A) \geq \varepsilon^A(\sigma - \sigma^A), \tag{4.15}$$

y donde la igualdade se verifica si y sólo si $\sigma = \sigma^A$.

xi) A continuación vamos a poner en evidencia otra propiedad implícita de las funciones π y π^*. Sean σ^B y ε^A una tensión y una deformación *no asociadas* por la ecuación constitutiva elástica, luego

$$\pi(\varepsilon^A) + \pi^*(\sigma^B) \geq \sigma^B \varepsilon^A, \tag{4.16}$$

e igual a cero si y sólo si ε^A y σ^B están relacionadas por la ecuación constitutiva. La Figura 4.1 representa gráficamente el resultado anterior. Es importante

resaltar que este resultado es independiente de la linealidad de la ecuación constitutiva, dependiendo unicamente de la monotonicidad de la misma.

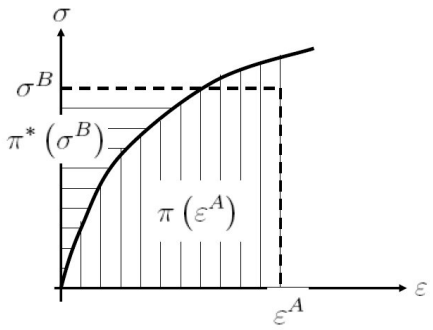


Fig. 4.1 Propiedad de las funciones π e π^*

xii) El resultado anterior nos proporciona una técnica para construir π^* a partir del conocimiento de π y viceversa. Este procedimiento es llamado *transformación de Legendre* y en la actualidad también es conocido como determinación de la función dual (π^* es la función dual de π). En efecto, supongamos que conocemos $\pi = \pi(\varepsilon)$, luego podemos definir la función dual $\pi^* = \pi^*(\sigma)$ de π, tal que su valor en $\sigma = \sigma^*$ esté dado por

$$\pi^*(\sigma^*) = \max_{\varepsilon}(\sigma^*\varepsilon - \pi(\varepsilon)). \tag{4.17}$$

En el caso de la ecuación constitutiva elástica lineal teníamos

$$\pi(\varepsilon) = \frac{1}{2}I\!E\varepsilon^2, \tag{4.18}$$

luego el máximo de $\sigma^*\varepsilon - \pi(\varepsilon)$ se verifica para el punto ε^* tal que

$$\frac{d}{d\varepsilon}(\sigma^*\varepsilon - \pi(\varepsilon)) = 0, \tag{4.19}$$

es decir

$$\sigma^* - I\!E\varepsilon^* = 0 \Rightarrow \varepsilon^* = \frac{\sigma^*}{I\!E}. \tag{4.20}$$

Substituyendo este resultado en (4.17) obtenemos

$$\pi^*(\sigma^*) = \sigma^*\varepsilon^* - \pi(\varepsilon^*) = \frac{\sigma^{*2}}{I\!E} - \frac{1}{2}I\!E\frac{\sigma^{*2}}{I\!E^2} = \frac{1}{2}\frac{\sigma^{*2}}{I\!E}, \tag{4.21}$$

resultado al cual habíamos arribado a través de la definición de la función densidad de energía complementaria.

En forma similar podemos definir π como la función dual de π^* a través del siguiente problema

$$\pi(\varepsilon^*) = \max_{\sigma}(\sigma\varepsilon^* - \pi^*(\sigma)) \tag{4.22}$$

y un razonamiento enteramente similar al realizado para π^* nos conduce, para el caso lineal, a

$$\pi(\varepsilon^*) = \frac{1}{2}I\!E\varepsilon^{*2}. \tag{4.23}$$

Ecuación Constitutiva Estado Uniaxial

Resumiendo, decimos que la tensión $\overline{\sigma}$ y la deformación $\overline{\varepsilon}$ están asociadas a través de la equación constitutiva si se verifica cualquiera de las siguientes expresiones, todas ellas equivalentes.

1. La ecuación constitutiva es una función monótona creciente

$$\overline{\sigma} = \sigma(\overline{\varepsilon}), \tag{4.24}$$

o su inversa

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon(\overline{\sigma}). \tag{4.25}$$

2. Existe una función energía de deformación estrictamente convexa, π, tal que

$$\overline{\sigma} = \left.\frac{d\pi}{d\varepsilon}\right|_{\overline{\varepsilon}}, \tag{4.26}$$

o la función energía de deformación complementaria, π^*, tal que

$$\overline{\varepsilon} = \left.\frac{d\pi^*}{d\sigma}\right|_{\overline{\sigma}}. \tag{4.27}$$

3. Dado ε y σ se verifica

$$\pi(\varepsilon) + \pi^*(\sigma) \geq \sigma\varepsilon, \tag{4.28}$$

e igual si y sólo si σ, ε están relacionados por la ecuación constitutiva.

4.3 Extensión a Estados Múltiples

La generalización a estados múltiple de tensión-deformación seguirá un camino puramente fenomenológico, que consistirá en generalizar los resultados obtenidos para el caso de estados uniaxiales visto en la sección anterior. Para ello, vimos que en el caso lineal $\sigma = I\!E\varepsilon$, es decir, teníamos una aplicación lineal del espacio de deformaciones sobre su dual (topológico) de tensiones.

En base a esto, su generalización inmediata consistirá en una aplicación lineal de $\mathscr{W}$ en $\mathscr{W}'$. Para el caso de cuerpos tridimensionales tenemos

$$\mathbf{T} = \mathbb{D}\mathbf{E}, \tag{4.29}$$

donde $\mathbb{D}$ es el tensor de elasticidad de cuarto orden y donde $\mathbf{E}$ y $\mathbf{T}$ son tensores simétricos de segundo orden que representan el tensor de deformación y el tensor de tensión de Cauchy[1]. En lo que sigue, limitaremos nuestra presentación al caso en que este tensor satisfaga las siguientes propiedades

$$\mathbb{D}\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbb{D}\mathbf{B}\cdot\mathbf{A} \qquad \forall \mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathscr{W} \Rightarrow \mathbb{D} = \mathbb{D}^T, \tag{4.30}$$

$$\mathbb{D}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} \geq 0 \qquad \forall \mathbf{E} \in \mathscr{W}, \tag{4.31}$$

$$\mathbb{D}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = 0 \qquad \Leftrightarrow \mathbf{E} = \mathbf{O}. \tag{4.32}$$

Si el tensor $\mathbb{D}$ no depende del punto material diremos que el cuerpo es homogéneo. En general, para la caracterización de $\mathbb{D}$ serán necesarias 21 constantes elásticas (recuerde que $\mathbb{D}$ transforma tensores simétricos de segundo orden en tensores simétricos de segundo orden). En este caso general diremos que el material es elástico lineal anisotrópico. En el caso de un material elástico lineal isotrópico el tensor $\mathbb{D}$ resulta caracterizado por dos constantes elásticas: μ y λ, llamadas *constantes de Lamé*

$$\mathbb{D} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}), \tag{4.33}$$

donde $\mathbb{I}$ e $\mathbf{I}$ son, respectivamente, los tensores identidad de cuarto y segundo orden, y donde $\otimes$ recordemos que representa el producto tensorial, en este caso, entre tensores de segundo orden[2].

Siguiendo un análisis similar al ya realizado en la sección anterior, es posible definir la función *densidad de energía de deformación* $\pi = \pi(\mathbf{E})$

$$\pi(\overline{\mathbf{E}}) = \int_{\mathbf{O}}^{\overline{\mathbf{E}}} \mathbf{T}(\mathbf{E})\cdot d\mathbf{E} = \int_{\mathbf{O}}^{\overline{\mathbf{E}}} \mathbb{D}\mathbf{E}\cdot d\mathbf{E} = \frac{1}{2}\mathbb{D}\overline{\mathbf{E}}\cdot\overline{\mathbf{E}}, \tag{4.34}$$

y de las propiedades de $\mathbb{D}$ se sigue que

$$\pi(\mathbf{E}) \geq 0, \tag{4.35}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{E} = \mathbf{O}$.

De esta manera, el estado de tensiones $\overline{\mathbf{T}}$[3] asociado con $\overline{\mathbf{E}}$ a través de la ecuación constitutiva elástica es tal que

---

[1] No confundir $\mathbf{E}$ con el tensor de Green-Lagrange definido en el Capítulo 3. En este caso $\mathbf{E} = (\nabla\mathbf{u})^s$, donde $\mathbf{u}$ es el campo de desplazamientos del cuerpo. De la misma forma, el tensor $\mathbf{T}$ es el tensor de Cauchy.

[2] En este caso, y recordando lo visto en la Sección 1.3, observe que dados dos tensores $\mathbf{A} = \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2$ y $\mathbf{B} = \mathbf{b}_1\otimes\mathbf{b}_2$, entonces se tiene $\mathbf{A}\otimes\mathbf{B} = \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{b}_1\otimes\mathbf{b}_2$

[3] No confundir con el tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff de segunda especie definido en la (3.257). En este capítulo $\overline{\mathbf{T}}$ se refiere a un estado de tensión de Cauchy definido en la única configuración del cuerpo de interés $\mathscr{B}$.

$$\overline{\mathbf{T}} = \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathbf{E}=\overline{\mathbf{E}}} = \mathbb{D}\overline{\mathbf{E}}. \tag{4.36}$$

A su vez

$$\pi(\mathbf{E}) = \pi(\mathbf{E}_0) + \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathbf{E}_0} \cdot (\mathbf{E}-\mathbf{E}_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \pi}{\partial \mathbf{E}^2}\right|_{\mathbf{E}_0} (\mathbf{E}-\mathbf{E}_0)\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0) =$$
$$\pi(\mathbf{E}_0) + \mathbb{D}\mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{E}-\mathbf{E}_0) + \frac{1}{2}\mathbb{D}(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0)\cdot(\mathbf{E}-\mathbf{E}_0), \tag{4.37}$$

de donde

$$\pi(\mathbf{E}) - \pi(\mathbf{E}_0) \geq \mathbb{D}\mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{E}-\mathbf{E}_0) = \mathbf{T}_0 \cdot (\mathbf{E}-\mathbf{E}_0), \tag{4.38}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$. De esta manera concluimos que π es una función estrictamente convexa en el espacio de deformaciones.

El resultado anterior puede ser extendido sin dificultad al caso de elasticidad no lineal, para lo cual supondremos es satisfecha la siguiente restricción (monotonicidad de la función)

$$(\mathbf{T}^B - \mathbf{T}^A)\cdot(\mathbf{E}^B - \mathbf{E}^A) \geq 0 \quad \forall \mathbf{E}^A, \mathbf{E}^B \in \mathscr{W}, \tag{4.39}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{E}^A = \mathbf{E}^B$, y donde $\mathbf{T}^B = \mathbf{T}(\mathbf{E}^B), \mathbf{T}^A = \mathbf{T}(\mathbf{E}^A)$. Como la expresión anterior es válida para todo elemento del espacio de deformaciones, en particular lo será para $\mathbf{E} = \mathbf{E}^A + d\mathbf{E}$, y llamando $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E})$ al estado de tensiones asociado a $\mathbf{E}$ mediante la ecuación constitutiva, tendremos

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}^A)\cdot d\mathbf{E} \geq 0. \tag{4.40}$$

Luego, el incremento de la densidad de energía de deformación que se produce en el proceso que nos lleva del estado $\mathbf{E}^A$ al $\mathbf{E}^B$ será

$$\int_{\mathbf{E}^A}^{\mathbf{E}^B} (\mathbf{T} - \mathbf{T}^A)\cdot d\mathbf{E} \geq 0, \tag{4.41}$$

de donde

$$\pi(\mathbf{E}^B) - \pi(\mathbf{E}^A) \geq \mathbf{T}^A \cdot (\mathbf{E}^B - \mathbf{E}^A), \tag{4.42}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{E}^A = \mathbf{E}^B$. Así obtemos nuevamente la propiedad de convexidad de la función π, pero esta vez a partir de la monotonicidad de la ecuación constitutiva dada por la hipótesis (4.39).

Dado que $\mathbb{D}$ es positivo definido, existe $\mathbb{D}^{-1}$ también simétrico positivo definido. Lo anterior nos permite determinar $\mathbf{E}$ en función de $\mathbf{T}$ (ecuación constitutiva inversa) como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{T}) = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}, \tag{4.43}$$

y a partir de ella obtenemos

$$\pi^*(\overline{\mathbf{T}}) = \int_{\mathbf{O}}^{\overline{\mathbf{T}}} \mathbf{E}(\mathbf{T}) \cdot d\mathbf{T} = \int_{\mathbf{O}}^{\overline{\mathbf{T}}} \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T} \cdot d\mathbf{T} = \frac{1}{2}\mathbb{D}^{-1}\overline{\mathbf{T}} \cdot \overline{\mathbf{T}} \geq 0, \tag{4.44}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{0}$. Por otro lado

$$\overline{\mathbf{E}} = \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}=\overline{\mathbf{T}}}, \tag{4.45}$$

y

$$\pi^*(\mathbf{T}) - \pi^*(\mathbf{T}_0) \geq \mathbf{E}_0 \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0), \tag{4.46}$$

donde $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(\mathbf{T}_0)$, siendo que la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$. En otras palabras, la función de densidad de energía complementaria es una función estrictamente convexa en el espacio de tensiones $\mathscr{W}'$. Nuevamente, el resultado anterior puede obtenerse a partir de la monotonicidad de la función constitutiva inversa.

Por último de la propiedad de π y π^* se tiene que

$$\pi(\mathbf{E}) + \pi^*(\mathbf{T}) \geq \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}, \tag{4.47}$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T}$ y $\mathbf{E}$ están relacionados a través de la ecuación constitutiva.

Ecuación Constitutiva Estados Múltiples

Resumiendo, la caracterización de un material como el hasta aquí presentado puede realizarse de tres maneras equivalentes.

1. La ecuación constitutiva propiamente dicha caracterizada por una función monótona creciente

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{E}), \tag{4.48}$$

o su inversa

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{T}). \tag{4.49}$$

2. La existencia de la función densidad de energía de deformación, estrictamente convexa, π, tal que

$$\overline{\mathbf{T}} = \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\overline{\mathbf{E}}}, \tag{4.50}$$

o su función dual energía de deformación complementaria, π^*, tal que

$$\overline{\mathbf{E}} = \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\overline{\mathbf{T}}}. \tag{4.51}$$

3. Dados $\mathbf{E} \in \mathscr{W}$ y $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ se tiene

$$\pi(\mathbf{E}) + \pi^*(\mathbf{T}) \geq \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}, \tag{4.52}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{T}$ están asociados a través de la ecuación constitutiva del material.

Para el caso del material elástico isotrópico, lo anterior corresponde a

$$\mathbf{T} = \mathbb{D}\mathbf{E} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\mathrm{tr}\,\mathbf{E})\mathbf{I}, \tag{4.53}$$

$$\mathbf{E} = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\mu)}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\mathbf{I}, \tag{4.54}$$

$$\pi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mathbb{D}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = \frac{1}{2}[2\mu\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \lambda(\mathrm{tr}\,\mathbf{E})^2], \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}\pi^*(\mathbf{T}) &= \max_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{E} - \pi(\mathbf{E})) = \frac{1}{2}\mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}, \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\mu}\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} - \frac{\lambda}{2\mu(2\mu+3\mu)}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})^2\right).\end{aligned} \tag{4.56}$$

4.4 Equilibrio en Cuerpos Libres

El problema de la elasto-estática, dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales, consiste en: *determinar los campos* $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u = \mathscr{U}, \mathbf{E}_0 \in \mathscr{W}$ e $\mathbf{T}_0 \in \mathscr{W}'$ *tales que*

- $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$, o sea, $\mathbf{T}_0$ está en equilibrio con la carga aplicada f.
- $\mathbf{E}_0, \mathbf{T}_0$ están asociados por la ecuación constitutiva, por ejemplo, $\mathbf{T}_0 = \mathbb{D}\mathbf{E}_0$, o en el caso más general
$$\mathbf{E}_0 = \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0} \quad \mathbf{T}_0 = \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathbf{E}_0}. \tag{4.57}$$
- $\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0 = (\nabla \mathbf{u})^s$ es decir, la deformación debe ser *compatible*.

Según vimos en el Capítulo 3, el Principio del Trabajo Virtual (PTV) nos permite caracterizar $\mathbf{T}_0$ que, para el caso de cuerpos libres, corresponde a

$$(\mathbf{T}_0, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) = \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u = \mathscr{U}, \tag{4.58}$$

siendo que las cargas $f \in \mathscr{U}'$ deben satisfacer

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{D}). \tag{4.59}$$

La existencia de al menos un campo de tensiones $\mathbf{T}_0$ en equilibrio con f está garantizada por el Teorema de la Representación (ver Capítulo 3). Si existe $\mathbf{T}_0$, entonces existe $\mathbf{E}_0 = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}_0$ (deformación asociada a $\mathbf{T}_0$ por medio de la ecuación constitutiva). Nos preguntamos por lo tanto: existe $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tal que $\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0$? La respuesta a esta pregunta es afirmativa y la formalizaremos a través del siguiente resultado.

Teorema 4.1 (Equilibrio en Cuerpos Libres) *Dado $f \in \mathscr{U}'$ en equilibrio, existe $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{U}$ tal que*

$$\mathscr{K}\mathbf{u}_0 = f \quad \mathscr{K} = \mathscr{D}^*\mathbb{D}\mathscr{D}, \tag{4.60}$$

o, en forma equivalente, $f \in R(\mathscr{K})$. El operador $\mathscr{K} : \mathscr{U} \to \mathscr{U}'$ es conocido como operador de rigidez.

Demostración. De la hipótesis del Teorema, $f \in \mathscr{U}'$ es una carga equilibrada. Luego, del PTV tenemos

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{4.61}$$

es decir

$$f \in \mathscr{N}(\mathscr{D})^{\perp}. \tag{4.62}$$

Ahora bien, del Lema C.3 (ver Apéndice C) tenemos

$$f \in R(\mathscr{K}), \tag{4.63}$$

expresión que nos dice que *existe* $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{N}(\mathscr{D})$ (es decir $\mathbf{u}_0$ está definido, excepto en un movimento de cuerpo rígido) tal que

$$\mathscr{K}\,\mathbf{u}_0 = f. \tag{4.64}$$

■

Del resultado de este teorema de existencia concluimos que

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathscr{K}\,\mathbf{u}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathscr{D}^* \mathbb{D} \mathscr{D} \mathbf{u}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle = (\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathscr{U}. \tag{4.65}$$

Luego, el problema de la elasto-estática asociado al equilibrio en el caso de cuerpos sin restricciones al movimiento (cuerpos libres) queda caracterizado por la expresión variacional llamada *Principio del Trabajo Virtual*.

4.4.1 Principio del Trabajo Virtual

Como mencionado en la sección anterior, el problema del equilibrio en elasto-estática dentro de las hipótesis de deformaciones infinitesimales queda caracterizado por el siguiente problema variacional.

Principio del Trabajo Virtual (PTV)
(Cuerpos Libres)

El problema de la elasto-estática asociado al equilibrio en el caso de cuerpos sin restricciones al movimiento (cuerpos libres) queda caracterizado por el problema variacional llamado Principio del Trabajo Virtual que consiste en determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{N}(\mathscr{D})$, tal que

$$(\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) = \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathscr{U}. \tag{4.66}$$

Recordando que $\mathrm{Kin}_u = \mathbf{u}_0 + \mathrm{Var}_u$ tendremos que $\mathrm{Var}_u = \mathrm{Kin}_u - \mathbf{u}_0$ por lo que el problema variacional anterior puede ser reescrito de la siguiente forma

$$(\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \mathscr{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)) = \langle f, (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u = \mathscr{U}. \tag{4.67}$$

El lector puede notar que, en el caso de material hiperelástico no lineal, el PTV tomará la forma más geral

$$\left(\left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \right) = \langle f, (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0) \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u = \mathscr{U}. \tag{4.68}$$

4.4.2 Principio de Mínima Energía Potencial Total

De las propiedades asumidas para nuestro material, el PTV formulado en la sección anterior corresponde a la condición de mínimo de un cierto funcional. En efecto, de la convexidad de π expresada por la (4.38), para deformaciones cinemáticamente admisibles, se tiene

$$\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) - \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) \geq \mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0 \cdot \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0). \tag{4.69}$$

Mientras que en el caso de comportamiento no lineal (ver (4.46)) resulta

$$\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) - \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) \geq \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0} \cdot \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0), \tag{4.70}$$

y donde la igualdad se satisface ahora para todo $\mathbf{u}-\mathbf{u}_0 \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{N}(\mathscr{D})$. Integrando en el dominio $\mathscr{B}$ (región ocupada por el cuerpo) obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) - \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)\big) dV \geq \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0 \cdot \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) dV \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u = \mathscr{U}, \tag{4.71}$$

y en el caso no lineal

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) - \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)\big) dV \geq \int_{\mathscr{B}} \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0} \cdot \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) dV \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u = \mathscr{U}. \tag{4.72}$$

Substituyendo este resultado en el PTV tenemos

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) - \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)\big) dV \geq \langle f, (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u = \mathscr{U}. \tag{4.73}$$

Agrupando términos

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV - \langle f, \mathbf{u}\rangle \geq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) dV - \langle f, \mathbf{u}_0\rangle = \Pi(\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \tag{4.74}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}_0$ difieren en un desplazamiento de cuerpo rígido. Hemos arribado así al principio de mínimo, válido inclusive para materiales hiperelásticos con comportamiento no lineal, llamado *Principio de Mínima Energía Potencial Total*, y que enunciamos a seguir.

Principio de Mínima Energía Potencial Total (PMEPT)
(Cuerpos Libres)

El problema de la elasto-estática correspondiente al equilibrio es equivalente al problema de determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathscr{U} \setminus \mathscr{N}(\mathscr{D})$ tal que minimice el funcional de Energía Potencial Total

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV - \langle f, \mathbf{u} \rangle, \tag{4.75}$$

definido para todo $\mathbf{u} \in \mathscr{U}$.

4.4.3 Ecuaciones Locales. Condiciones de Contorno

En las secciones anteriores hemos presentado una formulación abstracta puesta en función de operadores entre espacios y sus duales, válida, por lo tanto, para toda estructura dentro de las hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones infinitesimales, y para materiales elásticos. En esta sección vamos a reescribir estos resultados para el caso particular de un cuerpo tridimensional de manera a poner en evidencia la forma local del equilibrio, llamada también de forma *fuerte* del equilibrio. Para ello, recordemos que para el caso de un cuerpo tridimensional, de acuerdo con la (3.146) tenemos

$$\langle f, \mathbf{u} \rangle = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_{\partial \mathscr{B}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, dS, \tag{4.76}$$

donde $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}$ son las densidades de fuerzas de cuerpo y de superficie definidas en $\mathscr{B}$ y en $\partial\mathscr{B}$, respectivamente. A su vez, para el caso de material hiperelástico lineal

$$\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u} \cdot \mathscr{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u})^s \cdot (\nabla\mathbf{u})^s, \tag{4.77}$$

por lo que finalmente el problema de mínimo corresponde a

$$\Pi(\mathbf{u}_0) = \min_{\mathbf{u} \in \mathscr{U}} \left[\int_{\mathscr{B}} \frac{1}{2}\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u})^s \cdot (\nabla\mathbf{u})^s dV - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, dV - \int_{\partial\mathscr{B}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{u} \, dS \right]. \tag{4.78}$$

La condición necesaria (y suficiente) de mínimo en $\mathbf{u}_0$ corresponde a

$$\delta\Pi(\mathbf{u}_0, \hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathscr{U}, \tag{4.79}$$

donde $\delta\Pi(\mathbf{u}_0, \hat{\mathbf{u}})$ representa la primera *variación* del funcional de Energía Potencial Total (que corresponde a la derivada Gâteaux de este funcional en $\mathbf{u}_0$ según la direción $\hat{\mathbf{u}}$), es decir

$$\delta\Pi(\mathbf{u}_0,\hat{\mathbf{u}}) = \frac{d}{d\alpha}\Pi(\mathbf{u}_0+\alpha\hat{\mathbf{u}})\Big|_{\alpha=0} = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s\cdot(\nabla\hat{\mathbf{u}})^s\,dV - \int_{\mathscr{B}}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{u}}\,dV - \int_{\partial\mathscr{B}}\mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{u}}\,dS = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{u}}\in\mathscr{U}, \quad (4.80)$$

que no es otra cosa que la expresión del PTV para el ejemplo que nos ocupa.

Admitiendo regularidad, utilizando la (2.84) y la simetría del tensor $\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s$, se tiene que

$$\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s\cdot(\nabla\hat{\mathbf{u}})^s = \operatorname{div}[\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s\hat{\mathbf{u}}] - \operatorname{div}[\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s]\cdot\hat{\mathbf{u}}, \quad (4.81)$$

obtenemos

$$\delta\Pi(\mathbf{u}_0,\hat{\mathbf{u}}) = -\int_{\mathscr{B}}\big(\operatorname{div}[\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s]+\mathbf{b}\big)\cdot\hat{\mathbf{u}}\,dV + \int_{\partial\mathscr{B}}\big(\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s\mathbf{n}-\mathbf{a}\big)\cdot\hat{\mathbf{u}}\,dS = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{u}}\in\mathscr{U}, \quad (4.82)$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal exterior definida sobre el contorno $\partial\mathscr{B}$. De esta forma, arribamos finalmente a las *ecuaciones de Euler* asociadas al funcional de Energía Potencial Total, y que corresponden a la forma local (fuerte, ya que se verifica en cada punto del cuerpo) del equilibrio en la teoria de la elasticidad infinitesimal

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s] = \mathbf{b} & \text{en } \mathscr{B}, \\ \mathbb{D}(\nabla\mathbf{u}_0)^s\mathbf{n} = \mathbf{a} & \text{sobre } \partial\mathscr{B}. \end{cases} \quad (4.83)$$

Si el cuerpo es isotrópico, las equaciones anteriores corresponden a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}[2\mu(\nabla\mathbf{u}_0)^s + \lambda\operatorname{tr}(\nabla\mathbf{u}_0)^s\mathbf{I}] = \mathbf{b} & \text{en } \mathscr{B} \\ 2\mu(\nabla\mathbf{u}_0)^s\mathbf{n} + \lambda\operatorname{tr}(\nabla\mathbf{u}_0)^s\mathbf{n} = \mathbf{a} & \text{sobre } \partial\mathscr{B}. \end{cases} \quad (4.84)$$

Recordando las expresiones (1.118), (2.87) y (2.105) obtenemos para el caso de cuerpos homogéneos e isotrópicos las *ecuaciones de Navier*

$$-\mu(\triangle\mathbf{u}_0 + \nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}_0)) - \lambda\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}_0) = \mathbf{b} \quad \text{en } \mathscr{B}, \quad (4.85)$$

o, agrupando

$$-\mu\triangle\mathbf{u}_0 - (\lambda+\mu)\nabla(\operatorname{div}\mathbf{u}_0) = \mathbf{b} \quad \text{en } \mathscr{B}. \quad (4.86)$$

Además, encontramos las condiciones de contorno de carácter mecánico (fuerzas prescriptas)

$$[2\mu(\nabla\mathbf{u}_0)^s + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u}_0)\mathbf{I}]\mathbf{n} = \mathbf{a} \quad \text{sobre } \partial\mathscr{B}. \quad (4.87)$$

Es interesante resaltar que la condición de contorno anterior no es exigida en el PMEPT ya que el funcional Π está definido en Kin_u. En otras palabras, las *únicas condiciones* de contorno exigidas sobre $\mathbf{u}$ son de caracter cinemático ($\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u$). Por esta razón, las condiciones de contorno que establecen que $\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u$ son llamadas *condiciones de contorno principales*. El lector puede así apreciar que el propio proceso de minimización es el responsable por la selección del campo $\mathbf{u}_0$ que, haciendo

mínimo el funcional, *satisface inclusive* la condición de contorno mecánica. Por esta razón, esta última condición es llamada *condición de contorno natural* (la misma es satisfecha de forma *natural* en el proceso de minimización). La Figura 4.2 muestra gráficamente lo presentado hasta aquí.

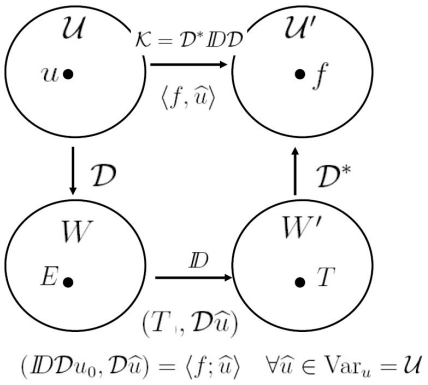


Fig. 4.2 Principio del Trabajo Virtual para cuerpos de material hiperelástico.

4.4.4 Principio del Trabajo Virtual Complementario

Según habíamos visto en el Capítulo 3, para el caso de cuerpos libres dada la carga $f \in \mathscr{U}'$ en equilibrio, o sea

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{4.88}$$

la variedad lineal en el espacio vectorial $\mathscr{W}'$ formada por todos los campos de tensiones $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ en equilibrio con f está dada por

$$\mathrm{Est}_T = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W}'; -(T, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u\}, \tag{4.89}$$

y el espacio formado por las tensiones auto-equilibradas consiste en

$$\mathrm{Var}_T = \{\hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{W}'; -(\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u\}, \tag{4.90}$$

de donde

$$\mathrm{Est}_T = \mathbf{T}_0 + \mathrm{Var}_T, \quad \mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T \text{ arbitrario.} \tag{4.91}$$

Luego, la compatibilidad de la deformación $\mathbf{E}_0 \in \mathscr{W}$ correspondía al problema variacional definido por el PPVC, que en este caso de deformaciones infinitesimales que nos ocupa se traduce en el Principio del Trabajo Virtual Complementario (PTVC), es decir

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{E}_0) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T. \tag{4.92}$$

Si consideramos la compatibilidad dentro del contexto del material hiperelástico definido en secciones anteriores, la deformación $\mathbf{E}_0$ estará asociada al estado de tensiones $\mathbf{T}_0 \in \mathscr{W}'$ a través de

$$\mathbf{E}_0 = \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0}, \tag{4.93}$$

que en el caso de material elástico lineal se reduce a $\mathbf{E}_0 = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}_0$.

Principio del Trabajo Virtual Complementario (PTVC)
(Cuerpos Libres)
El problema de compatibilidad de la elasto-estática será equivalente a determinar el campo $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ tal que

$$\left(\hat{\mathbf{T}}, \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0}\right) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T. \tag{4.94}$$

Recordando que $\mathrm{Est}_T = \mathbf{T}_0 + \mathrm{Var}_T$ tenemos $\mathrm{Var}_T = \mathrm{Est}_T - \mathbf{T}_0$ el PTVC puede ser reescrito como: determinar $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ tal que

$$\left(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0}\right) = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T, \tag{4.95}$$

que en el caso lineal corresponde a

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T. \tag{4.96}$$

4.4.5 Principio de Mínima Energía Complementaria

Recordando la propiedad de convexidad de la función de densidad de energía complementaria π^* dada por

$$\pi^*(\mathbf{T}) - \pi^*(\mathbf{T}_0) \geq \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0} \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0), \tag{4.97}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$, e integrando en todo el cuerpo, tendremos que

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi^*(\mathbf{T}) - \pi^*(\mathbf{T}_0)\big) dV \geq \left(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0}\right) = 0 \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T. \tag{4.98}$$

Substituyendo este resultado en el PTVC formulado en la sección anterior, obtenemos

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \int_B \pi^*(\mathbf{T})dV \geq \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0)dV = \Pi^*(\mathbf{T}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T, \tag{4.99}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$. En base e esto vemos que el PTVC es equivalente al siguiente problema de mínimo.

Principio de Mínima Energía Complementaria (PMEC)
(Cuerpos Libres)

El problema de la elasto-estática asociado a la compatibilidad es equivalente al problema de determinar el campo $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ tal que minimice el funcional de Energía Potencial Complementaria

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV, \tag{4.100}$$

en la variedad lineal Est_T.

Aquí el lector podrá observar que la *existencia y unicidad* del campo $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ está garantizada en virtud de que Π^* es un funcional estrictamente convexo semicontínuo inferiormente y coercivo ($\Pi^*(\mathbf{T}) \to \infty$ para $\|\mathbf{T}\| \to \infty$) en la variedad lineal Est_T. De hecho, la condición necesaria, y en este caso suficiente, de mínimo corresponde a

$$\delta\Pi^*(\mathbf{T}_0, \hat{\mathbf{T}}) = \frac{d}{d\alpha}\Pi^*(\mathbf{T}_0 + \alpha\hat{\mathbf{T}})\bigg|_{\alpha=0} = \int_{\mathscr{B}} \frac{d}{d\alpha}\pi^*(\mathbf{T}_0 + \alpha\hat{\mathbf{T}})\bigg|_{\alpha=0} dV = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \tag{4.101}$$

es decir

$$\delta\Pi^*(\mathbf{T}_0, \hat{\mathbf{T}}) = \int_{\mathscr{B}} \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0} \cdot \hat{\mathbf{T}}\, dV = \left(\hat{\mathbf{T}}, \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0}\right) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \tag{4.102}$$

que no es otra cosa que el PTVC.

Por último, y para el ejemplo que nos ocupa (cuerpo tridimensional, material elástico lineal) el PMEC toma la forma

$$\Pi^*(\mathbf{T}_0) = \min_{\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T} \int_{\mathscr{B}} \frac{1}{2}\mathbb{D}^{-1}\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}\, dV. \tag{4.103}$$

4.4.6 Comentarios Adicionales

En esta sección hemos llegado al seguiente resultado: los campos $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u$, $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{T}_0 \in \text{Est}_T$ solución del problema de la elasto-estática (recuerde que $\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{T}_0$ están asociados via ecuación constitutiva) son solución de los problemas listados a seguir.

- Equilibrio
$$\Pi(\mathbf{u}_0) = \min_{\mathbf{u}\in\text{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}). \tag{4.104}$$
- Compatibilidad
$$\Pi^*(\mathbf{T}_0) = \min_{\mathbf{T}\in\text{Est}_T} \Pi^*(\mathbf{T}). \tag{4.105}$$

En particular, es f acil mostrar que $\Pi(\mathbf{u}_0) = -\Pi^*(\mathbf{T}_0)$, con lo que que resulta más una vez caracterizada la dualidad entre (4.104) y (4.105). En efecto, para demostrar esto recordemos que

$$\pi(\mathbf{E}_0) + \pi^*(\mathbf{T}_0) = \mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{T}_0, \tag{4.106}$$

luego

$$\Pi(\mathbf{u}) \geq \Pi(\mathbf{u}_0) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)\, dV - \langle f, \mathbf{u}_0 \rangle = \\ - \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0)\, dV + \left[\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}_0 \cdot \mathscr{D}\mathbf{u}_0\, dV - \langle f, \mathbf{u}_0 \rangle \right]. \tag{4.107}$$

Como $\mathbf{T}_0 \in \text{Est}_T$ y $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u = \text{Var}_u$, el término entre corchetes es el PTV. Luego, resulta

$$\Pi(\mathbf{u}) \geq \Pi(\mathbf{u}_0) = -\Pi^*(\mathbf{T}_0) \geq -\Pi^*(\mathbf{T}) \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Kin}_u, \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Est}_T. \tag{4.108}$$

La expresión anterior nos proporciona una manera de obtener una cota superior e inferior de nuestra solución haciendo uso, respectivamente, de campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles y de campos de tensiones estáticamente equilibradas con la carga f.

4.5 Equilibrio en Cuerpos con Restricciones Bilaterales

En las secciones anteriores discutimos los principios variacionales suponiendo que el cuerpo está libre de restricciones cinemáticas. Ahora pasaremos a desarrollar el caso de restricciones cinemáticas de tipo bilateral. Luego

$$\text{Kin}_u = \{\mathbf{u} \in \mathscr{U}; \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \text{ sobre } \partial\mathscr{B}_u\}, \tag{4.109}$$
$$\text{Var}_u = \{\hat{\mathbf{u}} \in \mathscr{U}; \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\mathscr{B}_u\}, \tag{4.110}$$

donde Var_u es un subespacio de $\mathscr{U}$, Kin_u una variedad lineal (translación de Var_u), y $\partial\mathscr{B}_u$ es la parte de la frontera $\partial\mathscr{B}$ de $\mathscr{B}$ donde están prescriptos los desplazamientos. Recordando el PTV teníamos

- f está en equilibrio si

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \text{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}). \tag{4.111}$$

- Si f está en equilíbrio, existe al menos un estado de tensiones $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ que la equilibra, definido por

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \text{Var}_u. \tag{4.112}$$

Nos preguntamos ahora si, dado f en equilibrio, existe $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u$ tal que la tensión asociada $\mathbf{T}_0$

$$\mathbf{T}_0 = \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \tag{4.113}$$

equilibra f. Es decir, tal que

$$\left(\left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}} \right) = \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \text{Var}_u. \tag{4.114}$$

La respuesta a esta pregunta es afirmativa y la formalizamos a través del siguiente Teorema.

Teorema 4.2 (Cuerpo con restricciones bilaterales) *Dado $f \in \mathscr{U}'$ en equilibrio, existe $r \in \text{Var}_u^{\perp}$ y $\mathbf{u}_0 \in Kin_u$ tal que*

$$\mathscr{K}\mathbf{u}_0 = f + r \quad \mathscr{K} = \mathscr{D}^*\mathbb{D}\mathscr{D}, \tag{4.115}$$

Por sua vez, si el movimiento de cuerpo rígido es eliminado, nuevamente $\mathbf{u}_0$ es único.

Demostración. Por hipótesis

$$f \in [\text{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D})]^{\perp}. \tag{4.116}$$

Dado que $\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{K})$ (ver lema C.1), y que $\text{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{K}) = \text{Var}_u \cap [\mathscr{K}(\text{Var}_u)]^{\perp}$ (ver lema C.4), tenemos lo siguiente

$$[\text{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D})]^{\perp} = [\text{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{K})]^{\perp} = \left[\text{Var}_u \cap [\mathscr{K}(\text{Var}_u)]^{\perp}\right]^{\perp} = \text{Var}_u^{\perp} \oplus \mathscr{K}(\text{Var}_u). \tag{4.117}$$

Luego, usando el lema C.5 se obtiene finalmente que

$$[\text{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D})]^{\perp} = \text{Var}_u^{\perp} \oplus \mathscr{K}(\text{Var}_u). \tag{4.118}$$

Por otro lado, sabemos que $[\text{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D})]^{\perp} = (\text{Var}_u)^{\perp} \oplus (\mathscr{N}(\mathscr{D}))^{\perp}$ (ver Apéndice A, Sección A.16.1), y también que $(\mathscr{N}(\mathscr{D}))^{\perp} = R(\mathscr{K})$ (ver lema C.3). Así, tenemos

que

$$[\mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D})]^{\perp} = \mathrm{Var}_u^{\perp} \oplus R(\mathscr{K}). \tag{4.119}$$

De (4.118) y (4.119) tenemos que

$$f \in \mathrm{Var}_u^{\perp} \oplus R(\mathscr{K}) = \mathrm{Var}_u^{\perp} \oplus \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u). \tag{4.120}$$

Sea ahora $\mathbf{w} \in \mathrm{Kin}_u$ arbitrario, luego $\mathscr{K}\mathbf{w} \in R(\mathscr{K})$ y de la expresión anterior se sigue que

$$f - \mathscr{K}\mathbf{w} \in \mathrm{Var}_u^{\perp} \oplus \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u), \tag{4.121}$$

de donde

$$f \in \mathrm{Var}_u^{\perp} + \mathscr{K}\mathbf{w} + \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u) = \mathrm{Var}_u^{\perp} + \mathscr{K}(\mathbf{w} + \mathrm{Var}_u), \tag{4.122}$$

y recordando que Kin_u es una translación de Var_u

$$\mathrm{Kin}_u = \mathbf{w} + \mathrm{Var}_u \quad \mathbf{w} \in \mathrm{Kin}_u \text{ arbitrario.} \tag{4.123}$$

Obtemos así

$$f \in \mathrm{Var}_u^{\perp} + \mathscr{K}(\mathrm{Kin}_u). \tag{4.124}$$

La expresión anterior nos dice finalmente que existe $-r \in \mathrm{Var}_u^{\perp}$ y $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tales que

$$f + r = \mathscr{K}\mathbf{u}_0. \tag{4.125}$$

Demostrada la existencia, demostraremos la unicidad. Para ello, sea $\hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u$ arbitrario, luego

$$\langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle -r + \mathscr{K}\mathbf{u}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathscr{K}\mathbf{u}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle = (\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u. \tag{4.126}$$

Recordando nuevamente que Kin_u es una translación de Var_u y tomando $\mathbf{u}_0$ como esa translación tenemos $\mathrm{Kin}_u = \mathbf{u}_0 + \mathrm{Var}_u$, o sea $\mathrm{Var}_u = \mathrm{Kin}_u - \mathbf{u}_0$, de donde la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\langle f, \mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \rangle = (\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \mathscr{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u. \tag{4.127}$$

Si existe un otro campo $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_0$ tenemos que

$$\langle f, \mathbf{u} - \mathbf{u}_1 \rangle = (\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_1, \mathscr{D}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_1)) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u. \tag{4.128}$$

Haciendo, respectivamente, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ en las dos últimas expresiones, y sumando miembro a miembro tenemos que

$$(\mathbb{D}\mathscr{D}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1), \mathscr{D}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1)) = 0, \tag{4.129}$$

y de las propiedades del tensor de elasticidad $\mathbb{D}$ tenemos

$$\mathscr{D}(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1) = 0 \Rightarrow \mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_1 \in \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{4.130}$$

o sea $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_1$ difieren en un movimento de cuerpo rígido. Si este tipo de moviemento está impedido por las restricciones cinemáticas impuestas en $\partial\mathscr{B}_u$ obtenemos finalmente la unicidad del campo $\mathbf{u}_0$. ■

De la misma manera que cuando el cuerpo no estaba sujeto a ningún tipo de restricciones cinemáticas (cuerpo libre), del teorema anterior concluimos finalmente que el problema de la elasto-estática asociado al equilibrio con restricciones bilaterales corresponde al problema variacional conocido con el nombre de *Principio del Trabajo Virtual*.

4.5.1 Principio del Trabajo Virtual

De esta manera, hemos arribado al problema variacional que caracteriza el problema de equilibrio mecánico en elasto-estática, que enunciamos a seguir.

Principio del Trabajo Virtual (PTV)
(Cuerpos con Restricciones Bilaterales)

El problema de la elasto-estática asociado al equilibrio en cuerpos con restricciones bilaterales corresponde al problema variacional que consiste en determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tal que

$$\left(\left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathbf{E}_0=\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\right) = \langle f, (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u. \tag{4.131}$$

En el caso de un material con comportamiento lineal el PTV adquiere la siguiente forma

$$(\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)) = \langle f, (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u. \tag{4.132}$$

4.5.2 Principio de Mínima Energía Potencial Total

Recordando la convexidad de la función densidad de energía de deformación, y procediendo análogamente a lo hecho en la Sección 4.4.2 llegamos a lo siguiente

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) - \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)\big) dV \geq \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0 \cdot \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) dV \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \tag{4.133}$$

donde la igualdad se da si y sólo si $\mathbf{u}-\mathbf{u}_0 \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$. Substituyendo en el PTV obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) - \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)\big) dV \geq \langle f, (\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \tag{4.134}$$

y agrupando

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u})dV - \langle f, \mathbf{u}\rangle \geq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV - \langle f, \mathbf{u}_0\rangle = \Pi(\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \quad (4.135)$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{u} - \mathbf{u}_0 \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$. Obtenemos así el *Principio de Mínima Energía Potencial Total* enunciado en lo que sigue.

Principio de Mínima Energía Potencial Total (PMEPT)
(Cuerpos con Restricciones Bilaterales)

El problema de elasto-estática asociado al equilibrio es equivalente al problema de determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tal que minimice el funcional de Energía Potencial Total

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u})dV - \langle f, u\rangle, \quad (4.136)$$

Nuevamente, desde este punto de vista (minimización del funcional Π) vemos que Kin_u es una variedad lineal y Π es un funcional convexo, coercivo ($\Pi(\mathbf{u}) \to \infty$ para $\|\mathbf{u}\| \to \infty$), y semi-continuo inferiormente luego, la existencia de un punto mínimo $\mathbf{u}_0$ está garantizada y si $\mathrm{Kin}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{\mathbf{0}\}$, es decir el movimiento de cuerpo rígido ha sido eliminado, tendremos que $\mathbf{u}_0$ es único ya que Π resulta ahora estrictamente convexo (ver Apéndice A.3).

Finalmente, para el ejemplo del cuerpo tridimensional que nos ocupa, el funcional Π toma la forma

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \frac{1}{2}\mathbb{D}(\nabla\mathbf{u})^s \cdot (\nabla\mathbf{u})^s dV - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{u}\, dV - \int_{\partial\mathscr{B}\setminus\partial\mathscr{B}_u} \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}\, dS, \quad (4.137)$$

donde $\mathbf{b}$ y $\mathbf{a}$ son, respectivamente, la densidad de fuerzas de cuerpo (definida en $\mathscr{B}$) y la densidad de fuerzas de superficie prescripta en el contorno $\partial\mathscr{B} \setminus \partial\mathscr{B}_u$.

4.5.3 Principio del Trabajo Virtual Complementario

Veamos ahora el problema de la compatibilidad de las deformaciones. Independiente del tipo de material, el Principio del Trabajo Virtual Complementario (PTVC) permite caracterizar la compatibilidad de la deformación $\mathbf{E}_0$. En efecto, según vimos, $\mathbf{E}_0$ es compatible si y sólo si

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{E}_0) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \quad (4.138)$$

y donde $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$.

Si aplicamos este principio al caso del material elástico que estamos considerando, tendremos que el problema de la elasto-estática asociado con la compatibilidad de las deformaciones será equivalente a determinar $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ tal que la deformación $\mathbf{E}_0$ asociada a través de la ecuación constitutiva elástica (en el caso

lineal $\mathbf{E}_0 = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}_0$ y en el caso más general $\mathbf{E}_0 = \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\big|_{\mathbf{T}_0}$) sea compatible, es decir, exista $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u$ tal que $\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0$. Con esto, la expresión del PTVC (4.138) toma la forma variacional descripta a seguir.

Principio del Trabajo Virtual Complementario (PTVC)
(Cuerpos con Restricciones Bilaterales)

El problema de la compatibilidad de la elasto-estática consiste en determinar $\mathbf{T}_0 \in \text{Est}_T$ tal que

$$\left(\hat{\mathbf{T}}, \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0}\right) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \text{Var}_T. \tag{4.139}$$

Recordando que Est_T es la translación de Var_T, esto es $\text{Var}_T = \text{Est}_T - \mathbf{T}_0$ la expresión anterior puede ser reescrita como

$$\left(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0}\right) = (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Est}_T, \tag{4.140}$$

y en el caso lineal

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}_0) = (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Est}_T. \tag{4.141}$$

4.5.4 Principio de Mínima Energía Complementaria

Realicemos ahora un desarrollo análogo al hecho en la Sección 4.4.5. Esto es, utilicemos la propiedad de convexidad de la función potencial de energía complementaria para, luego de integrar en el cuerpo $\mathscr{B}$, llegar a lo siguiente

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi^*(\mathbf{T}) - \pi^*(\mathbf{T}_0)\big) dV \geq \left(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0}\right), \tag{4.142}$$

donde la igualdad es satisfecha si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$. Substituyendo esta expresión en el PTVC conduce a

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi^*(\mathbf{T}) - \pi^*(\mathbf{T}_0)\big) dV \geq (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \text{Est}_T. \tag{4.143}$$

Dado que $\mathbf{T} - \mathbf{T}_0 \in \text{Var}_T$ y $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u$, la forma bilineal $(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0)$ se reduce a una forma lineal en $\mathbf{T} - \mathbf{T}_0$ definida sobre la parte de la fronteira $\partial\mathscr{B}_u$ donde los desplazamientos están prescriptos. En efecto, para el caso tridimensional que nos ocupa tenemos

$$(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0,\mathscr{D}\mathbf{u}_0)=\int_{\mathscr{B}}(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0)\cdot(\nabla\mathbf{u}_0)^s dV=\int_{\mathscr{B}}(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0)\cdot\nabla\mathbf{u}_0\,dV=$$
$$\int_{\mathscr{B}}\big[\operatorname{div}[(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0)\mathbf{u}_0]-\underbrace{\operatorname{div}(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0)\cdot\mathbf{u}_0}_{=0}\big]\,dV=$$
$$\int_{\partial\mathscr{B}}(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0)\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}_0\,dS=\int_{\partial\mathscr{B}_u}(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0)\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{u}}\,dS. \quad (4.144)$$

Luego, para poner en evidencia esta característica general introducimos la seguiente notación

$$(\mathbf{T}-\mathbf{T}_0,\mathscr{D}\mathbf{u}_0)=((\mathbf{T}-\mathbf{T}_0,\bar{\mathbf{u}})). \quad (4.145)$$

Hecha esta observación, el PTVC conduce finalmente a

$$\int_{\mathscr{B}}\big(\pi^*(\mathbf{T})-\pi^*(\mathbf{T}_0)\big)dV\geq((\mathbf{T}-\mathbf{T}_0,\bar{\mathbf{u}}))\quad\forall\mathbf{T}\in\mathrm{Est}_T, \quad (4.146)$$

de donde, agrupando términos, obtenemos

$$\Pi^*(\mathbf{T})=\int_{\mathscr{B}}\pi^*(\mathbf{T})dV-((\mathbf{T},\bar{\mathbf{u}}))\geq$$
$$\int_{\mathscr{B}}\pi^*(\mathbf{T}_0)dV-((\mathbf{T}_0,\bar{\mathbf{u}}))=\Pi^*(\mathbf{T}_0)\quad\forall\mathbf{T}\in\mathrm{Est}_T, \quad (4.147)$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T}=\mathbf{T}_0$. Tenemos así que el PTVC es equivalente al problema de mínimo del funcional de energía complementaria.

De esta manera, vemos que, para cuerpos de material hiperelástico en pequeñas deformaciones, la compatibilidad de las deformaciones puede ser caracterizada a través del Principio de Mínima Energía Complementaria enunciado a seguir.

Principio de Mínima Energía Complementaria (PMEC)
(Cuerpos con Restricciones Bilaterales)

El problema de la elasto-estática (lineal o no lineal) asociado a la compatibilidad de las deformaciones (infinitesimales) es equivalente al problema de determinar $\mathbf{T}_0\in\mathrm{Est}_T$ tal que minimice el funcional de Energía Potencial Complementaria

$$\Pi^*(\mathbf{T})=\int_{\mathscr{B}}\pi^*(\mathbf{T})dV-((\mathbf{T},\bar{\mathbf{u}})), \quad (4.148)$$

en la variedad lineal Est_T.

Por otro lado, hemos visto que si existe solución de este problema ella es única. La existencia está garantizada en virtud de que Π^* es un funcional estrictamente convexo, semi-continuo inferiormente y coercivo, o sea $\Pi^*(\mathbf{T})\to\infty$ para $\|\mathbf{T}\|\to\infty$, definido en la variedad lineal no vacía Est_T (ver Apéndice A.3).

Finalmente, y de una forma similar a la presentada para el caso de cuerpos libres en la Sección 4.4.6, es posible mostrar que

$$\Pi(\mathbf{u}) \geq \Pi(\mathbf{u}_0) = -\Pi^*(\mathbf{T}_0) \geq -\Pi^*(\mathbf{T}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T, \tag{4.149}$$

y donde $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ y $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ son las soluciones de los problemas de mínima energía potencial total y complementaria, respectivamente.

4.6 Equilibrio en Cuerpos con Restricciones Unilaterales

Estudiemos ahora el caso de cuerpos con restricciones unilaterales perfectas, esto es, sin fricción.

En la Sección 3.7 del Capítulo 3 hemos limitado nuestra presentación al caso de Var_u ser un cono convexo de vértice en el origen. Como siempre Kin_u será la translación de Var_u. Restricciones cinemáticas más generales, donde Kin_u es un conjunto cerrado convexo, fueron analizadas por P. D. Panagiotopoulos ([230]), por G. Duvaut y J. L Lions ([75]), por P. H. Brézis ([42]), por I. Ekeland y R. Temam ([77]) y por G. Fichera ([103]-[102]).

4.6.1 Principio del Trabajo Virtual

Dentro de nuestra limitación, Var_u cono convexo, dada la carga equilibrada $f \in \mathscr{U}'$ vimos que existía $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ tal que

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u. \tag{4.150}$$

Nuevamente, el problema de la elasto-estática asociado al equilibrio consistirá en determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tal que el estado de tensiones $\mathbf{T}_0$, asociado a este campo por la ecuación constitutiva

$$\mathbf{T}_0 = \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \tag{4.151}$$

equilibre la carga f. Tenemos así que el PTV toma la forma enunciada a seguir.

Principio del Trabajo Virtual (PTV)
(Cuerpos con Restricciones Unilaterales)

El problema de la elasto-estática asociado al equilibrio en cuerpos con restricciones unilaterales corresponde al problema variacional que consiste en determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tal que

$$-\left(\left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}\right) + \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0). \tag{4.152}$$

4.6.2 Principio de Mínima Energía Potencial Total

Como antes, dado que Kin_u es la translación de Var_u, la expresión anterior puede ser colocada en función solamente de campos cinemáticamente admisibles, o sea

$$\left(\left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0)\right) - \langle f, \mathbf{u}-\mathbf{u}_0\rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Kin}_u. \tag{4.153}$$

Ahora bien, el primer término en la expresión anterior no es otra cosa que el diferencial Gâteaux en $\mathbf{u}_0$ según la dirección $\mathbf{u}-\mathbf{u}_0$ del funcional Energía Potencial Total

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV - \langle f, \mathbf{u}\rangle. \tag{4.154}$$

En efecto, observe que

$$\delta\Pi(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}-\mathbf{u}_0) = \left.\frac{d}{d\alpha}\Pi(\mathbf{u}_0 + \alpha(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0))\right|_{\alpha=0} = \int_{\mathscr{B}} \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0} \cdot \mathscr{D}(\mathbf{u}-\mathbf{u}_0) dV - \langle f, \mathbf{u}-\mathbf{u}_0\rangle, \tag{4.155}$$

luego, la (4.153) es equivalente a

$$\delta\Pi(\mathbf{u}_0, \mathbf{u}-\mathbf{u}_0) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in \text{Kin}_u, \tag{4.156}$$

y de las propiedades del funcional Π, diferencible, estrictamente convexo, semicontinuo inferiormente y coercivo se sigue (ver Apéndice A.3) que la expresión anterior corresponde a la condición necesaria (y suficiente) de mínimo del funcional Energía Potencial Total en el dominio convexo (translación de un cono) Kin_u. Hemos llegado así al siguiente problema de mínimo.

Principio de Mínima Energía Potencial Total (PMEPT)
(Cuerpos con Restricciones Unilaterales)

El problema de la elasto-estática asociado al equilibrio con restricciones unilaterales es equivalente a determinar $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u$ tal que minimice

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV - \langle f, \mathbf{u}\rangle, \tag{4.157}$$

definido en el convexo no vacío Kin_u.

Nuevamente, de las propiedades de la función de densidad de energía π, de la hipótesis que f es un funcional lineal y continuo y de las características de Kin_u es posble demostrar existencia y unicidad de la solución (ver [102]).

4.6.3 Principio del Trabajo Virtual Complementario

Para analizar la compatibilidad de las deformaciones recordemos que, para el caso de restricciones unilaterales como las estudiadas aquí, la deformación $\mathbf{E}$ era compatible si y sólo si

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{E}) \geq (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{w}) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \tag{4.158}$$

con lo que arribamos al enunciado del PTVC para el caso de cuerpos con restricciones unilaterales.

Principio del Trabajo Virtual Complementario (PTVC)
(Cuerpos con Restricciones Unilaterales)

El problema de la elasto-estática asociado a la compatibilidad de las deformaciones, consistire en determinar $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ tal que

$$\left(\hat{\mathbf{T}}, \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0}\right) \geq (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T. \tag{4.159}$$

Recordando que

$$\mathrm{Var}_T = \{\hat{\mathbf{T}} \in W'; (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) \geq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0)\}, \tag{4.160}$$

$$\mathrm{Est}_T = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W}'; -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}}\rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0)\}, \tag{4.161}$$

con lo que $\mathrm{Est}_T = \mathbf{T} + \mathrm{Var}_T$ para $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$ arbitrario, y considerando $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$ y $\hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T$ arbitrarios, entonces

$$-(\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0) \tag{4.162}$$

$$-(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}}\rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0). \tag{4.163}$$

Sumando miembro a miembro estas desigualdades tenemos

$$-(\mathbf{T} + \hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) + \langle f, \hat{\mathbf{u}}\rangle \leq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0), \tag{4.164}$$

de donde se concluye que $\mathbf{T} + \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Est}_T$. Como $\mathbf{T}$ y $\hat{\mathbf{T}}$ son elementos arbitrarios de Est_T y Var_T, obtenemos así que $\mathrm{Est}_T = \mathbf{T} + \mathrm{Var}_T$ para todo $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$. Este resultado nos permite reescribir el PTVC de la siguiente forma: determinar $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ tal que

$$\left(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}_0}\right) \geq (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T, \tag{4.165}$$

y en el caso lineal resulta

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}_0) \geq (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T. \tag{4.166}$$

4.6.4 Principio de Mínima Energía Complementaria

Recordando la propiedad de convexidad π^*, e integrando en todo el cuerpo $\mathscr{B}$, tenemos

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi^*(\mathbf{T}) - \pi^*(\mathbf{T}_0)\big) dV \geq \left(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0}\right), \tag{4.167}$$

donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$. Substituyendo esta en la expresión del PTVC se tiene

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\pi^*(\mathbf{T}) - \pi^*(\mathbf{T}_0)\big) dV \geq (\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T. \tag{4.168}$$

Luego, por ser $\mathbf{T}$ y $\mathbf{T}_0$ campos equilibrados con la carga aplicada f, la forma bilineal $(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0)$ se reduce a una forma lineal en $\mathbf{T} - \mathbf{T}_0$ sobre la parte $\partial\mathscr{B}_u$ de la frontera $\partial\mathscr{B}$ donde los desplazamientos están prescriptos (ver (4.144)). Lo anterior será representado de la siguiente forma

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \mathscr{D}\mathbf{u}_0) = ((\mathbf{T} - \mathbf{T}_0, \bar{\mathbf{u}})) \tag{4.169}$$

Substituyendo este último resultado en el PTVC y agrupando términos, obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} \Pi^*(\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV - ((\mathbf{T}, \bar{\mathbf{u}})) \geq \\ \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0) dV - ((\mathbf{T}_0, \bar{\mathbf{u}})) = \Pi^*(\mathbf{T}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T, \end{aligned} \tag{4.170}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0$. Tenemos así que el problema de la elasto-estática asociado al problema de la compatibilidad es equivalente al Principio de Mínima Energía Complementaria enunciado a seguir.

Principio de Mínima Energía Complementaria (PMEC)
(Cuerpos con Restricciones Unilaterales)

El problema de la elasto-estática asociado al problema de la compatibilidad consiste en determinar el único campo $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ que minimiza el siguiente funcional

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV - ((\mathbf{T}, \bar{\mathbf{u}})), \tag{4.171}$$

definido en el cono convexo cerrado no vacío Est_T.

La unicidad de este campo ya fue establecida. La existencia del campo $\mathbf{T}_0$ surge de la propiedad del funcional Π^*, el cual es estrictamente convexo, semi-continuo inferiormente y coercivo, y de que Est_T es un convexo cerrado no vacío (ver [102]).

4.7 Principio de Min-Max

4.7.1 Funcional de Hellinger-Reissner

Como vimos en las secciones anteriores, para materiales hiperelásticos definidos por la función convexa de densidad de energía de deformación, π, o por la función, también convexa, de energía complementaria, π^*, y dentro de las hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamientos, el problema de determinar los campos $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{T}_0$ tales que satisfagan

- admisibilidad cinemática,
- compatibilidad,
- ecuación constitutiva,
- equilibrio,

es equivalente a los siguientes problemas de mínimo

(P1) Principio de Mínima Energía Potencial Total

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \left\{ \Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{u}) dV - \langle f, \mathbf{u} \rangle \right\}, \tag{4.172}$$

(P2) Principio de Mínima Energía Complementaria

$$\min_{\mathbf{T}\in \mathrm{Est}_T} \left\{ \Pi^*(\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV - ((\mathbf{T}, \overline{\mathbf{u}})) \right\}. \tag{4.173}$$

En particular, la solución $\mathbf{u}_0$ de (4.172) y $\mathbf{T}_0$ de (4.173) son tales que

$$\Pi(\mathbf{u}_0) = -\Pi^*(\mathbf{T}_0), \tag{4.174}$$

es decir

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) = -\min_{\mathbf{T}\in \mathrm{Est}_T} \Pi^*(\mathbf{T}), \tag{4.175}$$

de donde

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{T}\in \mathrm{Est}_T} [-\Pi^*(\mathbf{T})]. \tag{4.176}$$

Como el problema (P1) está definido en función de la variable cinemática (campo de desplazamiento) y que fue el concepto sobre el cual hemos construido todo nuestro análisis, este problema también es conocido como *Problema Primal*. Por otro lado y en virtud de que los esfuerzos internos (tensiones), o externos (fuerzas), fueron introducidos por *dualidad*, el problema (P2) es llamado también *Problema Dual*.

También, podemos observar que para los diferentes tipos de restricciones cinemáticas (cuerpo libre, restricciones bilaterales, restricciones unilaterales) los funcionales Π y Π^* permanecen inalterados, variando únicamente la caracterización de los conjuntos Kin_u y Est_T. En el caso más general (restricciones unilaterales),

estos conjuntos son cerrados y convexos y, para el caso de restricciones bilaterales o cuerpo libre, estos conjuntos resultan variedades lineales o subespacios.

La caracterización del mínimo está dada en el primer caso por *inecuaciones variacionais* ((4.152) -PTV- y (4.159) -PTVC- para (P1) e (P2), respectivamente) que, para esta clase de restricciones, nos muestra claramente la naturaleza *no lineal del problema* (inclusive para materiales elásticos lineales!). Para restricciones cinemáticas bilaterales o cuerpo libre, la caracterización del mínimo está dada por *equaciones variacionais* (en el caso de restricciones bilaterales (4.131) -PTV- y (4.139) -PTVC-).

Por su vez, la construcción de Kin_u, en general, no resulta difícil ya que sus elementos deben satisfacer condiciones de regularidad adecuadas y las restricciones cinemáticas impuestas al movimiento. No ocurre lo mismo con Est_T, ya que en este caso sus elementos son los campos de tesiones que están equilibrados con el sistema de cargas a las que el cuerpo está sujeto. Movidos por esta dificultad, nos preguntamos si será posible caracterizar la solución de la elasto-estática de tal manera que la construcción de los conjuntos no sea tan difícil. La respuesta a esta pregunta es afirmativa y será desarrollada en esta sección.

Para ello, recordemos la dualidad entre las funciones π y π^*. En particular, considere la transformación de Legendre

$$\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{T}\in W'}[\mathbf{T}\cdot\mathscr{D}\mathbf{u} - \pi^*(\mathbf{T})], \tag{4.177}$$

donde el campo $\mathbf{T}$ está simplemente limitado a pertencer al espacio $\mathscr{W}'$. Substituyendo esto en el funcional Π tenemos

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u})dV - \langle f,\mathbf{u}\rangle = \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'}\left\{ -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV + \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot\mathscr{D}\mathbf{u}\,dV - \langle f,\mathbf{u}\rangle \right\}. \tag{4.178}$$

Llamando

$$\mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}) = -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV + \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot\mathscr{D}\mathbf{u}\,dV - \langle f,\mathbf{u}\rangle, \tag{4.179}$$

conocido como *funcional de Hellinger-Reissner* (en virtud de ser estos dos autores quienes lo propusieron por primera vez en 1914 e 1950, respectivamente), la expresión anterior puede ser escrita como

$$\Pi(\mathbf{u}) = \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'} \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}). \tag{4.180}$$

Como la expresión anterior se verifica para cualquier $\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u$ en particular se verifica para $\mathbf{u}_0$. Luego

$$\Pi(\mathbf{u}_0) \geq \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u}_0,\mathbf{T}) \quad \forall\mathbf{T}\in\mathscr{W}', \tag{4.181}$$

e igual si y sólo si $\mathbf{T} = \mathbf{T}_0 = \mathbf{T}(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)$ es decir, si $\mathbf{T}$ está asociado a $\mathbf{u}_0$ a través de la ecuación constitutiva. Como resultado, tenemos que el problema (P1) (ver (4.172)) resulta equivalente a

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'} \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}), \tag{4.182}$$

de donde

$$\Pi(\mathbf{u}_0) = \min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) \leq \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}_0) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u. \tag{4.183}$$

De las expresiones (4.181) y (4.183) tenemos que

$$\mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u}_0,\mathbf{T}) \leq \Pi(\mathbf{u}_0) \leq \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}_0) \quad \forall \mathbf{T} \in \mathscr{W}', \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \tag{4.184}$$

de donde se sigue que

$$\max_{\mathbf{T}\in W'} \min_{\mathbf{u}\in Kin_u} \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}) = \min_{\mathbf{u}\in Kin_u} \max_{\mathbf{T}\in W'} \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}). \tag{4.185}$$

4.7.2 Principio de Hellinger-Reissner

Los campos $\mathbf{u}_0$, $\mathbf{T}_0$ soluciones de (P1) y (P2), respectivamente, son el *punto de silla* del funcional de Hellinger-Reissner (4.179). Hemos llegado así siguiente problema variacional.

Principio de Hellinger-Reissner
(Problema Min-Max)

El problema de la elasto-estática es equivalente al problema variacional de determinar los campos $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ y $\mathbf{T}_0 \in \mathscr{W}'$ soluciones del siguiente problema de min-max

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'} \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}) = \min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'} -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV + \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot\mathscr{D}\mathbf{u}\, dV - \langle f,\mathbf{u}\rangle. \tag{4.186}$$

Desde un punto puramente mecánico, para formular el principio de min-max hemos razonado de la siguiente manera

1. En el PMEPT

$$\min_{\mathbf{u}\in Kin_u} \Pi(\mathbf{u}), \tag{4.187}$$

están implícitas las siguientes ecuaciones

- ecuación de compatibilidad

$$\text{dado } \mathbf{u}_0 \Rightarrow \mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0; \tag{4.188}$$

- ecuación constitutiva: $\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{T}_0$ están asociados por la ecuación constitutiva del material hiperelástico en estudio, es decir

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0}, \quad \mathbf{T}_0 = \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\bigg|_{\mathbf{E}_0}; \tag{4.189}$$

2. luego, para formular el funcional $\mathscr{F}_{HR}$ lo que hemos hecho fue *incorporar explícitamente* esta última ecuación en el funcional Π. Esto lo hicimos al establecer que el campo $\mathbf{T}$ asociado a la deformación $\mathscr{D}\mathbf{u}$ por la ecuación constitutiva es la solución del problema

$$\max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'} [\mathbf{T}\cdot\mathscr{D}\mathbf{u} - \pi^*(\mathbf{T})] = \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}); \tag{4.190}$$

3. por último, a través del mínimo con respecto a la variable $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u$ estamos buscando aquel campo $\mathbf{T}$ que, además de estar asociado a $\mathscr{D}\mathbf{u}$ por la ecuación constitutiva, satisfaga el equilibrio.

De lo anterior vemos claramente que las ecuaciones asociadas al problema de min-max son: el *equilibrio* y la *ecuación constitutiva*.

En efecto, la condición de máximo en $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$, y por ser $\mathscr{W}'$ un espacio vectorial, está dada por

$$\delta\mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u}_0, \mathbf{T}_0; \hat{\mathbf{T}}) = \frac{d}{d\alpha}\mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u}_0, \mathbf{T}_0 + \alpha\hat{\mathbf{T}})\bigg|_{\alpha=0} = \int_{\mathscr{B}} \left(-\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0} + \mathscr{D}\mathbf{u}_0 \right) \cdot \hat{\mathbf{T}}\, dV = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{W}', \tag{4.191}$$

de donde se concluye que

$$\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0 = \frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\bigg|_{\mathbf{T}_0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}. \tag{4.192}$$

A su vez, la condición de mínimo respecto a $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u$, y por ser Kin_u un convexo cerrado no vacío, está dada por la inecuación variacional

$$\delta\mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u}_0, \mathbf{T}_0; \hat{\mathbf{u}}) = \frac{d}{d\alpha}\mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u}_0 + \alpha\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{T}_0)\bigg|_{\alpha=0} = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot\mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}\, dV - \langle f, \hat{\mathbf{u}}\rangle = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) - \langle f, \hat{\mathbf{u}}\rangle \geq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0), \tag{4.193}$$

que no es otra cosa que el propio PTV que, como ya sabemos, establece el equilibrio entre el campo $\mathbf{T}$ y la carga f.

Finalmente, es interesante resaltar que al resolver el problema de min-max obtenemos $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{T}_0$ *simultáneamente*. Esto tiene su importancia cuando utilizamos métodos aproximados.

4.8 Funcional de Tres Campos

En esta sección vamos a deducir un nuevo funcional, $\mathscr{F}(\mathbf{u},\mathbf{E},\mathbf{T})$, llamado *Funcional Generalizado* o *Funcional de Tres Campos*. Para ello recordemos nuevamente el PMEPT

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u}\left\{\Pi(\mathbf{u})=\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathscr{D}\mathbf{u})\,dV-\langle f,\mathbf{u}\rangle\right\}, \tag{4.194}$$

que puede ser reescrito de la siguiente forma

$$\min_{\mathbf{u}\in Kin_u}\left\{\Pi(\mathbf{u})=\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathbf{E})\,dV-\langle f,\mathbf{u}\rangle\right\}, \tag{4.195}$$

con la condición subsidiaria

$$\mathbf{E}=\mathscr{D}\mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{E}\in R(\mathscr{D}). \tag{4.196}$$

Haciendo uso de la teoría de los *multiplicadores* de Lagrange podemos construir otro funcional, $\mathscr{F}(\mathbf{u},\mathbf{E},\mathbf{T})$, dado por

$$\mathscr{F}(\mathbf{u},\mathbf{E},\mathbf{T})=\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathbf{E})\,dV-\langle f,\mathbf{u}\rangle-\int_{\mathscr{B}}\mathbf{T}\cdot(\mathbf{E}-\mathscr{D}\mathbf{u})\,dV. \tag{4.197}$$

Para mostrar esto, consideremos el funcional

$$\mathscr{L}(\mathbf{u},\mathbf{E})=\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathbf{E})\,dV-\langle f,\mathbf{u}\rangle \quad \forall\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u,\,\mathbf{E}\in\mathscr{W}. \tag{4.198}$$

Por su definición, este funcional de dos campos es tal que

$$\Pi(\mathbf{u})=\mathscr{L}(\mathbf{u},\mathbf{E}) \quad \forall\mathbf{E}\in R(\mathscr{D}). \tag{4.199}$$

Recordemos ahora el concepto de *función indicatriz*, $\mathscr{I}_{\mathscr{C}}$, de un conjunto $\mathscr{C}\subset\mathscr{V}$

$$\begin{aligned}&\mathscr{I}_{\mathscr{C}}\colon \mathscr{V}\to\{0,+\infty\}\\ &\qquad v\mapsto \mathscr{I}_{\mathscr{C}}(v)=\begin{cases}0 & \text{si } v\in\mathscr{C},\\ +\infty & \text{si } v\notin\mathscr{C}.\end{cases}\end{aligned}$$

Con esto en mente, podemos apreciar que

$$\Pi(\mathbf{u})=\min_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}}\{\mathscr{L}(\mathbf{u},\mathbf{E})+\mathscr{I}_{R(\mathscr{D})}(\mathbf{E})\}. \tag{4.200}$$

Haciendo uso del concepto de dualidad entre esfuerzos internos y deformaciones tenemos que la función indicatriz $\mathscr{I}_{R(\mathscr{D})}$ puede ser construida de manera exacta minimizando el siguiente funcional lineal

$$\mathscr{I}_{R(\mathscr{D})}(\mathbf{E})=\max_{\Lambda\in\mathscr{W}'}\left\{-\int_{\mathscr{B}}\Lambda\cdot(\mathbf{E}-\mathscr{D}\mathbf{u})\,dV\right\} \tag{4.201}$$

donde el campo $\Lambda \in \mathscr{W}'$ hace el papel de multiplicador de Lagrande asociado a la condición subsidiaria $\mathbf{E} \in R(\mathscr{D})$. Como veremos más adelante, este multiplicador corresponderá al estado de tensiones $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'$ que, asociado a la deformación $\mathbf{E} = \mathscr{D}\mathbf{u}$ a través de la ecuación constitutiva, está en equilibrio con el sistema de cargas f. Substituyendo este resultado en la expresión (4.200) tenemos

$$\Pi(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}} \max_{\Lambda\in\mathscr{W}'} \left\{ \mathscr{L}(\mathbf{u},\mathbf{E}) - \int_{\mathscr{B}} \Lambda \cdot (\mathbf{E} - \mathscr{D}\mathbf{u})\, dV \right\}. \tag{4.202}$$

Así, obtenemos finalmente

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \min_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}} \max_{\Lambda\in\mathscr{W}'} \left\{ \mathscr{L}(u,E) - \int_{\mathscr{B}} \Lambda \cdot (\mathbf{E} - \mathscr{D}\mathbf{u})\, dV \right\} = \min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \min_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}} \max_{\Lambda\in\mathscr{W}'} \mathscr{F}(\mathbf{u},\mathbf{E},\Lambda). \tag{4.203}$$

El resultado anterior nos conduce al siguiente problema variacional.

Principio Variacional Generalizado
(Funcional de Tres Campos)

El problema de la elasto-estática es equivalente al problema variacional de determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u, \mathbf{E}_0 \in \mathscr{W}$ y $\mathbf{T}_0 \in \mathscr{W}'$ tales que hagan *estacionario* ($\min_{\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u} \min_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'}$) el funcional $\mathscr{F}(\mathbf{u},\mathbf{E},\mathbf{T})$

$$\mathscr{F}(\mathbf{u},\mathbf{E},\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{E})\, dV - \langle f, \mathbf{u}\rangle - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot(\mathbf{E} - \mathscr{D}\mathbf{u})\, dV \tag{4.204}$$

en el conjunto $\mathrm{Kin}_u \times \mathscr{W} \times \mathscr{W}'$.

En efecto, como el problema está definido en $\mathrm{Kin}_{\mathbf{u}} \times \mathscr{W} \times \mathscr{W}'$, la condición de *punto estacionario* conduce a

$$\delta\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0;\hat{\mathbf{u}}) \geq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0), \tag{4.205}$$

$$\delta\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0;\hat{\mathbf{E}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{E}} \in \mathscr{W}, \tag{4.206}$$

$$\delta\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0;\hat{\mathbf{T}}) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathscr{W}', \tag{4.207}$$

o de forma extendida

$$\delta\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0;\hat{\mathbf{u}}) = \frac{d}{d\alpha}\mathscr{F}(\mathbf{u}_0+\alpha\hat{\mathbf{u}},\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0)\Big|_{\alpha=0} = (\mathbf{T}_0, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}}) - \langle f, \hat{\mathbf{u}}\rangle \geq 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0), \tag{4.208}$$

que corresponde a la expresión del PTV, es decir $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$. Además

$$\delta\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0;\hat{\mathbf{E}}) = \frac{d}{d\alpha}\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0+\alpha\hat{\mathbf{E}},\mathbf{T}_0)\Big|_{\alpha=0} = \int_{\mathscr{B}}\left(\frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{E}}\Big|_{\mathbf{E}_0} - \mathbf{T}_0\right)\cdot\hat{\mathbf{E}}\,dV = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{E}}\in\mathscr{W}, \quad (4.209)$$

de donde

$$\mathbf{T}_0 = \frac{\partial\pi}{\partial\mathbf{E}}\Big|_{\mathbf{E}_0} \quad \forall\mathbf{x}\in\mathscr{B}, \quad (4.210)$$

es decir $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{T}_0$ están relacionados por la ecuación constitutiva. Por último

$$\delta\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0;\hat{\mathbf{T}}) = \frac{d}{d\alpha}\mathscr{F}(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0+\alpha\hat{\mathbf{T}})\Big|_{\alpha=0} = \int_{\mathscr{B}}\hat{\mathbf{T}}\cdot(\mathbf{E}_0-\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV = 0 \quad \forall\hat{\mathbf{T}}\in\mathscr{W}', \quad (4.211)$$

de donde concluimos que

$$\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0 \quad \forall\mathbf{x}\in\mathscr{B}, \quad (4.212)$$

lo que nos dice que el campo de deformación $\mathbf{E}_0$ es compatible con el campo de desplazamiento $\mathbf{u}_0\in\mathrm{Kin}_u$.

Con esto vemos que el *punto* que hace estacionario el funcional generalizado en el conjunto $\mathrm{Kin}_u\times\mathscr{W}\times\mathscr{W}'$ es solución del problema de la elasto-estática y, viceversa, la solución del problema de la elasto-estática hace estacionario el funcional generalizado, de allí la equivalencia entre ambos problemas.

Desde el punto de vista de obtención de soluciones aproximadas, este nuevo problema variacional presenta la ventaja de proporcionar simultáneamente los tres campos que intervienen en la elasto-estática $(\mathbf{u}_0,\mathbf{E}_0,\mathbf{T}_0)$. Nuevamente, en esta formulación la construcción de los espacios resulta simplificada ya que las únicas restricciones a ser satisfechas en esta construcción son las cinemáticas (restricciones al movimiento en la parte de la frontera $\partial\mathscr{B}_u$) para los campos $\mathbf{u}$. Los espacios de aproximación para $\mathbf{E}$ y para $\mathbf{T}$ no presentan restricciones de carácter mecánico como sería el equilibrio en la definición de los campos $\mathbf{T}$ o de compatibilidad en los campos $\mathbf{E}$. De todas maneras la correcta construcción de estos espacios requiere que en dimensión finita algunas propiedades adicionales deban ser satisfechas para garantizar el adecuado comportamiento de la solución aproximada (ver [49], [77], [149], [220], [218], [219], [299] y [300]).

Finalmente, la Figura 4.3 nos muestra esquemáticamente los resultados alcanzados hasta aquí.

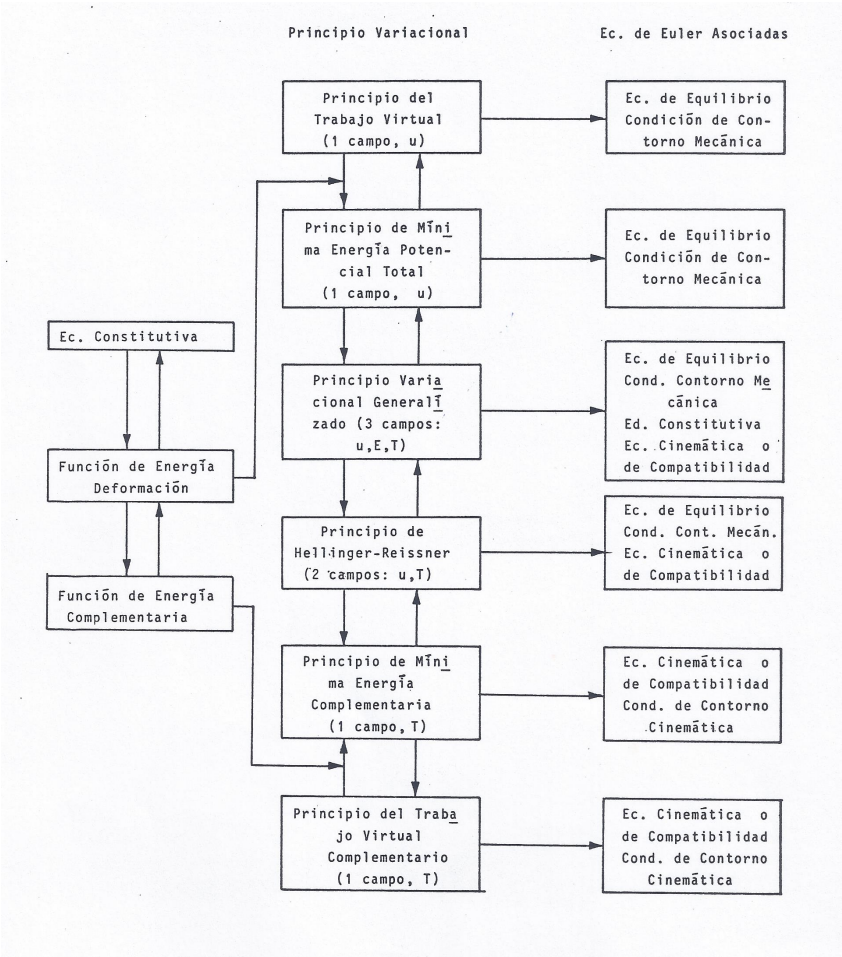


Fig. 4.3 Principios Variacionales en la teoría de la elasticidad.

4.9 Teoremas de Castigliano

4.9.1 Primero y Segundo Teorema

En esta sección , limitaremos nuestra presentación al caso de restricciones cinemáticas bilaterales. Es decir, en este caso Kin_u es una variedad lineal.

Consideremos ahora que el sistema de esfuerzos externos f aplicado al cuerpo en la configuración $\mathscr{B}$ sea un sistema de fuerzas a n parámetros, es decir

$$f = \sum_{i=1}^{n} Q_i f_i, \tag{4.213}$$

donde $f_i \in \mathscr{V}'$ es el i-ésimo *modo de fuerza* y $Q_i \in \mathbb{R}$ es el parámetro de carga asociado al i-ésimo modo, también llamado *parámetro de carga generalizada*. En este caso, el funcional de Energía Potencial Total, $\Pi(\mathbf{u})$, toma la forma

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{u})\, dV - \langle f, \mathbf{u} \rangle = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{u})\, dV - \sum_{i=1}^{n} Q_i \langle f_i, \mathbf{u} \rangle = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{u})\, dV - \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i, \quad (4.214)$$

donde

$$q_i = \langle f_i, \mathbf{u} \rangle, \quad (4.215)$$

es llamado *parámetro de desplazamiento generalizado* y está asociado a $\mathbf{u}$ a través de la expresión anterior.

En virtud de esta relación es posible expresar $\mathbf{u}$ en función de los parámetros q_i, es decir

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(q_i). \quad (4.216)$$

Luego, el PMEPT resulta

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) = \min_{q_i \in \mathbb{R}, i=1,\ldots,n} \left\{ \widetilde{\Pi}(q_i) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{u}(q_i))\, dV - \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i \right\}. \quad (4.217)$$

De la condición de mínimo obtemos

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{u}(q_i))\, dV = Q_i \quad i = 1, \ldots, n, \quad (4.218)$$

que corresponde al *Primer Teorema de Castigliano extendido a elasticidad no lineal*.

Consideremos ahora el PMEPC

$$\min_{\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T} \left\{ \Pi^*(\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})\, dV - ((\mathbf{T}, \overline{\mathbf{u}})) \right\}. \quad (4.219)$$

Supongamos ahora que $\overline{\mathbf{u}}$ puede expresarse como

$$\overline{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{n} \overline{q}_i \mathbf{e}_i, \quad (4.220)$$

donde $\overline{q}_i \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{e}_i$ es el modo de desplazamiento prescripto. Substituyendo esto en Π^* tenemos

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})\, dV - \sum_{i=1}^{n} ((\mathbf{T}, \mathbf{e}_i)) \overline{q}_i = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})\, dV - \sum_{i=1}^{n} Q_i \overline{q}_i, \quad (4.221)$$

donde

$$Q_i = ((\mathbf{T}, \mathbf{e}_i)), \tag{4.222}$$

es decir $Q_i = Q_i(\mathbf{T})$. En virtud de este resultado, en general, podremos expresar los campos $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$ en función de los parámetros Q_i. En este caso tendremos

$$\min_{\mathbf{T}\in \mathrm{Est}_T} \Pi^*(\mathbf{T}) = \min_{Q_i\in\mathbb{R}, i=1,\ldots,n} \left\{ \widetilde{\Pi}^*(Q_i) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}(Q_i))\, dV - \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i \right\}. \tag{4.223}$$

Nuevamente, de la condición de mínimo obtemos

$$\frac{\partial}{\partial Q_i} \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}(Q_i))\, dV = q_i \quad i = 1, \ldots, n. \tag{4.224}$$

Este resultado corresponde al *Segundo Teorema de Castigliano extendido a elasticidad no lineal*.

4.9.2 Cotas para Desplazamientos y Cargas Generalizadas

En secciones anteriores (ver, por ejemplo, (4.149)) habíamos establecido que

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV - \langle f, \mathbf{u}\rangle \geq \Pi(\mathbf{u}_0) = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) dV - \langle f, \mathbf{u}_0\rangle = \\ -\Pi^*(\mathbf{T}_0) = -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0) dV + ((\mathbf{T}_0, \overline{\mathbf{u}})) \geq -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV + ((\mathbf{T}, \overline{\mathbf{u}})) = \\ -\Pi^*(\mathbf{T}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T. \end{aligned} \tag{4.225}$$

Supongamos ahora que las restricciones cinemáticas en $\partial\mathscr{B}_u$ son homogénas, es decir, $\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, y que la carga aplicada f es una carga a un parámetro, es decir, $f = Q f_1$. En este caso la expresión anterior resulta

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV - Qq \geq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) dV - Qq_0 = \\ -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0) dV \geq -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV, \end{aligned} \tag{4.226}$$

para todo $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u$ y todo $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$ y donde

$$q = \langle f_1, \mathbf{u}\rangle \quad q_0 = \langle f_1, \mathbf{u}_0\rangle. \tag{4.227}$$

Luego, dada una dirección $\mathbf{u}^* \in \mathrm{Kin}_u$ (arbitraria) podemos obtener la *mejor* cota inferior para $\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0) dV$ resolviendo el problema

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\{\lambda Qq^* - \int_{\mathscr{B}} \pi(\lambda\mathscr{D}\mathbf{u}^*)dV\right\} \leq$$
$$Qq_0 - \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0)dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV. \quad (4.228)$$

En el caso de un material elástico lineal, el máximo puede ser calculado explícitamente. En efecto, para este material se verifica que

$$\pi(\lambda\mathbf{E}) = \lambda^2\pi(\mathbf{E}). \quad (4.229)$$

Substituyendo este resultado en el problema propuesto obtenemos

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}}\left\{\lambda Qq^* - \lambda^2\int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}^*)dV\right\} \leq$$
$$Qq_0 - \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0)dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV. \quad (4.230)$$

De esta manera, el máximo en λ queda caracterizado por la ecuación

$$Qq^* - 2\lambda\int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}^*)dV = 0, \quad (4.231)$$

de donde

$$\lambda_{\max} = \frac{Qq^*}{2\int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}^*)dV} \quad (4.232)$$

Substituyendo este resultado obtenemos

$$\lambda_{\max}\left\{Qq^* - \frac{Qq^*}{2\int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}^*)dV}\int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}^*)dV\right\} \leq Qq_0 - \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV =$$
$$\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0)dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV, \quad (4.233)$$

de donde

$$\frac{\lambda_{\max}}{2}Qq^* \leq Qq_0 - \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0)dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV, \quad (4.234)$$

para todo $\mathbf{u}^* \in \mathrm{Kin}_u$ y $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$, donde esta última variedad está caracterizada por

$$\mathrm{Est}_T = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W}', (\mathbf{T}, \hat{\mathbf{u}}) = Q\langle f_1, \hat{\mathbf{u}}\rangle \quad \forall\hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u\}. \quad (4.235)$$

Si en particular aplicamos este resultado para la dirección $\mathbf{u}_0$ y recordando que el material es lineal tendremos

$$\lambda_{\max} = \frac{Qq_0}{2\int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV} = 1 \quad (4.236)$$

con lo que obtenemos

$$\frac{1}{2}Qq_0 = \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0)dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV, \tag{4.237}$$

de donde

$$q_0 \leq \frac{2}{Q}\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T})dV \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T. \tag{4.238}$$

Obtenemos así una *cota superior* para el *desplazamiento generalizado* real del componente mecánico, q_0, asociado a la *carga generalizada* Q en función simplemente de campos de tensiones con ella equilibradas. El ejemplo a continuación muestra una aplicación de este resultado para una viga empotrada dentro de la teoría cinemática de Bernoulli para vigas y material elástico lineal.

Ejemplo 4.1 *Sea el componente indicado en la Figura 4.4.*

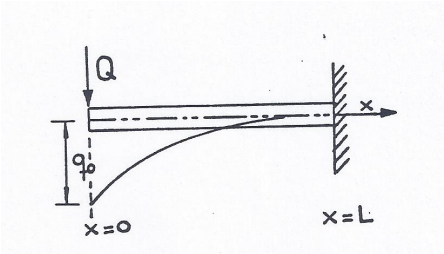


Fig. 4.4 Cota superior para el desplazamiento en viga empotrada en un extremo dentro de la teoría de Bernoulli para vigas y material elástico lineal.

Para este ejemplo tenemos

$$\mathrm{Est}_T = \{M, M = Qx\}, \tag{4.239}$$

$$\pi^*(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\frac{M^2}{\mathbb{E}I} = \frac{1}{2}\frac{Q^2x^2}{\mathbb{E}I}, \tag{4.240}$$

donde M es el momento flector, Q la carga aplicada en el punto que deseamos encontrar una cota superior para el desplazamiento, $\mathbb{E}$ es el módulo de elasticidad de Young e I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga que estamos suponiendo constante. Luego

$$q_0 \leq \frac{2}{Q}\int_0^L \frac{1}{2}\frac{Q^2x^2}{\mathbb{E}I}dx = \frac{QL^3}{3\mathbb{E}I}, \tag{4.241}$$

con lo que obtenemos la cota superior (coincidente con el desplazamiento exacto). Observe que este resultado fue alcanzado conociendo unicamente el conjunto de los campos de tensión equilibrados con la carga aplicada. A su vez, si en particular adoptamos una carga generalizada unitaria ($Q = 1$), una cota superior para el desplazamiento estará dada por $L^3/3\mathbb{E}I$.

Vamos a obtener ahora una *cota superior* para las cargas. Para ello, recordemos nuevamente la desigualdad

$$\Pi(\mathbf{u}) \geq \Pi(\mathbf{u}_0) = -\Pi^*(\mathbf{T}_0) \geq -\Pi^*(\mathbf{T}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T, \tag{4.242}$$

válida inclusive para materiales elásticos no lineales. De esta expresión y suponiendo que $f = 0$ tenemos

$$-\Pi^*(\mathbf{T}) = ((\mathbf{T}, \overline{\mathbf{u}})) - \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV \leq ((\mathbf{T}_0, \overline{\mathbf{u}})) - \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0) dV = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \quad \forall \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T. \tag{4.243}$$

Nuevamente, elegida la direción $\mathbf{T}^* \in \mathrm{Est}_T$ arbitraria podemos escoger el punto $\lambda \mathbf{T}^*$ que nos proporcione la mejor cota inferior para $\int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) dV$. En otras palabras

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\{ \lambda((\mathbf{T}^*, \overline{\mathbf{u}})) - \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\lambda \mathbf{T}^*) dV \right\} \leq ((\mathbf{T}_0, \overline{\mathbf{u}})) - \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0) dV = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV, \tag{4.244}$$

para todo $\mathbf{T}^* \in \mathrm{Est}_T$ y todo $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u$. Para el material elástico lineal, con un razonamiento similar al ya realizado, la expresión anterior conduce a

$$\lambda_{\max} = \frac{((\mathbf{T}^*, \overline{\mathbf{u}}))}{2 \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}^*) dV}, \tag{4.245}$$

que substituida en la desigualdad (4.244) resulta

$$\lambda_{\max} \left\{ ((\mathbf{T}^*, \overline{\mathbf{u}})) - \lambda_{\max} \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}^*) dV \right\} \leq ((\mathbf{T}_0, \overline{\mathbf{u}})) - \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}_0) dV = \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV, \tag{4.246}$$

de donde

$$\lambda_{\max} \frac{1}{2} ((\mathbf{T}^*, \overline{\mathbf{u}})) \leq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV \tag{4.247}$$

En particular para la dirección $\mathbf{T}_0$ resultará $\lambda_{\max} = 1$, luego

$$\frac{1}{2} ((\mathbf{T}_0, \overline{\mathbf{u}})) \leq \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}\mathbf{u}) dV. \tag{4.248}$$

Si admitimos ahora que

$$\overline{\mathbf{u}} = \overline{q}\mathbf{e} \tag{4.249}$$

es decir, depende de un único parámetro de desplazamiento generalizado, tendremos

$$\frac{1}{2}((\mathbf{T}_0,\mathbf{e}))\overline{q}=\frac{1}{2}Q_0\overline{q}\leq\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathscr{D}\mathbf{u})dV, \tag{4.250}$$

de donde

$$Q_0\leq\frac{2}{\overline{q}}\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathscr{D}\mathbf{u})dV. \tag{4.251}$$

Luego, haciendo uso de campos cinemáticamente admisibles obtenemos una cota superior para la carga generalizada real que sería necesaria aplicar al componente para producir un desplazamiento generalizado $\overline{q}$.

Hasta aquí, hemos obtenido cotas superiores para las cargas y desplazamientos en puntos donde la carga está aplicada o donde el desplazamiento está prescripto. Vamos a mostrar una técnica para acotar el desplazamiento en cualquier punto del componente. Para ello, consideremos el corpo $\mathscr{B}$ sujeto a la acción de la carga $f\in\mathscr{V}'$ y a restricciones cinemáticas en $\partial\mathscr{B}_u$ del tipo $\overline{\mathbf{u}}=\mathbf{0}$. Designemos también con $\mathbf{u}_0$ el campo de desplazamiento solución del problema de la elasto-estática correspondiente. Sea ahora $\mathbf{T}^*\in\mathscr{W}'$ un estado de tensiones equilibrado con la carga f^* por ahora arbitraria. De la propiedad de las funciones potenciais π y π^* tenemos

$$\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)+\pi^*(\mathbf{T}^*)\geq\mathbf{T}^*\cdot\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \tag{4.252}$$

de donde

$$\pi^*(\mathbf{T}^*)\geq\mathbf{T}^*\cdot\mathscr{D}\mathbf{u}_0-\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0). \tag{4.253}$$

Integrando en el dominio $\mathscr{B}$ y recordando que $\mathbf{T}^*$ es un campo estáticamente equilibrado con f^* resulta

$$\int_{\mathscr{B}}\pi^*(\mathbf{T}^*)dV\geq\int_{\mathscr{B}}T^*\cdot\mathscr{D}\mathbf{u}_0dV-\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV=\\ \langle f^*,\mathbf{u}_0\rangle-\int_{\mathscr{B}}\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)dV. \tag{4.254}$$

Ahora bien, para el caso de un material elástico lineal tenemos

$$\pi(\mathscr{D}\mathbf{u}_0)=\frac{1}{2}\mathbf{T}_0\cdot\mathscr{D}\mathbf{u}_0,\quad \mathbf{T}_0=\mathbb{D}\mathscr{D}\mathbf{u}_0, \tag{4.255}$$

donde $\mathbf{T}_0$ es un campo equilibrado con la carga f, luego

$$\int_{\mathscr{B}}\pi^*(\mathbf{T}^*)dV\geq\langle f^*,\mathbf{u}_0\rangle-\frac{1}{2}\langle f,\mathbf{u}_0\rangle=\left\langle f^*-\frac{1}{2}f,\mathbf{u}_0\right\rangle. \tag{4.256}$$

En particular, si queremos acotar $\mathbf{u}_0$ en un punto arbitrario $\overline{\mathbf{x}}\in\mathscr{B}$ según la direción $\mathbf{e}$, también arbitraria, bastará para ello adoptar como carga f^* la siguiente

$$f^*=\frac{1}{2}f+\delta_{\overline{\mathbf{x}}}Q^*\mathbf{e}, \tag{4.257}$$

donde $\delta_{\overline{\mathbf{x}}}$ es la función delta de Dirac en $\overline{\mathbf{x}}$, y Q^* es un escalar arbitrario. En efecto, substituyendo f^* en la última desigualdad obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}^*)dV \geq \langle \delta_{\overline{\mathbf{x}}} Q^* \mathbf{e}, \mathbf{u}_0 \rangle = Q^*(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e})_{\overline{\mathbf{x}}}, \tag{4.258}$$

de donde

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e})_{\overline{\mathbf{x}}} \leq \frac{1}{Q^*} \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}^*)dV, \tag{4.259}$$

donde debemos recordar que $\mathbf{T}^*$ es un campo equilibrado con la carga f^* adoptada. Como $\mathbf{T}^*$ dependerá de Q^* podremos modificar Q^* de manera a minimizar el lado derecho de la desigualdad. Tenemos así que la cota superior óptima corresponde a

$$(\mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{e})_{\overline{\mathbf{x}}} \leq \min_{Q^* \in \mathbb{R}} \left(\frac{1}{Q^*} \int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}^*)dV \right). \tag{4.260}$$

A seguir, presentamos un ejemplo para fijar las ideas presentadas.

Ejemplo 4.2 *Sea el componente representado en la Figura 4.5.*

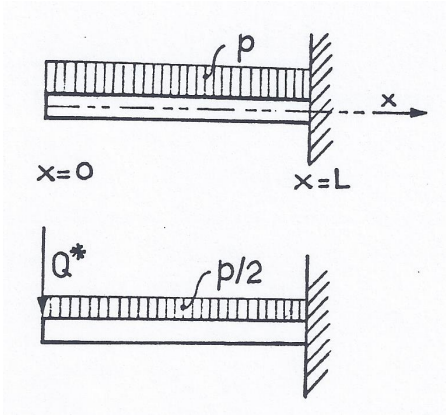


Fig. 4.5 Viga empotrada con carga distribuida.

Luego, tenemos

$$f \to p \text{ carga uniformemente distribuida}, \tag{4.261}$$

$$f^* \to \frac{1}{2}p + Q^*, \text{ donde } Q^* \text{ es una carga concentrada en } \overline{x} = 0. \tag{4.262}$$

El estado $\mathbf{T}^* = M^*$ *deberá estar equilibrado con* f^**, luego*

$$M^* = \frac{1}{2}p\frac{x^2}{2} + Q^* x = \frac{1}{4}px^2 + Q^* x. \tag{4.263}$$

Entonces

$$\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}^*)dV = \int_0^L \frac{1}{2}\frac{M^{*2}}{EI}dx = \int_0^L \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{4}px^2 + Q^*x\right)^2 dx = \frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{80}p^2L^5 + \frac{1}{8}pQ^*L^4 + \frac{1}{3}Q^{*2}L^3\right), \quad (4.264)$$

de donde

$$q_0 \leq \min_{Q^*\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2EI}\left(\frac{1}{80}\frac{p^2L^5}{Q^*} + \frac{1}{8}pL^4 + \frac{1}{3}Q^*L^3\right)\right\}. \quad (4.265)$$

La condición de mínimo corresponde a

$$\frac{d}{dQ^*}\left(\frac{1}{80}\frac{p^2L^5}{Q^*} + \frac{1}{8}pL^4 + \frac{1}{3}Q^*L^3\right) = 0, \quad (4.266)$$

de donde

$$Q^* = \sqrt{\frac{3}{80}}pL, \quad (4.267)$$

que nos conduce a la siguiente cota óptima

$$q_0 \leq \left(\frac{1}{\sqrt{240}} + \frac{1}{16}\right)\frac{pL^4}{EI} \approx 0.127\frac{pL^4}{EI}. \quad (4.268)$$

De esta manera, el desplazamiento exacto corresponde a $q_0 = 0.125qL^4/(EI)$. *Es decir, el desplazamiento ha sido acotado con un error de* $1,6\%$.

4.10 Problema de la Elasto-dinámica

En las secciones anteriores hemos concentrado nuestra atención en el problema de la elasto-estática. Ahora bien, en el Capítulo 3 vimos que el Principio de la Potencia Virtual nos define el concepto de equilibrio inclusive para el caso dinámico. En este caso era necesario incluir en el término correspondiente a la potencia externa, P_e, la potencia de las fuerzas de inércia, $-\rho\dot{\mathbf{v}}$, donde $\dot{\mathbf{v}}$ es la descripción espacial de la aceleración real del movimento.

Para simplificar nuestra presentación suponemos que el conjunto Kin_u es independiente del tiempo y en general convexo. Así, y dentro de las hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamientos, el problema de la elasto dinámica consistirá en: para cada instante de tiempo $t \in [0,t_f)$, determinar los campos $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u, \mathbf{E}_0 \in \mathscr{W}$ y $\mathbf{T}_0 \in \mathscr{W}'$, tales que

- el campo $\mathbf{T}_0$ esté en equilibrio (dinámico) con la carga $f_t \in \mathscr{W}'$, donde f_t representa la carga en el instante t;

- los campos $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{T}_0$ estén asociados a través de la ecuación constitutiva del material hiperelástico estudiado;
- el campo $\mathbf{E}_0 \in \mathscr{W}$ sea un campo compatible de deformación, es decir $\mathbf{E}_0 = \mathscr{D}\mathbf{u}_0$;
- el campo $\mathbf{u}_0$ satisfaga las condiciones iniciales

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}, \tag{4.269}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x},0) = \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}. \tag{4.270}$$

Como en el caso estático, podemos formular el problema de la elasto-dinámica en función únicamente del campo de desplazamientos (Problema Primal) o en función del campo de tensiones en equilibrio dinámico con la carga f_t (Problema Dual) o formulaciones mixtas, en función de campos de desplazamientos y de tensiones, o formulaciones generalizadas, es decir, en función de los tres campos: desplazamientos, deformaciones y tensiones.

Limitando nuestra presentación a la formulación en función del campo de desplazamientos, el problema de la elasto-dinámica consistirá en determinar, para cada instante de tiempo $t \in [0, t_f)$, el campo $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tal que

- Satisfaga el equilibrio

$$\left(\left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}} \right) \geq \langle f_t - \rho \ddot{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u(\mathbf{u}_0(\cdot,t)). \tag{4.271}$$

- Satisfaga la condición inicial

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \tilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}, \\ \dot{\mathbf{u}}_0(\mathbf{x},0) = \dot{\tilde{\mathbf{u}}}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}. \end{cases} \tag{4.272}$$

Se observa que las condiciones de contorno de tipo cinemáticas están satisfechas en la definición del conjunto de desplazamientos admisibles Kin_u que, como hemos supuesto no dependiente del tiempo, las condiciones iniciales deben ser compatibles con las restricciones implícitas en la definición de Kin_u.

Si consideramos restricciones cinemáticas del tipo bilateral, el conjunto Var_u resulta un subespacio vectorial de $\mathscr{U}$ por lo que la inecuación anterior se transformará en una ecuación variacional. Para este último caso y supuesta la existencia de una solución, no resulta difícil demostrar unicidad. Para ello, recuerde que Var_u lo habíamos *confundido* con Var_v, y que representa el conjunto de todas las acciones de movimento (campos de velocidades) virtuales, cinemáticamente admisibles. Además, haciendo intervenir al conjunto Kin_v de las velocidades cinemáticamente admisibles, tenemos que la caracterización del equilibrio puede ser reformulada de la siguiente manera

$$\left(\left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_0) \right) + \langle \rho \ddot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_0 \rangle = \langle f_t, \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_0 \rangle \quad \forall \dot{\mathbf{u}} \in \mathrm{Kin}_v. \tag{4.273}$$

Luego, si existen dos soluciones $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_1$ diferentes, donde $\mathbf{u}_1$ también es solución de (4.273) (poniendo $\mathbf{u}_1$ en vez de $\mathbf{u}_0$), tenemos que

$$\left(\left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0} - \left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_1}, \mathscr{D}(\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0)\right) + \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}_0 - \ddot{\mathbf{u}}_1), \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0\rangle = 0. \tag{4.274}$$

Para el caso de un material hiperelástico lineal la expresión anterior corresponde a

$$(\mathbb{D}\mathscr{D}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0), \mathscr{D}(\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0)) + \langle \rho(\ddot{\mathbf{u}}_1 - \ddot{\mathbf{u}}_0), \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0\rangle = 0, \tag{4.275}$$

de donde

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[(\mathbb{D}\mathscr{D}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0), \mathscr{D}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0)) + \langle \rho(\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0), \dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0\rangle\right] = 0. \tag{4.276}$$

Integrando la expresión anterior entre 0 y el tiempo genérico t, y dado que $\mathbf{u}_0$ y $\mathbf{u}_1$ satisfacen la misma condición inicial, y utilizando la positividad de $\mathbb{D}$ y de ρ, se sigue que

$$\mathscr{D}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_0) = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, t_f) \text{ y } \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}, \tag{4.277}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_1 - \dot{\mathbf{u}}_0 = \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, t_f) \text{ y } \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}. \tag{4.278}$$

De esto, se concluye finalmente que

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_0, \tag{4.279}$$

con lo que obtenemos la unicidad de la solución del problema de la elasto-dinámica. Para el caso de un material hiperelástico no lineal también se verifica el resultado anterior en virtud de que la relación constitutiva es monótona creciente y de la positividad de ρ.

Vamos a mostrar ahora que el Principio del Trabajo Virtual conjuntamente con las propiedades de la función de energía interna de deformación y de la función de densidad de masa ρ, nos permite obtener una nueva formulación variacional para caracterizar el *equilibrio dinámico*. No obstante nuestra presentación esté restringida a la elasticidad infinitesimal y a condiciones de contorno especiales (no dependientes del tiempo), los resultados que presentaremos a seguir pueden ser extendidos a casos más completos (ver por ejemplo, P. D. Panagiotopoulos ([230]), G. Fichera ([103]-[102]), G. Duvaut y J. L. Lions ([75]) y I. Ekeland y R. Temam ([77]).

Para ello, observemos que el PTV adaptado de manera a incluir las *fuerzas de inercia*, ecuación (4.273), debe ser satisfecho para todo instante de tiempo $t \in [0, t_f)$. Luego integrando en ese intervalo de tiempo tenemos

$$\int_0^{t_f} \left[\left(\left.\frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}}\right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}(\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_0)\right) + \langle \rho \ddot{\mathbf{u}}_0, \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_0\rangle - \langle f_t, \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{u}}_0\rangle\right] dt = 0$$

$$\forall \dot{\mathbf{u}} \in \mathrm{Kin}_v. \tag{4.280}$$

y de las propiedades de Kin_u y de Var_u tenemos que la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente manera

$$\int_0^{t_f} \left[\left(\left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}} \right) + \langle \rho \ddot{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle - \langle f_t, \hat{\mathbf{u}} \rangle \right] dt = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u. \tag{4.281}$$

De la definición de Var_u se sigue que

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t_f) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}. \tag{4.282}$$

Luego, y admitiendo para simplificar que ρ no depende del tiempo, el segundo término de la expresión (4.281) puede ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_0^{t_t} \langle \rho \ddot{\mathbf{u}}_0, \hat{\mathbf{u}} \rangle \, dt &= \int_0^{t_t} \int_{\mathscr{B}} \rho \ddot{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dV \, dt = \int_{\mathscr{B}} \int_0^{t_t} \rho \ddot{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} \, dt \, dV = \\ &\int_{\mathscr{B}} \left\{ \rho [\dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}}] \Big|_0^{t_f} - \int_0^{t_f} \rho \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\dot{\mathbf{u}}} \, dt \right\} d\mathscr{B} = - \int_{\mathscr{B}} \int_0^{t_f} \rho \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\dot{\mathbf{u}}} \, dt \, dV = \\ &- \int_0^{t_f} \int_{\mathscr{B}} \rho \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\dot{\mathbf{u}}} \, dV \, dt = - \frac{d}{d\alpha} \int_0^{t_f} \int_{\mathscr{B}} \pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}_0 + \alpha \hat{\dot{\mathbf{u}}}) \, dV \, dt \Big|_{\alpha=0} = \\ &- \frac{d}{d\alpha} \int_0^{t_f} \Pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}_0 + \alpha \hat{\dot{\mathbf{u}}}) \, dt \Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \tag{4.283}$$

donde $\pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}})$ y $\Pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}})$ son, respectivamente, la *densidad de energía cinética* y la *energía cinética total* del cuerpo y están dadas por

$$\pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2} \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}}, \tag{4.284}$$

$$\Pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}) = \int_{\mathscr{B}} \pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}) \, dV. \tag{4.285}$$

De manera similar los otros dos términos de la expresión (4.281) conducen respectivamente a

$$\int_t^{t_f} \int_{\mathscr{B}} \left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\mathscr{D}\mathbf{u}_0} \cdot \mathscr{D}\hat{\mathbf{u}} \, dV \, dt = \frac{d}{d\alpha} \int_t^{t_f} \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathscr{D}(\mathbf{u}_0 + \alpha \hat{\mathbf{u}})) \, dV \, dt \Big|_{\alpha=0}, \tag{4.286}$$

$$\int_t^{t_f} \langle f, \hat{\mathbf{u}} \rangle \, dt = \frac{d}{d\alpha} \int_t^{t_f} \langle f, \mathbf{u}_0 + \alpha \hat{\mathbf{u}} \rangle \, dt \Big|_{\alpha=0}. \tag{4.287}$$

Substituyendo (4.285)-(4.287) en la expresión (4.281) obtenemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\alpha} \int_t^{t_f} (\Pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}_0 + \alpha \hat{\dot{\mathbf{u}}}) - \Pi(\mathbf{u}_0 + \alpha \hat{\mathbf{u}})) \, dt \Big|_{\alpha=0} = \\ &\qquad \frac{d}{d\alpha} \int_t^{t_f} \mathscr{L}(\mathbf{u}_0 + \alpha \hat{\mathbf{u}}) \, dt \Big|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u, \end{aligned} \tag{4.288}$$

donde $\mathscr{L}(\mathbf{u}_0)$ es el *Lagrangeano* del cuerpo en estudio. El resultado anterior nos muestra que, partiendo del PTV y para el caso de materiales hiperelásticos (4.288) (o en general para cuerpos que tienen una energía potencial total), es posible llegar a una formulación variacional llamada *Principio de Mínima Acción* o *Principio de Hamilton* que caracteriza el problema de la elasto-dinámica. Tenemos así el siguiente principio.

Principio de Hamilton o de Mínima Acción

De todos los caminos de configuraciones admisibles que un cuerpo hiperelástico puede tomar desde su configuración admisible inicial en el instante $t_0 = 0$ hasta la configuración admisible final en el instante final t_f, el camino que extremiza la integral en el tiempo del Lagrangeano asociado al cuerpo, es decir el problema variacional que consiste en determinar $\mathbf{u}_0 \in \mathrm{Kin}_u$ tal que

$$\frac{d}{d\alpha}\int_t^{t_f} \mathscr{L}(\mathbf{u}_0 + \alpha\hat{\mathbf{u}})\,dt\bigg|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u, \tag{4.289}$$

donde

$$\mathscr{L}(\mathbf{u}) = \Pi_{kin}(\dot{\mathbf{u}}) - \Pi(\mathbf{u}) = \int_{\mathscr{B}} \left(\frac{1}{2}\rho\dot{\mathbf{u}}\cdot\dot{\mathbf{u}} - \pi(\mathbf{u})\right) dV + \langle f, \mathbf{u}\rangle, \tag{4.290}$$

es equivalente al problema de la elasto-dinámica.

Por último, al lector interesado en aumentar los conocimientos en estos temas (existencia, unicidad y formulaciones variacionales en dinámica) se recomienda la lectura de los trabajos de G. Fichera ([103]-[102]), P. H. Brézis ([42]), G. Duvaut y J. L. Lions ([75]) y I. Ekeland y R. Temam ([77]), citados en la bibliografía al final de este trabajo.

4.11 Solución Aproximada de Problemas Variacionales

En esta sección vamos a mostrar como los Principios Variacionales estudiados en las secciones anteriores nos proporcionan de una manera natural los algoritmos numéricos adecuados para la obtención de soluciones aproximadas.

Consideraremos inicialmente diferentes formulaciones variacionales para problemas con restricciones bilaterales, y luego veremos el caso de problemas de contacto en el cual trabajaremos con restricciones unilaterales.

4.11.1 Problema de la Elasto-Estática

Según hemos visto en secciones anteriores, el problema de la elasto-estática es equivalente a los seguientes problemas variacionales

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) \quad \text{(PMEPT)}, \tag{4.291}$$

$$\min_{\mathbf{T}\in \mathrm{Est}_T} \Pi^*(\mathbf{T}) \quad \text{(PMEC)}, \tag{4.292}$$

Como podemos apreciar, estos dos problemas están definidos en los conjuntos Kin_u y Est_T que, para restricciones cinemáticas del tipo bilateral, son translaciones de los subespacios vectoriales Var_u y Var_T de *dimensión infinita*, es decir $\mathrm{Kin}_u = \overline{\mathbf{u}} + \mathrm{Var}_u$, $\overline{\mathbf{u}} \in \mathrm{Kin}_u$ arbitrario, y $\mathrm{Est}_T = \overline{\mathbf{T}} + \mathrm{Var}_T$, $\overline{\mathbf{T}} \in \mathrm{Kin}_T$ arbitrario.

Para obtener soluciones aproximadas de estos dos problemas procedemos a defininirlos en espacios de *dimensión finita*. Para ello, designemos por $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ el *conjunto completo* de funciones coordenadas o funciones bases en el subespacio vectorial Var_u (en el caso del cuerpo tridimensional ϕ_i es un campo vetorial). Lo anterior equivale a decir que dado $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño, siempre será posible establecer un número entero $N = N(\varepsilon)$ tal que para todo $n > N$ resulta posible definir $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, tal que

$$\left\| \mathbf{u} - \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i \right\|_{\mathscr{U}} < \varepsilon, \tag{4.293}$$

donde $\|\cdot\|_{\mathscr{U}}$ es la norma adoptada en $\mathscr{U}$. En base a lo anterior, y para n finito, podemos definir el espacio de dimensión finita

$$\mathrm{Var}_u^n = \mathrm{span}\{\phi_i\}_{i=1}^{n}, \tag{4.294}$$

verificándose a su vez que, $\mathrm{Var}_u^n \subset \mathrm{Var}_u$. Recordando que Kin_u es una translación $\overline{\mathbf{u}}$ ($\overline{\mathbf{u}} \in \mathrm{Kin}_u$ arbitrario) de Var_u, podemos establecer en Kin_u el subconjunto $\mathrm{Kin}_u^n \subset \mathrm{Kin}_u$ dado por

$$\mathrm{Kin}_u^n = \overline{\mathbf{u}} + \mathrm{Var}_u^n = \overline{\mathbf{u}} + \mathrm{span}\{\phi_i\}_{i=1}^{n}. \tag{4.295}$$

Lo anterior podemos extenderlo de una manera similar al espacio Var_T y al conjunto Est_T. Luego, designando por $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ al conjunto completo de funciones coordenadas (en el caso de cuerpo tridimensional ψ_i es un campo tensorial de segundo orden) en el espacio Var_T tenemos, para cada r finito, que

$$\mathrm{Var}_T^r = \mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{r} \subset \mathrm{Var}_T, \tag{4.296}$$

$$\mathrm{Est}_T^r = \overline{\mathbf{T}} + \mathrm{Var}_T^r = \overline{\mathbf{T}} + \mathrm{span}\{\psi_i\}_{i=1}^{r} \subset \mathrm{Est}_T. \tag{4.297}$$

Con estos nuevos conjuntos, pasamos a reformular los problemas variacionales definiéndolos en los conjuntos Kin_u^n y Est_T^r, respectivamente. Como veremos más adelante, esto conducirá al problema de *minimizar una función* en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^r$, respectivamente. Los algoritmos numéricos para la solución de estos problemas en

dimensión finita básicamente pueden agruparse en dos grandes categorías: una llamada *Métodos Directos* integrada por algoritmos que en general procuran minimizar en cada paso la función objetivo, y la otra llamada *Métodos Indirectos*, que corresponde a los algoritmos que buscan la solución de las ecuaciones algebraicas (de Euler en el caso de dimensión infinita) que caracterizan el mínimo.

El PMEPT y el PMEC resultan ahora definidos de la siguiente manera

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u^n} \Pi(\mathbf{u}), \tag{4.298}$$

$$\min_{\mathbf{T}\in \mathrm{Est}_T^r} \Pi^*(\mathbf{T}). \tag{4.299}$$

Dado que $\mathrm{Kin}_u^n = \overline{\mathbf{u}} + \mathrm{Var}_u^n$ y $\mathrm{Est}_T^r = \overline{\mathbf{T}} + \mathrm{Var}_T^r$ tenemos

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u^n \Rightarrow \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i, \tag{4.300}$$

$$\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T^r \Rightarrow \mathbf{T} = \overline{\mathbf{T}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \psi_i, \tag{4.301}$$

donde variando $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,n$ y $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,r$, obtenemos todos los elementos de Kin_u^n y Est_T^r, respectivamente.

En base a esto, el funcional $\Pi(\mathbf{u})$ en Kin_u^n toma la forma

$$\Pi\left(\overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i\right) = \int_{\mathscr{B}} \pi\left(\overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i\right) dV - \langle f, \overline{\mathbf{u}}\rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i \langle f, \phi_i\rangle = \widetilde{\Pi}(a_1,\ldots,a_n) = \widetilde{\Pi}(\mathbf{a}), \tag{4.302}$$

donde $\widetilde{\Pi}$ es una *función* definida en $\mathbb{R}^n$ es decir

$$\min_{\mathbf{u}\in \mathrm{Kin}_u^n} \Pi(\mathbf{u}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n} \widetilde{\Pi}(\mathbf{a}). \tag{4.303}$$

En otras palabras, al trabajar en dimensión finita hemos transformado el problema original de minimizar un funcional en un espacio de dimensión infinita (PMEPT) en un problema de minimizar una función $\widetilde{\Pi}$ definida en un espacio de dimensión finita $\mathbb{R}^n$.

De forma similar el PMEC se transforma en

$$\min_{\mathbf{T}\in \mathrm{Est}_T^r} \Pi^*(\mathbf{T}) \Leftrightarrow \min_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^r} \widetilde{\Pi}^*(\mathbf{b}), \tag{4.304}$$

donde

$$\widetilde{\Pi}^*(\mathbf{b}) = \int_{\mathscr{B}} \pi^*\left(\overline{\mathbf{T}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \psi_i\right) dV - \left(\left(\overline{\mathbf{T}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \psi_i, \overline{\mathbf{u}}\right)\right). \tag{4.305}$$

Por otro lado, si el material es elástico lineal, de la (4.302) tenemos

$$\widetilde{\Pi}(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s\left(\overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i\right)\cdot\nabla^s\left(\overline{\mathbf{u}} + \sum_{j=1}^{n} a_j\phi_j\right)dV - \langle f, \overline{\mathbf{u}}\rangle - \sum_{i=1}^{n} a_i\langle f, \phi_i\rangle, \quad (4.306)$$

y dada la simetría y positividad de $\mathbb{D}$ se sigue que la condición necesaria y suficiente para el mínimo de $\widetilde{\Pi}$ está dada por

$$\frac{\partial\widetilde{\Pi}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1,\ldots,n, \quad (4.307)$$

o en forma explícita

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s\phi_i\cdot\nabla^s\phi_j dV\right]a_j = \langle f,\phi_i\rangle - \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla^s\phi_i dV \quad i = 1,\ldots,n. \quad (4.308)$$

Como era de esperar, las expresiones anteriores también pueden obtenerse directamente del PTV, restringiendo el mismo al espacio de dimensión finita Var_u^n.

Luego, el problema dado por la (4.303) es equivalente al problema de resolver el sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$\mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{b}, \quad (4.309)$$

donde

- $\mathbf{K}$ es la matriz del sistema, simétrica positiva definida (en virtud de las propiedades de $\mathbb{D}$ y a partir de suponer que el movimiento de cuerpo rígido ha sido eliminado). Su coeficiente genérico $[\mathbf{K}]_{ij} = K_{ij}$ está dado por

$$K_{ij} = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s\phi_i\cdot\nabla^s\phi_j dV; \quad (4.310)$$

- $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ es el vector término independiente que es función de la carga aplicada b y de las condiciones de contorno en $\partial\mathscr{B}_u$. Su coeficiente genérico $[\mathbf{b}]_i = b_i$ está dado por

$$\mathbf{b}_i = \langle f,\phi_i\rangle - \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s\overline{\mathbf{u}}\cdot\nabla^s\phi_i dV. \quad (4.311)$$

A su vez, y de las propiedades de $\mathbf{K}$ se sigue que existe su inversa $\mathbf{K}^{-1}$ por lo que los coeficientes de la solución aproximada estarán dados por $\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{b}$.

Aquí se ve perfectamente que si las funciones coordenadas ϕ_i son escogidas de manera a ser ortogonales en el sentido

$$K_{ij}\begin{cases} = 0 & \text{si } i \neq j, \\ \neq 0 & \text{si } i = j, \end{cases} \quad (4.312)$$

tendremos que el sistema de ecuaciones (4.309) es diagonal. La construcción de tal tipo de funciones es en numerosos casos prácticos imposible de ser realizada. Sin embargo, una manera de obtener matrices $\mathbf{K}$ con la mayor cantidad posible de coeficientes nulos, consiste en trabajar con funciones coordenadas ϕ_i de *soporte compacto*, es decir ϕ_i no es idénticamente nula en una parte (compacta) de $\mathscr{B}$ y es idénticamente nula en su parte complementaria. Así, si al soporte de ϕ_i lo designamos por $\mathscr{B}_i$, tendremos que

$$K_{ij} = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \phi_i \cdot \nabla^s \phi_j dV \begin{cases} = 0 & \text{si } \mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_j = \emptyset, \\ \neq 0 & \text{caso contrario.} \end{cases} \tag{4.313}$$

Este aspecto, conjuntamente con la necesidad de facilitar la construcción de la función $\overline{\mathbf{u}}$, ha convertido al Método de los Elementos Finitos (MEF) en uno de los métodos más atractivos en la actualidade para la construcción de las funciones coordenadas ([299], [220], [218], [219], [45], [149], [287]).

Por último, en el caso de un material hiperelástico no lineal, la condición necesaria y suficiente de mínimo está caracterizada por

$$\int_{]B} \left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\nabla^s \left(\overline{\mathbf{u}} + \sum_{j=1}^n a_j \phi_j \right)} \cdot \nabla^s \phi_i dV = \langle f, \phi_i \rangle \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.314}$$

que corresponde a un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas. Nuevamente y como esperado, este resultado puede obtenerse directamente del PTV restringiéndolo al espacio de dimensión finita Var_u^n.

Resumiendo, el PMEPT (ver expresión (4.303)) corresponde, en dimensión finita, al siguiente problema clásico de programación matemática

- minimización sin restricciones de una función cuadrática en $\mathbb{R}^n$, caso el material sea hiperelástico lineal. Si el material es hiperelástico no lineal tendremos una minimización sin restricciones de la función estrictamente convexa $\widetilde{\Pi}(\mathbf{a})$ (recuerde la convexidade estricta de π y suponga eliminados los movimientos de cuerpo rígido). Para este caso y el anterior los métodos empleados para encontrar la solución son los *métodos directos* que, como ya mencionamos, procuran en cada paso minimizar la función;
- la caracterización del mínimo estará dada por el sistema de ecuaciones algebraicas lineales dado por la (4.309), o no lineales dado por la (4.314), respectivamente. En este caso, los métods empleados están asociados a métodos que tratan de resolver este sistema.

Un razonamiento enteramente similar al ya realizado nos permitirá concluir que el PMEC (ver (4.304)) corresponde, en dimensión finita, al problema clásico de programación matemática

- minimización en $\mathbb{R}^r$ sin restricciones de la función (estrictamente) convexa $\widetilde{\Pi}^*(\mathbf{b})$ (recuerde que π^* es estritamente convexo) caso el material sea hiperelástico no lineal;

- minimización en $\mathbb{R}^r$, sin restricciones, de la función cuadrática $\widetilde{\Pi}^*(\mathbf{b})$ caso el material sea lineal

$$\widetilde{\Pi}^*(\mathbf{b}) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}^{-1}\left(\overline{\mathbf{T}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \psi_i\right)\cdot\left(\overline{\mathbf{T}} + \sum_{j=1}^{r} b_j \psi_j\right) dV - \left(\left(\overline{\mathbf{T}} + \sum_{i=1}^{r} b_i \psi_i, \overline{\mathbf{u}}\right)\right); \quad (4.315)$$

- la caracterización del mínimo estará dada por el sistema no lineal de ecuaciones algebraicas

$$\frac{\partial \widetilde{\Pi}^*}{\partial b_i} = 0 \quad i = 1,\ldots,r, \quad (4.316)$$

o, explícitamente

$$\int_{\mathscr{B}} \left.\frac{\partial \pi^*}{\partial \mathbf{T}}\right|_{\overline{\mathbf{T}}+\sum_{j=1}^{r} b_j \psi_j} \cdot \psi_i dV = ((\psi_i, \overline{\mathbf{u}})) \quad i = 1,\ldots,r, \quad (4.317)$$

caso el material sea hiperelástico no lineal y, en el caso lineal, por un sistema lineal de ecuaciones algebraicas

$$\sum_{j=1}^{r}\left[\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}^{-1}\psi_j \cdot \psi_i dV\right] b_j = ((\psi_i, \overline{\mathbf{u}})) - \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}^{-1}\overline{\mathbf{T}} \cdot \psi_i dV \quad i = 1,\ldots,r, \quad (4.318)$$

y donde la matriz del sistema nuevamente es simétrica positiva definida.

Como podemos apreciar, la determinación de soluciones aproximadas de los Principios Variacionales: PMEPT y PMEC recaen, en el caso de un material elástico lineal, en la resolución de un *sistema lineal de ecuaciones algebraicas*. Para la determinación de este sistema se requiere

- Construir las funciones coordenadas (ϕ_i ó ψ_i) cuyas combinaciones lineales definen las funciones aproximantes admisibles. En términos del MEF lo anterior corresponde a definir el tipo de elemento a ser empleado.
- Para determinar los coeficientes de la matriz del sistema se requiere integrar una forma bilineal simétrica positiva definida

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \phi_j \cdot \nabla^s \phi_i dV, \quad (4.319)$$

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}^{-1}\psi_j \cdot \psi_i dV. \quad (4.320)$$

Esta integración puede hacerse analíticamente cuando sea posible, o numéricamente caso contrario.
- La determinación de los coeficientes del término independiente requiere la integración de formas lineales del tipo

$$\langle f, \phi_i \rangle, \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \overline{\mathbf{u}} \cdot \nabla^s \phi_i dV, \tag{4.321}$$

$$((\psi_i, \overline{\mathbf{u}})), \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}^{-1}\overline{\mathbf{T}} \cdot \psi_i dV, \tag{4.322}$$

que puede realizarse analíticamente o numéricamente.

Como podemos ver, la determinación de la solución aproximada de los problemas de mínimo radica, fundamentalmente, en la determinación de las funciones coordenadas $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$. Además, es interesante resaltar, que la determinación de las funciones $\overline{\mathbf{u}}$ y $\overline{\mathbf{T}}$ (asociadas a las condiciones de contorno cinemáticas en $\partial\mathscr{B}_u$ y mecánicas en $\partial\mathscr{B} \setminus \partial\mathscr{B}_u$, respectivamente) puede constituirse en una gran dificultad. Luego, específicamente en relación al MEF, podemos observar que

- el mismo no es otra cosa que una manera sistemática de construir las funciones coordenadas ϕ_i, $i = 1, \ldots, n$, y ψ_i, $i = 1, \ldots, r$;
- la determinación de las funciones $\overline{\mathbf{u}}$, o $\overline{\mathbf{T}}$, resulta bastante simple usando las proprias funciones coordenadas.

Ahora bien, que características generales deben tener estas funciones coordenadas? La respuesta a esta pregunta está implícita en la propia formulación variacional. Para mostrar esto último, consideremos el PMEPT y supongamos por simplicidad que $\overline{\mathbf{u}} = 0$ en $\partial\mathscr{B}_u$. En este caso $\mathrm{Kin}_u \equiv \mathrm{Var}_u$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{U}$ y de las propiedades de $\mathbb{D}$ se tiene que la forma bilineal

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \mathbf{u} \cdot \nabla^s \mathbf{v} dV \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_u, \tag{4.323}$$

cumple con todas las propiedades de un producto interno en $\mathscr{U}$. Adoptando este producto interno, inducimos una norma, llamada *norma energía*

$$\|\mathbf{u}\|_E = \sqrt{a(\mathbf{u}, \mathbf{u})} \quad \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u, \tag{4.324}$$

El completamiento de Kin_u respecto a esta norma energía da lugar al espacio Hilbert H, llamado *espacio energía*, formado por todas las funciones (clases de funciones) que, conjuntamente con sus primeras derivadas, sean cuadráticamente integrables en $\mathscr{B}$ y tales que en $\partial\mathscr{B}_u$ sea nulas.

Si el problema fuera de flexión de vigas y/o placas dentro de la teoría de Bernoulli y elasticidad lineal, por ejemplo, las funciones ϕ_i deberían ser continuas con derivadas de primer y segundo orden cuadrado integrables, ya que el operador de deformación $\mathscr{D}$ contiene en este caso derivadas hasta el orden 2.

En el caso del PMEC, la forma bilineal resulta

$$c(\mathbf{T}, \mathbf{S}) = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T} \cdot \mathbb{D}^{-1}\mathbf{S} dV \quad \mathbf{T}, \mathbf{S} \in \mathrm{Est}_T, \tag{4.325}$$

de donde

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{c(\mathbf{T}, \mathbf{T})} \quad \mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T, \tag{4.326}$$

luego, las funciones coordenadas ψ_i deben ser solamente cuadrado integrables en $\mathscr{B}$.

Existe sin embargo una diferencia fundamental entre el PMEPT y el PMEC que, desde el punto de vista numérico, hace más atractiva una de estas formulaciones. En efecto, en el PMEPT (modelo en desplazamientos) las funciones ϕ_i deben ser suficientemente regulares en el sentido anteriormente establecido y nulas en la frontera $\partial\mathscr{B}_u$ (ya que estamos suponiendo condiciones de contorno nulas en esta parte). Usando el MEF la construción de tales funciones no presenta en general ninguna dificultad, inclusive para el caso de condiciones de contorno no homogéneas. Ahora bien, en el PMEC (modelo en tensiones o también llamado modelo de fuerza) las funciones ψ_i deben ser campos autoequilibrados de esfuerzos internos. Es aquí donde radica la dificultad de esta formulación. La construcción de estas funciones autoequilibradas ahora no es simple y esta dificultad ha hecho que el modelo en desplazamientos (PMEPT) sea más popular que el modelo en tensiones (PMEC).

4.11.2 Principio Variacional de Hellinger-Reissner

Siguiendo un razonamiento similar al ya realizado tendremos que, para determinar una solución aproximada del problema variacional de Hellinger-Reissner debemos redefinirlo sobre espacios de dimensión finita.

Llamando

$$\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}: \text{ al conjunto completo de funciones coordenadas en } \mathrm{Var}_u \tag{4.327}$$

$$\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}: \text{ al conjunto completo de funciones coordenadas en } \mathscr{W}', \tag{4.328}$$

tendremos nuevamente

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u^n \Leftrightarrow \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i, \text{ con } \overline{\mathbf{u}} \in \mathrm{Kin}_u \text{ arbitrario}, \tag{4.329}$$

$$\mathbf{T} \in \mathscr{W}'^{r} \Leftrightarrow \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{r} c_i \psi_i. \tag{4.330}$$

Luego, el problema variacional de Hellinger-Reissner toma la forma: determinar $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u^n$ y $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'^{r}$ tales que sean solución del problema

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u^n} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'^{r}} \mathscr{F}_{HR}(\mathbf{u},\mathbf{T}) = \min_{\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u^n} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'^{r}} -\int_{\mathscr{B}} \pi^*(\mathbf{T}) dV + \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot\nabla^s\mathbf{u} dV - \langle f,\mathbf{u}\rangle. \tag{4.331}$$

Lo anterior es equivalente a determinar los números reales a_i, $i = 1,\ldots,n$, y c_j, $j = 1,\ldots,r$ tales que hagan estacionaria la función

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{HR}(\mathbf{a},\mathbf{c}) = \widetilde{\mathscr{F}}_{HR}(a_1,\ldots,a_n,c_1,\ldots,c_r) = -\int_{\mathscr{B}} \pi^*\left(\sum_{j=1}^{r} c_j\psi_j\right)dV + \int_{\mathscr{B}}\left(\sum_{j=1}^{r} c_j\psi_j\right)\cdot\nabla^s\left(\overline{\mathbf{u}}+\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i\right)dV - \left\langle f,\left(\overline{\mathbf{u}}+\sum_{i=1}^{n} a_i\phi_i\right)\right\rangle. \quad (4.332)$$

Si el material es lineal la expresión anterior toma la forma

$$\widetilde{\mathscr{F}}_{HR}(\mathbf{a},\mathbf{c}) = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{r} c_j c_s\int_{\mathscr{B}}\mathbb{D}^{-1}\psi_j\cdot\psi_s dV + \sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{n} c_j a_i\int_{\mathscr{B}}\psi_j\cdot\nabla^s\phi_i dV + \sum_{j=1}^{r} c_j\int_{\mathscr{B}}\psi_j\cdot\nabla^s\overline{\mathbf{u}}dV - \sum_{i=1}^{n} a_i\langle f,\phi_i\rangle - \langle f,\overline{\mathbf{u}}\rangle. \quad (4.333)$$

Nuevamente, podemos distinguir dos tipos de algoritmos numéricos para resolver este problema:

- algoritmos que procuran directamente la solución del problema de min-max, llamados por esta razón de algoritmos de *punto de silla*;
- algoritmos que procuran la solución del problema de min-max encontrando la solución del sistema de ecuaciones (lineales o no) que la caracterizan.

En el último caso, la condición de min-max está caracterizada por el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}_{HR}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1,\ldots,n, \quad (4.334)$$

$$\frac{\partial\widetilde{\mathscr{F}}_{HR}}{\partial c_j} = 0 \quad j = 1,\ldots,r, \quad (4.335)$$

o en forma explícita

$$\sum_{j=1}^{r}\left[\int_{\mathscr{B}}\psi_j\cdot\nabla^s\phi_i dV\right]c_j = \langle f,\phi_i\rangle \quad i = 1,\ldots,n, \quad (4.336)$$

$$-\sum_{s=1}^{r}\left[\int_{\mathscr{B}}\mathbb{D}^{-1}\psi_s\cdot\psi_j dV\right]c_s + \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\mathscr{B}}\psi_j\cdot\nabla^s\phi_i dV\right]a_i = -\int_{\mathscr{B}}\psi_j\cdot\nabla^s\overline{\mathbf{u}}dV \quad j = 1,\ldots,r. \quad (4.337)$$

En forma matricial, el sistema anterior puede reescribirse como

$$\mathbf{K}_{HR}\mathbf{d} = \mathbf{g}, \quad (4.338)$$

donde

$$\mathbf{K}_{HR} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+r)\times(n+r)}, \tag{4.339}$$

$$\mathbf{d} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+r)}, \tag{4.340}$$

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+r)}, \tag{4.341}$$

siendo que las componentes de los bloques matriciales, $[\mathbf{A}]_{ji} = A_{ji}$ y $[\mathbf{C}]_{js} = C_{js}$ (simétrica), son

$$A_{ji} = \int_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \nabla^s \boldsymbol{\phi}_i dV \tag{4.342}$$

$$C_{js} = -\int_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \mathbb{D}^{-1} \boldsymbol{\psi}_s dV. \tag{4.343}$$

y los vectores que componen el vector de cargas, $[\mathbf{g}_1]_i = g_{1i}$ y $[\mathbf{g}_2]_j = g_{2j}$, vienen dados por

$$g_{1i} = \langle f, \boldsymbol{\phi}_i \rangle, \tag{4.344}$$

$$g_{2j} = -\int_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}} dV. \tag{4.345}$$

Recordemos que $\mathbf{K}_{HR}$ es simétrica y utilicemos a continuación la propiedad de que $\mathbf{C}$ es simétrica positiva definida. Primero, reescribimos el sistema (4.338) como sigue

$$\mathbf{A}^T \mathbf{c} = \mathbf{g}_1, \tag{4.346}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{a} + \mathbf{C}\mathbf{c} = \mathbf{g}_2, \tag{4.347}$$

y, por lo tanto, de la (4.347) obtenemos

$$\mathbf{C}\mathbf{c} = \mathbf{g}_2 - \mathbf{A}\mathbf{a}. \tag{4.348}$$

Como $\mathbf{C}$ es positiva definida tiene inversa, entonces podemos substituir $\mathbf{c}$ en la (4.346) y llegamos a lo siguiente

$$\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{g}_1 - \mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{g}_2. \tag{4.349}$$

Luego, la solución $(\mathbf{a}, \mathbf{c})$ del problema de min-max está caracterizada, en el caso de material elástico lineal, por la solución de los sistemas de ecuaciones algebraicas anteriores. Como $\mathbf{C}$ es simétrica positiva definida, la matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{A}$ tendrá inversa si el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es r y $r \leq n$.

Lo anterior nos muestra que la construcción de los espacios Var_u^n y $\mathscr{W}^{lr}$ debe realizarse de manera a satisfacer también esta restricción.

4.11.3 Principio Variacional Generalizado

En esta formulación variacional generalizada la solución $(\mathbf{u}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{T}_0)$ es un elemento del conjunto $\mathrm{Kin}_u \times \mathscr{W} \times \mathscr{W}'$. Luego, como en la sección anterior, la solución aproximada será calculada redefiniendo el problema en espacios de dimensión finita. Así, si designamos

$$\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}: \text{ conjunto completo de funciones coordenadas de } \mathrm{Var}_u, \tag{4.350}$$

$$\{\Xi_i\}_{i=1}^{\infty}: \text{conjunto completo de funciones coordenadas de } \mathscr{W}, \tag{4.351}$$

$$\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}: \text{ conjunto completo de funciones coordenadas de } \mathscr{W}', \tag{4.352}$$

luego

$$\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u^n \subset \mathrm{Kin}_u \Leftrightarrow \mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i, \tag{4.353}$$

$$\mathbf{E} \in \mathscr{W}^m \subset \mathscr{W} \Leftrightarrow \mathbf{E} = \sum_{i=1}^{m} b_i \Xi_i, \tag{4.354}$$

$$\mathbf{T} \in \mathscr{W}'^r \subset \mathscr{W}' \Leftrightarrow \mathbf{T} = \sum_{i=1}^{r} c_i \psi_i. \tag{4.355}$$

De esta manera, el principio variacional generalizado redefinido en espacios de dimensión finita toma la forma: determinar $\mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u^n$, $E \in \mathscr{W}^m$ y $\mathbf{T} \in \mathscr{W}'^r$ tales que hagan estacionario el funcional

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u^n} \min_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}^m} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'^r} \mathscr{F}(\mathbf{u},\mathbf{E},\mathbf{T}) =$$

$$\min_{\mathbf{u}\in\mathrm{Kin}_u^n} \min_{\mathbf{E}\in\mathscr{W}^m} \max_{\mathbf{T}\in\mathscr{W}'^r} \int_{\mathscr{B}} \pi(\mathbf{E}) dV - \langle f, \mathbf{u} \rangle - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T} \cdot (\mathbf{E} - \nabla^s \mathbf{u}) dV \tag{4.356}$$

Lo anterior equivale a decir que estamos procurando los números reales a_i, $i = 1, \ldots, n$, b_k, $k = 1, \ldots, m$ y c_j, $j = 1, \ldots, r$ que hacen estacionaria la función

$$\widetilde{\mathscr{F}}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) = \widetilde{\mathscr{F}}(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_m,c_1,\ldots,c_r) =$$

$$\int_{\mathscr{B}} \pi\left(\sum_{k=1}^{m} b_k \Xi_k\right) dV - \left\langle f, \left(\overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i\right)\right\rangle$$

$$- \int_{\mathscr{B}} \left(\sum_{j=1}^{r} c_j \psi_j\right) \cdot \left[\left(\sum_{k=1}^{m} b_k \Xi_k\right) - \nabla^s \left(\overline{\mathbf{u}} + \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i\right)\right] dV. \tag{4.357}$$

Nuevamente, los algoritmos numéricos pueden ser o bien técnicas que determinan la solución a través de una búsqueda directa del punto que hace estacionaria la función, o bien algoritmos numéricos que determinan la solución a través de la solución del sistema de ecuaciones que la caracteriza. En este último caso, las ecuaciones están dadas por

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{F}}}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.358}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{F}}}{\partial b_k} = 0 \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4.359}$$

$$\frac{\partial \widetilde{\mathscr{F}}}{\partial c_j} = 0 \quad j = 1, \ldots, r. \tag{4.360}$$

En forma explícita, las expresiones anteriores corresponden a

$$\sum_{j=1}^{r} \left[\int_{\mathscr{B}} \psi_j \cdot \nabla^s \phi_i dV \right] c_j = \langle f, \phi_i \rangle \quad i = 1, \ldots, n, \tag{4.361}$$

$$\int_{\mathscr{B}} \left. \frac{\partial \pi}{\partial \mathbf{E}} \right|_{\sum_{t=1}^{m} b_t \Xi_t} \cdot \Xi_k dV - \sum_{j=1}^{r} \left[\int_{\mathscr{B}} \psi_j \cdot \Xi_k dV \right] c_j = 0 \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4.362}$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \left[\int_{\mathscr{B}} \psi_j \cdot \Xi_k dV \right] b_k + \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{\mathscr{B}} \psi_j \cdot \nabla^s \phi_i dV \right] a_i = - \int_{\mathscr{B}} \psi_j \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}} dV \quad j = 1, \ldots, r, \tag{4.363}$$

Para el caso de un material elástico lineal basta substituir la (4.362) por la siguiente ecuación

$$\sum_{t=1}^{m} \left[\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D} \Xi_t \cdot \Xi_k dV \right] b_t - \sum_{j=1}^{r} \left[\int_{\mathscr{B}} \psi_j \cdot \Xi_k dV \right] c_j = 0 \quad k = 1, \ldots, m. \tag{4.364}$$

Matricialmente, el sistema de ecuaciones anterior tiene la siguiente estructura

$$\mathbf{K}_G \mathbf{e} = \mathbf{h}, \tag{4.365}$$

donde

$$\mathbf{K}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} & -\mathbf{H} \\ \mathbf{A} & -\mathbf{H}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m+r)\times(n+m+r)}, \tag{4.366}$$

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m+r)}, \tag{4.367}$$

$$\mathbf{h} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m+r)}, \tag{4.368}$$

con los bloques matriciales $[\mathbf{A}]_{ji} = A_{ji}$, $[\mathbf{B}]_{kt} = B_{kt}$ y $[\mathbf{H}]_{kj} = H_{kj}$ definidos como sigue

$$A_{ji} = \int_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \nabla^s \phi_i dV, \tag{4.369}$$

$$B_{kt} = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\boldsymbol{\Xi}_t \cdot \boldsymbol{\Xi}_k dV, \tag{4.370}$$

$$H_{kj} = \int_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \boldsymbol{\Xi}_k dV. \tag{4.371}$$

y con las componentes del vector de carga, $[\mathbf{h}_1]_i = h_{1i}$ y $[\mathbf{h}_3]_j = h_{3j}$, definidas como

$$h_{1i} = \langle f, \phi_i \rangle, \tag{4.372}$$

$$h_{3j} = -\int_{\mathscr{B}} \boldsymbol{\psi}_j \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}} dV. \tag{4.373}$$

El sistema de ecuaciones lineales (4.365) puede entonces reescribirse de forma expandida como

$$\mathbf{A}^T \mathbf{c} = \mathbf{h}_1, \tag{4.374}$$

$$\mathbf{B}\mathbf{b} - \mathbf{H}\mathbf{c} = \mathbf{0}, \tag{4.375}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{H}^T \mathbf{b} = \mathbf{h}_3. \tag{4.376}$$

Como $\mathbf{B}$ es simétrica positiva definida, de la (4.375) se sigue que

$$\mathbf{b} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{c}, \tag{4.377}$$

y substituyendo en la (4.376)

$$-(\mathbf{H}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H})\mathbf{c} + \mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{h}_3. \tag{4.378}$$

Si el rango de la matriz $\mathbf{H}$ es r y $r \leq m$, tendremos que la inversa de la matriz $\mathbf{H}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H}$ existe, por lo que

$$\mathbf{c} = -(\mathbf{H}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H})^{-1} (\mathbf{h}_3 - \mathbf{A}\mathbf{a}). \tag{4.379}$$

Finalmente, subustituyendo esta en la (4.374) conduce a

$$[\mathbf{A}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{A}]\mathbf{a} = \mathbf{A}^T (\mathbf{H}^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{h}_3 + \mathbf{h}_1. \tag{4.380}$$

Nuevamente, si el rango de la matriz $\mathbf{A}$ es n y $n \leq r$, las expresiones (4.380), (4.379) y (4.377) nos proporcionan la solución $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ que estamos procurando.

4.11.4 Problemas de Contacto en Elasto-Estática

Según hemos visto en las secciones anteriores, el problema de la elasto-estática incluyendo restricciones del tipo unilateral sin fricción (perfectas) consiste en el siguiente problema variacional: determinar $\mathbf{u} \in \text{Kin}_u$ tal que

$$\min_{\mathbf{u}\in\text{Kin}_u} \Pi(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{u}\in\text{Kin}_u} \int_{\mathscr{B}} \pi(\nabla^s \mathbf{u}) - \langle f, \mathbf{u}\rangle. \tag{4.381}$$

Para obtener una solución aproximada de (4.381) nuevamente procedemos a redefinirlo en un espacio de dimensión finita.

Designando con $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ al conjunto completo de funciones coordenadas en el espacio $\mathscr{U}$ de desplazamientos posibles, el conjunto Kin_u^n puede ser definido como

$$\text{Kin}_u^n = \left\{ \mathbf{u};\, \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathscr{K} \subset \mathbb{R}^n \right\}, \tag{4.382}$$

donde $\mathscr{K}$ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n$.

De esta manera el PMEPT, incluyendo restricciones unilaterales de contorno, se reduce al siguiente problema de programación matemática

$$\min_{\mathbf{a}\in\mathscr{K}} \widetilde{\Pi}(\mathbf{a}) = \min_{\mathbf{a}\in\mathscr{K}} \int_{\mathscr{B}} \pi\left(\nabla^s \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i \right) \right) dV - \left\langle f, \sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i \right\rangle. \tag{4.383}$$

En general, para hacer el problema anterior tratable numéricamente, el convexo $\mathscr{K}$ es nuevamente aproximado obteniéndose así un nuevo convexo $\mathscr{K}_a$. Cuando usamos el MEF, una manera de construir $\mathscr{K}_a$ es establecer que las restricciones que definen Kin_u sean solamente satisfechas en determinados puntos del dominio. Por ejemplo, puntos nodales, puntos empleados para la integración numérica de las expresiones que intervienen en el PMEPT, etc. ([22], [85],[100]).

Como resultado de esta aproximación, numerosos problemas recaen en un conjunto convexo $\mathscr{K}_a$ que puede ser descripto a través de un sistema de m inecuaciones del tipo

$$\mathbf{A}\mathbf{a} \leq \mathbf{c}, \tag{4.384}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y posee rango m.

Para el caso de apoyos discretos unilaterales (comunes en tubulaciones) puede arribarse a restricciones del tipo ([85])

$$\mathbf{d} \leq \mathbf{a} \leq \mathbf{b}, \tag{4.385}$$

donde las desigualdades valen componente a componente.

Luego, el PMEPT, incluyendo restricciones unilaterales del tipo indicadas en (4.384), toma la forma

$$\min_{\substack{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\\ \mathbf{Aa}\leq\mathbf{c}}} \Pi(\mathbf{a}) = \min_{\substack{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\\ \mathbf{Aa}\leq\mathbf{c}}} \int_{\mathscr{B}} \pi\left(\nabla^s\left(\sum_{i=1}^n a_i\phi_i\right)\right)dV - \left\langle f, \sum_{i=1}^n a_i\phi_i\right\rangle. \tag{4.386}$$

En el caso particular de material hiperelástico lineal, lo anterior se reduce al problema clásico de *programación cuadrática* llamado *problema primal*

$$\min_{\substack{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\\ \mathbf{Aa}\leq\mathbf{c}}} \Pi(\mathbf{a}) = \min_{\substack{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n\\ \mathbf{Aa}\leq\mathbf{c}}} \frac{1}{2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{Ka} - \mathbf{f}\cdot\mathbf{a}, \tag{4.387}$$

donde $\mathbf{K}\in\mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz simétrica positiva definida de componentes $[\mathbf{K}]_{ij} = K_{ij}$ dadas por

$$K_{ij} = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s\phi_i\cdot\nabla^s\phi_j dV, \tag{4.388}$$

y $\mathbf{f}\in\mathbb{R}^n$ de componentes $[\mathbf{f}]_i = f_i$ definidas como sigue

$$f_i = \langle f, \phi_i\rangle. \tag{4.389}$$

La restricción sobre $\mathbf{a}$ en el problema (4.387) puede ser eliminada a través de un multiplicador de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^m$ tal que $\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}$. En efecto, observando que

$$\max_{\boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}}(\mathbf{Aa}-\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{\lambda} = \begin{cases} +\infty & \text{para todo } \mathbf{a} \text{ tal que } \mathbf{Aa}-\mathbf{c}>\mathbf{0},\\ 0 & \text{para todo } \mathbf{a} \text{ tal que } \mathbf{Aa}-\mathbf{c}\leq\mathbf{0}, \end{cases} \tag{4.390}$$

el problema (4.387) es equivalente al siguiente problema de min-max (problema de punto de silla)

$$\min_{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n}\max_{\substack{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}}} \frac{1}{2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{Ka} - \mathbf{f}\cdot\mathbf{a} + (\mathbf{Aa}-\mathbf{c})\cdot\boldsymbol{\lambda}. \tag{4.391}$$

Como ahora en el problema (4.391) la minimización sobre $\mathbf{a}$ no está restringida, la misma es alcanzada por todo vector $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ asociado a $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^m$ dado por

$$\mathbf{Ka} - \mathbf{f} + \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \tag{4.392}$$

y como $\mathbf{K}$ es simétrica positiva definida podemos escribir

$$\mathbf{a} = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{f} - \mathbf{A}^T\boldsymbol{\lambda}), \tag{4.393}$$

que substituida en el problema (4.391) conduce a un nuevo problema definido ahora sobre el multiplicador de Lagrange llamado *problema dual* del problema (4.387)

$$\min_{\substack{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^m\\ \boldsymbol{\lambda}\geq\mathbf{0}}} \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{e}, \tag{4.394}$$

donde $\mathbf{P}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ es una matriz simétrica y $\mathbf{e}\in\mathbb{R}^m$, y están dados por

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}^T, \tag{4.395}$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{A}\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} - \mathbf{c}. \tag{4.396}$$

El problema dual nuevamente es un problema de programación cuadrática pero esta vez definido sobre un convexo $\mathscr{K}$ mucho más simple que en el problema (4.387).

Tanto en el problema de punto de silla (4.391), como en el problema dual (4.394), este tipo de restricción más simple, $\lambda \geq \mathbf{0}$, no es otra cosa que un cono convexo de vértice en el origen. Esto permite que la caracterización de la solución de (4.391), y (4.394), sea un problema de *complementaridad lineal*.

En efecto, veamos el problema de min-max (4.391). La solución $(\mathbf{a}^*, \lambda^*)$ está caracterizada por

$$(\mathbf{K}\mathbf{a}^* - \mathbf{f} + \mathbf{A}^T\lambda^*) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{a}^*) = 0 \quad \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, \tag{4.397}$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{a}^* - \mathbf{c}) \cdot (\lambda - \lambda^*) \leq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^m, \lambda \geq \mathbf{0}. \tag{4.398}$$

La primera expresión corresponde a la condición de mínimo sobre la variable no restringida $\mathbf{a}$. La segunda, corresponde a la condición de máximo sobre λ restringida a pertencer al cono convexo $\lambda \geq \mathbf{0}$. De la primera expresión se concluye rápidamente que

$$\mathbf{K}\mathbf{a}^* - \mathbf{f} + \mathbf{A}^T\lambda^* = \mathbf{0}. \tag{4.399}$$

De la segunda expresión tenemos que para $\lambda = \mathbf{0}$ es $(\mathbf{A}\mathbf{a}^* - \mathbf{c}) \cdot \lambda^* \geq \mathbf{0}$ y para $\lambda = 2\lambda^*$ resulta $(\mathbf{A}\mathbf{a}^* - \mathbf{c}) \cdot \lambda^* \leq 0$. De esto concluimos que $(\mathbf{A}\mathbf{a}^* - \mathbf{c}) \cdot \lambda^* = 0$. Luego, $(\mathbf{A}\mathbf{a}^* - \mathbf{c}) \cdot \lambda \leq 0$, $\forall \lambda \geq \mathbf{0}$, de donde obtenemos

$$\mathbf{A}\mathbf{a}^* - \mathbf{c} \leq \mathbf{0}. \tag{4.400}$$

Vemos así que la solución $(\mathbf{a}^*, \lambda^*)$ del problema (4.391), es solución del siguiente problema de complementaridad lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{K}\mathbf{a} + \mathbf{A}^T\lambda &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{c} + \mathbf{z} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{z} \cdot \lambda &= 0, \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0}, \\ \lambda &\geq \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{4.401}$$

donde el vector $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m$, es llamado *variable de ajuste*.

Un razonamiento análogo al que acabamos de realizar nos muestra que la solución λ^* del problema (4.394) está caracterizada por

$$(\mathbf{P}\lambda^* - \mathbf{e}) \cdot (\lambda - \lambda^*) \geq 0 \quad \forall \lambda \geq \mathbf{0}, \tag{4.402}$$

de donde

$$(\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{e}) \cdot \boldsymbol{\lambda}^* = 0, \tag{4.403}$$

$$(\mathbf{P}\boldsymbol{\lambda}^* - \mathbf{e}) \geq \mathbf{0}, \tag{4.404}$$

con lo que concluimos que la solución $\boldsymbol{\lambda}^*$ del problema (4.394), es solución del siguiente problema de complementaridad lineal

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\boldsymbol{\lambda} - \mathbf{e} - \mathbf{z} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{z} \cdot \boldsymbol{\lambda} &= 0, \\ \mathbf{z} &\geq \mathbf{0}, \\ \boldsymbol{\lambda} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{4.405}$$

Luego, para resolver el problema dual (4.394) podemos recurrir, por ejemplo, a dos algoritmos. El primeiro de ellos es el *Método de Gauss-Seidel con Relajación y Proyección*, MGSRP, el segundo es el *Método de Lemke* que es un algoritmo numérico que en un *número finito* de pasos permite determinar la solución del problema de complementaridad lineal asociado ([24]).

En particular el MGSRP resulta de fácil programación y consiste en

1. Adopte $\boldsymbol{\lambda}^0$ admisible, es decir, $\boldsymbol{\lambda}^0 \geq \mathbf{0}$.
2. Adopte $w \in (0,2)$
3. Para $k = 0,1,2,\ldots$, calcule para $i = 1,\ldots,m$

$$\lambda_i^* = \frac{e_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_{ij}\lambda_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} P_{ij}\lambda_j^k}{P_{ii}}, \tag{4.406}$$

$$\lambda_i^{k+1} = \Pi((1-w)\lambda_i^k + w\lambda_i^*), \tag{4.407}$$

hasta que

$$\frac{\|\boldsymbol{\lambda}^{k+1} - \boldsymbol{\lambda}^k\|}{\|\boldsymbol{\lambda}^k\|} \leq \varepsilon, \tag{4.408}$$

donde Π es el operador proyección en $[0,+\infty)$ dado por

$$\Pi(u) = \max(0,u) \quad u \in \mathbb{R}, \tag{4.409}$$

donde ε es un número positivo suficientemente pequeño definiendo la tolerancia y donde $\|\cdot\|$ es la norma adoptada.

4.12 Lectura Adicional

El lector interesado en aumentar los conocimientos en los temas presentados en este capítulo puede consultar las publicaciones indicadas en la bibliografía al final de este trabajo. En particular, los siguientes trabajos han sido utilizados en la preparación de este capítulo

1) **Libros**: N. I. Akhiezer [1], W. F. Ames [2, 3], D. G. Ashwell y R. H. Gallagher [17], J. P. Aubin [18], M. S. Bazaraa y C. M. Shetty [24], G. A. Bliss [36], O. Bolza [37], C. A. Brebbia y H. Tottenham [41], B. Carnahan H. A. Luther y J. Wilkes [46], E. W. Cheney [48], P. G. Ciarlet [49, 50], L. Collatz [52], B. Courant [59], B. Courant y D. Hilbert [60], G. Dahlquist y A. Björck [63], P. J. Davis [64], J. W. Detteman [70], G. Duvaut y J. L. Lions [75], C. Dym y I. H. Shames [76], L. Elsgoltz [78], I. Ekeland y R. Temam [77], Fadeev Faddeeva [81], R. A. Feijóo [83], R. A. Feijóo y E. Taroco [92, 91, 93, 94], G. Fichera [103, 102], B. A. Finlayson [104], G. E. Forsythe y W. R.Wason [107], G. E. Forsythe y C. Moler [106], M. Fremond [108], Y. C. Fung [110], I. M. Gelfand y S. V. Fomin [111], P. Germain [116, 117], R. Glowinsk J. L. Lions y R. Tremoliers [121], M. E. Gurtin [130, 129], E. Isaacson y H. B. Keller [147], C. Johnson [149], A. N. Kolmogorov y S. V. Fomin [157], E. Kreyszig [162], C. Lanczos [163], H. Leipholz [168], D. G. Luenberger [172], G. I. Marchuk [178], H. D. Meyer [185], S. G. Mikhlin [191, 192, 193, 194, 195], S. G. Mikhlin y K. L. Smolitskiy [196], M. Morse [197], A. W. Naylor y G. R. Sell [202], J. Necas [203], J. T. Oden [211, 210, 213, 214, 215], J. T. Oden y G. F. Carey [218, 219], J. T. Oden G. F. Carey y E. B. Becker [220], J. T. Oden y J. N. Reddy [223, 222], P. M. Prenter [241], J. S. Prezemieniecki [242], K. Rektorys [244], R. D. Richtmyer y K. W. Morton [245], H. Sagan [259, 258], G. Strang y G. Fix [272], E. Taroco y R. A. Feijóo [276, 279], T. R. Tauchert [281], A. E. Taylor [282], S. Timohenko y J. N. Goodier [288], M. N. Vainberg [294], K. Washizu [296], R. Weinstock [298], O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor [299, 300],
2) **Publicaciones en general**: J. H. Argyris [6, 7, 8, 9, 10, 11], J. H. Argyris y S. Kelsey [13], J. H. Argyris y D. W. Scharpf [14, 15], J. H. Argyris I. Fried y D. W. Scharpf [12], H. J. C. Barbosa y R. A. Feijóo [22], L. Bevilacqua R. A. Feijóo y L. Rojas [30, 31], J. H. Bramble y S. R. Hilbert [40], P. H. Brézis [42], B. Courant [58], Z. Da Fonseca [62], G. del Piero [233], G. del Piero y P. Podio-Guidugli [234], De Veubeke [65, 66, 67, 68], R. A. Feijóo [82, 84], R. A. Feijóo y H. J. C. Barbosa [85], R. A. Feijóo y L. Bevilacqua [86], R. A. Feijóo L. Rojas y L. Bevilacqua [87, 88], R. A. Feijóo L. Rojas E. Taroco y L. Bevilacqua [89], R. A. Feijóo y E. Taroco [90], M. Geradin [112], P. Germain [113, 114, 115], C. Gonzales Guirnaldes [122], J. T. Oden [207, 208, 209, 212], J. T. Oden y G. Aguirre-Ramirez [216], J. T. Oden y W. H. Armstrong [217], J. T. Oden y B. E. Kelley [221], J. T. Oden y D. Somogyi [224], G. Romano [247, 248, 249, 250], G. Romano y G. Alfano [251], G. Romano y M. Romano [252], G. Romano L. Rosati y F. Marotti de Sciarra [253, 255, 254], G. Romano L. Rosati F. Marotti de Sciarra y P. Bisegna [256], E. Taroco y R. A. Feijóo [275, 277], E. Taroco R. A. Feijóo y L. C. Martins [280], J. M. Thomas [286], O. C. Zienkiewicz y J. Z. Zhu [301], N. Zouain R. A. Feijóo y E. Taroco [305],

Capítulo 5
Materiales que Experimentan Fluencia

5.1 Introducción

En las aplicaciones industriales es frecuente que piezas de máquinas y elementos estructurales estén sometidos a temperaturas elevadas. Lo anterior hace necesario conocer, de la mejor manera posible, las propiedades mecánicas de los materiales empleados en su construcción permitiendo así preveer su comportamiento a lo largo de la vida útil.

En el caso de materiales sometidos a temperaturas elevadas, las deformaciones en el tiempo, conocidas como fenómeno de fluencia o *creep*, pasan a tener importancia fundamental. Dentro de este régimen de trabajo se hace necesario determinar modelos mecánicos que representen el comportamiento de los materiales y mediante los cuales sea posible estimar la distribución de tensiones y deformaciones.

5.2 Aspectos Fenomenológicos de la Fluencia de Metales

Si bien el Ing. L. T. Vicat (ver [295]) efectuó en el siglo pasado observaciones sistemáticas sobre el fenómeno de deformación lenta en barras metálicas, se admite, generalmente, que la teoría fenomenológica de la fluencia (fenómeno también conocido como *creep*) comenzó a principio del siglo XX con los trabajos del físico inglés E. N. Andrade [4, 5]. El fue quien introdujo la terminología empleada hasta el presente para distinguir las diferentes regiones de la fluencia.

Un ensayo típico de fluencia a través del cual se trata de estabelecer una relación entre la deformación uniaxial ε, la tensión σ y el tiempo t a una determinada temperatura consiste, básicamente, en lo siguiente. El cuerpo de prueba es colocado en un horno cuya temperatura se mantiene constante (controlándola de la manera más exacta posible) y es sometido una carga de tracción. Aquí, debemos notar que cuando el cuerpo de prueba aumenta su longitud, su sección transversal disminuye por lo que la tensión aumenta si la carga se mantiene constante. Desde los primeiros

años del estudio del fenómeno de fluencia, este aspecto fue cuidado e ingeniosos mecanismos fueron ideados para asegurar la constancia en tensiones ([4, 5]). Los resultados de estos ensayos son colocados en forma de curvas ε (deformación acumulada) versus t (tiempo) como muestra la Figura 5.1. La deformación instantánea que ocurre al aplicar la carga la designamos con ε_0. Esta deformación instantanea, incluye deformaciones elásticas e inelásticas (tales como las de origen plástico) que no dependen del tiempo y son funciones del nivel de carga, o sea $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(P)$, siendo P la carga aplicada.

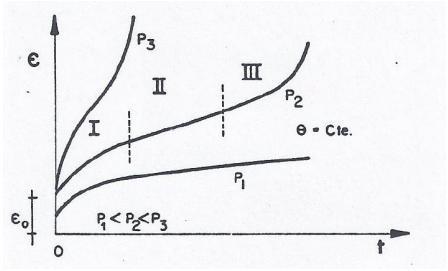


Fig. 5.1 Comportamiento característico de materiales que experimentan fluencia.

De la observación de las curvas de fluencia podemos distinguir, particularmente en la correspondiente a P_2, tres regiones de comportamiento diferente. Inicialmente tenemos el segmento de curva indicado con I, que se caracteriza por una tasa de deformación $\dot{\varepsilon}$ decerciente. Este período es conocido como *fluencia primaria* (en inglés *primary creep*). En la región II la tasa de deformación es aproximadamente constante e igual al valor mínimo alcanzado durante la etapa primaria del fenómeno. Este período es llamado *fluencia secundaria* o *fluencia estacionaria* (en inglés *secondary creep*, *steady-state-creep*). Finalmente, la región III se caracteriza por una tasa creciente hasta que surge la rotura del cuerpo de prueba. Esta región es llamada *fluencia terciaria* (en inglés *tertiary creep*).

Podemos decidir también que durante la parte primaria y secundaria de la fluencia, la tensión permanece prácticamente constante, no ocurriendo lo mismo durante la etapa terciaria, donde los cambios en la sección transversal se hacen cada vez más notables a medida que transcurre el proceso. Aún más, el surgimento de cavidades en el cuerpo modifica substancialmente la distribución de tensiones en la seccción transversal. Lo anterior nos muestra que mucho cuidado debe tenerse al modelar esta región en virtud de la complejidad de la misma.

En la Figura 5.2 presentamos una curva $\dot{\varepsilon}$ versus t donde distinguimos más claramente cada una de estas regiones.

La subdivisión de las curvas de fluencia en las tres regiones mencionadas, es en cierta forma convencional. Por ejemplo, la parte lineal correspondiente al régimen estacionario (fluencia secundaria) no siempre está presente. Así, para bajos niveles de carga, la tasa de deformación no alcanza su mínimo prácticamente durante todo

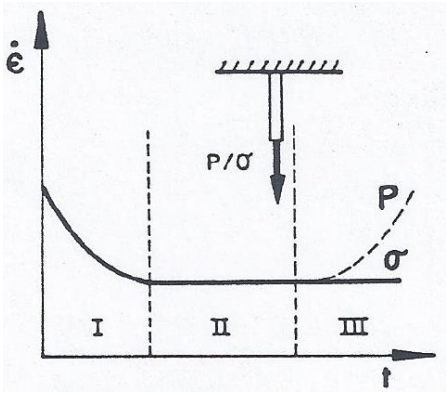


Fig. 5.2 Velocidad de deformación de fluencia.

el ensayo (ver Figura 5.1, curva para la carga P_1). Para niveles altos de carga, la parte estacionaria prácticamente se reduce al punto de inflexión.

La información que podemos extraer de este ensayo de fluencia suele ser representada de diferentes maneras que resultan de utilidad, pues ponen más en evidencia la relación existiente entre las diferentes variables que intervienen en el problema.

Así, para resaltar la influencia del tiempo en la deformación de fluencia es conveniente rediseñar las curvas de fluencia, representadas en la Figura 5.1, en un nuevo sistema de coordenadas $\dot{\varepsilon}$ versus σ, siendo el tiempo t constante para cada curva. Este tipo de curva es llamada *curva isócrona de fluencia*. Una serie de curvas isócronas, obtenidas por E. L. Robinson (ver [246]) en ensayos de 100.000 horas, correspondientes a un acero cromo-níquel-molibdeno están reproducidas en la Figura 5.3.

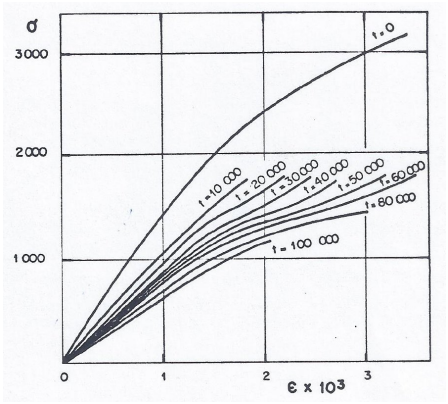


Fig. 5.3 Curvas isócronas de un acero cromo-níquel-molibdeno.

Otro tipo de representación, corresponde a lo que se llama *curvas de igual deformación*, comúnmente representadas en gráficos $\log\sigma$ versus $\log t$, como se ve en la Figura 5.4.

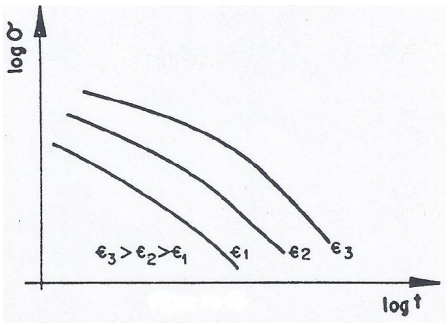


Fig. 5.4 Curvas de igual deformación.

Otra caracterización bastante útil es la que representa $\dot{\varepsilon}_{\min}$ (tasa mínima de deformación de fluencia) en función de la tensión σ. Este gráfico generalmente es representado en escala logarítmica, como apreciado en la Figura 5.5.

Esta curva nos dice que la relación entre $\dot{\varepsilon}$ y σ para bajos niveles de tensión es casi *lineal* mientras que, para niveles altos de tensión, $\dot{\varepsilon}_{\min}$ es proporcional a una cierta potencia de σ.

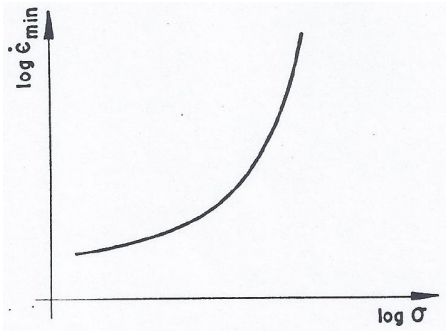


Fig. 5.5 Comportamiento de la tasa mínima de deformación de fluencia.

Otra curva es la que relaciona el nivel de tensión aplicada al cuerpo de prueba y el tiempo transcurrido hasta su rotura, geralmente también representada en escala logarítmica, como se ve en la Figura 5.6.

Esta curva nos pone en evidencia una transición o cambio de comportamiento, dependiendo del nivel de tensión. La primera parte de la curva generalmente está asociada a una rotura dúctil mientras que la segunda, está asociada a una rotura frágil.

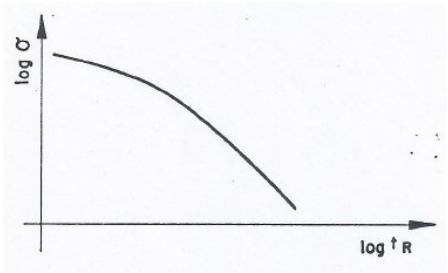


Fig. 5.6 Curva típica de tiempo para rotura en fluencia.

5.3 Influencia de la Temperatura

En la sección anterior hemos descripto el fenómeno de la fluencia suponiendo la temperatura constante durante toda la experiencia.

Como regla general, podemos decir que cuando la temperatura crece la tasa de deformación también crece y, para una tensión dada una determinada tensión es alcanzada en un lapso de tiempo menor.

En la actualidad ya se conoce que la fluencia está gobernada por diferentes *mecanismos térmicamente activados*. Así, las diferentes teorías de fluencia asumen que las deformaciones inelásticas están asociadas al movimiento de ciertos elementos estructurales (a nivel cristalino) causado por la acción térmica.

Para un instante t cada uno de estos elementos tiene una determinada energía u asociada al mecanismo que se está considerando. Cuando en un elemento esta energía u alcanza un valor crítico u_0, llamado *energía de activación*, el elemento se desplaza y produce una deformación.

Admitiendo que la distribución de energía entre los elementos sigue la ley de Maxwell, es posible mostrar que el número probable de elementos activados en ese instante de tiempo está dado por

$$\exp\left(-\frac{u_o}{R\theta}\right), \tag{5.1}$$

donde R es la constante universal de los gases y θ es la temperatura absoluta.

Recordando que una vez activado el elemento se produce una deformación, parece natural aceptar que la tasa de deformación de fluencia correspondiente a un dado mecanismo sea proporcional al número de elementos activados. Se llega así a una dependencia de tipo exponencial, conocida como ley de Arrhenius.

Las Figuras 5.7 y 5.8 representan gráficamente la influencia de la temperatura sobre la deformación total ε y la tasa mínima de deformación $\dot{\varepsilon}_{\min}$.

Son varios los autores (M. F. Ashby, [16], J. E. Dorn, [73, 74], J. J. Frost et al. [109], A. K. Mukherjee et al. [198], H. Oikawa [227], etc.) que han investigado una serie de mecanismos controladores de la fluencia. De estos mecanismos los más importantes son los llamados *fluencia por discordancia* y *fluencia por difusión*. En el

primero, defectos llamados *discordancias* (*dislocations*) en la estrutura cristalina pueden movese a través de una activación térmica o por efecto de tensiones elevadas. A bajas tensiones, y/o temperaturas, este tipo de movimiento decrece. Sin embargo, el fenómeno de fluencia puede continuar debido ahora a la influencia del otro mecanismo (fluencia por difusión). Fluencia por discordancia depende de una manera altamente no lineal de la tensión mientras que la fluencia por difusión es aproximadamente lineal con el estado de tensión.

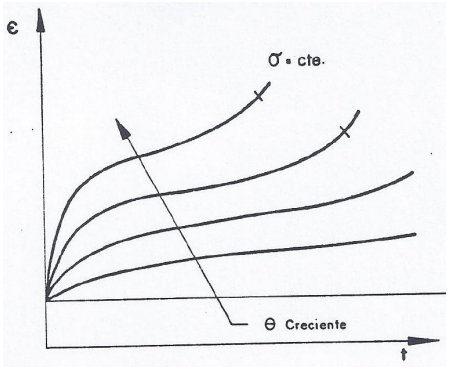


Fig. 5.7 Influencia de la temperatura sobre la deformación total ε.

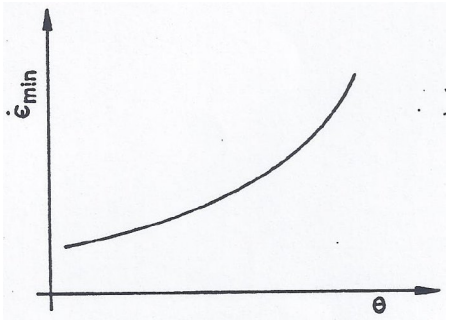


Fig. 5.8 Influencia de la temperatura sobre la tasa mínima deformación $\dot{\varepsilon}_{\text{min}}$.

En particular la Figura 5.9 representa un diagrama tridimensional (tensión-deformación inelástica-tamaño de grano) definiendo los campos de predominio de los diversos mecanismos que controlan la fluencia para el aluminio según H. Oikawa [227].

La Figura 5.10 representa un mapa de mecanismos propuestos por Frost et al. [109] para el acero inoxidable ASI316 con tamaño de grano de $120\,\mu$m. Los mecanismos controladores de la fluencia representados en la Figura 5.10 son

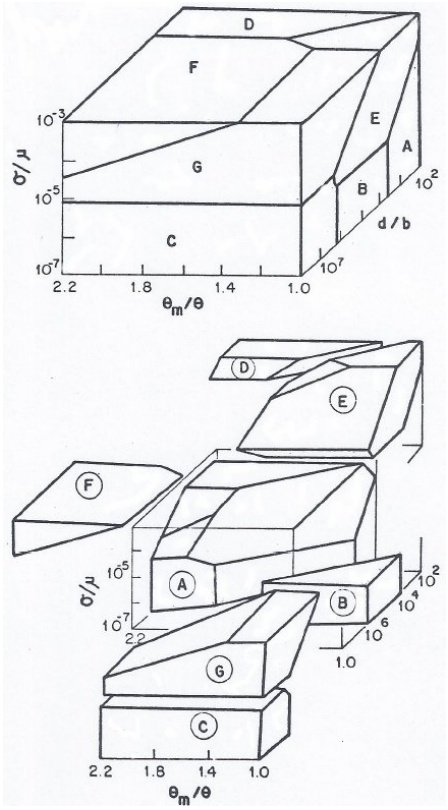


Fig. 5.9 Sólido de mecanismo de deformación para el aluminio según Oikawa [227]. A: Fluencia por difusión según Coble; B: Fluencia por difusión según Nabarro-Herring; C: Fluencia por difusión según Harper-Dorn; D: Deformación superplástica controlada por difusión en el contorno del grano; E: Deformación superplástica controlada por difusión en la red; F: Fluencia por discordancia controlada por difusión en el núcleo; G: Fluencia por discordancia controlada por difusión en la red.

- deslizamiento por discordancia (deformación plástica);
- fluencia por discordancia;
- fluencia por difusión según Coble;
- fluencia por difusión según Nabarro-Herring.

Las ecuaciones constitutivas para estos mecanismos están indicados en la Tabla 5.1, donde el coeficiente de autodifusión D_Y y el coeficiente de difusión en el contorno de los granos D_{cg} están gobernados por una expresión conteniendo el factor

$$\exp\left(-\frac{\cdot}{R\theta}\right). \tag{5.2}$$

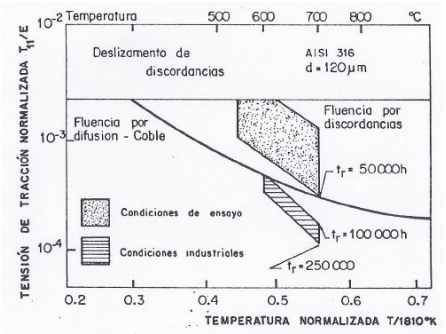


Fig. 5.10 Mapa de deformación para el acero AISI316 con $d = 120\,\mu$m. Se indica también la región de los ensayos de caractrización del material y la región de las aplicaciones industriales para 100.000 hs a 250.000 hs, Frost et al. [109].

En otras palabras, en todas las leyes allí presentadas correspondientes a diferentes mecanismos, la influencia de la temperatura está explícitamente colocada a través de un factor equivalente al propuesto al iniciar la sección.

Por otra parte, en la Figura 5.10 hemos marcado la región comúnmente explorada por ensayos de fluencia con hasta 40.000 horas de duración (aproximadamente 6 años). Podemos observar que esta región se encuentra totalmente incluida en la región correspondiente al mecanismo de fluencia por discordancia que, como podemos apreciar de la Tabla 5.1, está gobernada por la ley de Norton [53, 54, 205]. Sin embargo, es interesante resaltar que, para aplicaciones industriales donde la vida útil del componente mecánico está comprendido entre 100.000 a 250.000 horas, recaen en un campo controlado por el mecanismo de fluencia por difusión del tipo propuesto por Coble o Nabarro-Herring. Las ecuaciones constitutivas de Nabarro-Herring y Coble presentadas en la Tabla 5.1 sugieren que el material tiene un comportamiento viscoso Newtoniano bastante diferente del propuesto por Norton.

5.4 Recuperación, Relajación, Cargas Cíclicas y Fatiga

En las secciones anteriores hemos presentado algunos aspectos del fenómeno de fluencia correspondiente al caso de estados de carga (o tensión) constante en condiciones isotérmicas. Estos aspectos fueron puestos en evidencia a través de ensayos simples de fluencia.

La experiencia nos muestra que en general un cuerpo estará sometido, a lo largo de su vida útil, a solicitaciones (de carga y temperatura) bastante diferentes a las idealizadas en estos ensayos de fluencia. Es común, por ejemplo, que un componente mecánico esté sometido a cargas y/o efectos térmicos variables en el tiempo. Ejemplos de lo anterior pueden ser

Deslizamiento por Discordancia	
$D_{11} = A \exp\left[-ba\frac{(\frac{\mu b}{c} - T_{11})}{RT}\right]$	si $\frac{T_{11}}{\mu} \geq \frac{T_{11}^0}{\mu}$
$D_{11} = 0$	si $\frac{T_{11}}{\mu} < \frac{T_{11}^0}{\mu}$
Fluencia por Discordancia	
$D_{11} = A\mu b \frac{D_v}{RT} (\frac{T_{11}}{\mu})^n$	
Fluencia por Difusión	
$D_{11} = A\mu b \frac{D_v}{RT} (\frac{b}{d})^2 \frac{T_{11}}{\mu}$	
$D_{11} = A\mu b \frac{D_{cg}}{RT} (\frac{b}{d})^3 \frac{T_{11}}{\mu}$	

donde
a: área de activación
b: vector de Burger
c: distancia media entre los obstáculos
R: constante de Boltzmann
μ: módulo de rigidez transversal
T_{11}^0: tensión de fluencia
D_v: coeficiente de autodifusión
D_{cg}: coeficiente de difusón en el contorno de grano
A: constante diferente para cada ecuación

Tabla 5.1 Ecuaciones constitutivas para el mapa de deformación de Ashby, ver Figura 5.10.

- los recipientes de presión donde la carga (presión) es mantenida constante y la temperatura del fluido variando según un determinado proceso;
- disco de turbinas a gas, donde la fuerza contrífuga y la temperatura varían de acuerdo a la potencia de la turbina en cada instante.

Por lo anteriormente expuesto surge la necesidad de estudiar el comportamiento de un cuerpo de prueba en otras condicones.

Así, si en un ensayo simple de fluencia descargamos totalmente el cuerpo de prueba podemos observar una respuesta instantánea (elástica) seguida de una respuesta deferida en el tiempo y al final del proceso obtenemos una deformación permanente, Figura 5.11.

Otro fenómeno interesante es la *relajación de tensiones*. Este fenómeno ocurre cuando el cuerpo de prueba es sometido a un ensayo de fluencia y a partir de un cierto instante de tiempo fijamos la máquina de ensayos de manera a mantener constante la magnitud de la deformación. A partir de allí, observamos que la tensión cae en el tiempo dando lugar a lo que se ha llamado *relajación de tensión*. La Figura 5.12 nos muestra el fenómeno de la relajación para distintos niveles de tensión. Podemos notar que existe un nivel de tensión por debajo del cual ningún efecto de relajación es observado.

Por último, un aspecto que debemos mencionar está relacionado con la respuesta del material a efectos cíclicos de carga. El comportamiento del material a este tipo de solicitación depende también del nivel de temperatura a que el ensayo se está realizando. En general, podemos admitir que para los metales a temperatura am-

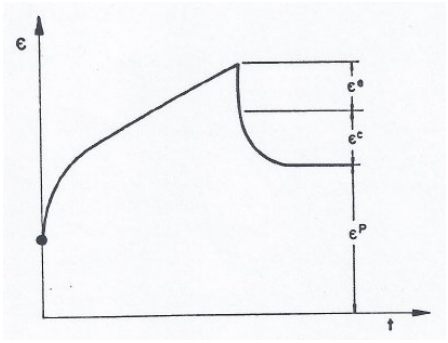


Fig. 5.11 Recuperación de la deformación. ε^e: recuperación elástica; ε_d^e: recuperación de deformación de fluencia; ε^p: deformación permanente.

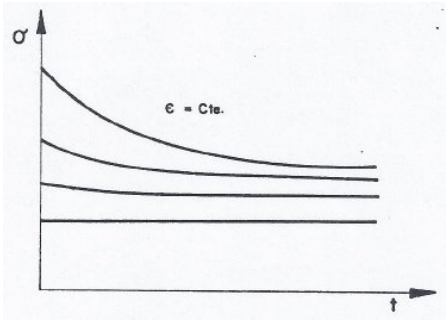


Fig. 5.12 Influencia de la tensión en la relajación a temperatura constante.

biente la influencia de la fluencia es despreciable. Los resultados de los ensayos son comúnmente presentados en la forma indicada en la Figura 5.13. Allí, se representa la amplitud de la deformación en función del número de ciclos necesarios para producir la rotura, llamada *rotura por fatiga*. Numerosos metales presentan un nivel de amplitud de deformación por debajo del cual el material puede soportar un número "infinito" de ciclos sin alcanzar la rotura.

Ahora bien, si la solicitación cíclica se realiza a alta temperatura, tendremos una fuerte interacción entre los mecanismos de deteriorización del material por la acción cíclica de la carga y los mecanismos de fluencia y relajación.

En general, podemos observar los siguientes comportamientos. En un ensayo donde la tasa de deformación ε, es controlada de manera a someter el cuerpo de prueba a ciclos continuos de deformaciones, como el indicado en la Figura 5.14(a), las curvas de fatiga toman la forma indicada en la Figura 5.14(c) mientras que la respuesta en tensiones consiste básicamente en una curva como la indicada en la Figura 5.14(b). Del examen de esta figura, podemos apreciar que a medida que la tasa de deformación es menor, menor es también el número de ciclos necesarios para la rotura. La explicación a esto está justamente en la interacción de los mecanismos: fatiga por carga cíclica - deteriorización por fluencia. A menor tasa, mayor es el

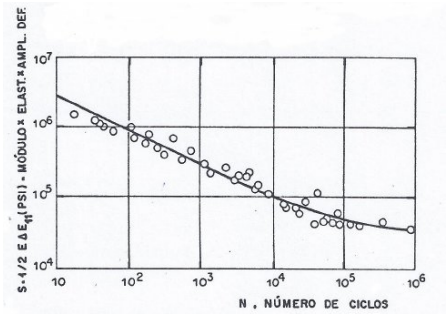


Fig. 5.13 Curva típica de fatiga a temperatura ambiente.

tiempo durante el cual actúan los "picos" de tensiones, aumentando la acumulación de daño por fluencia.

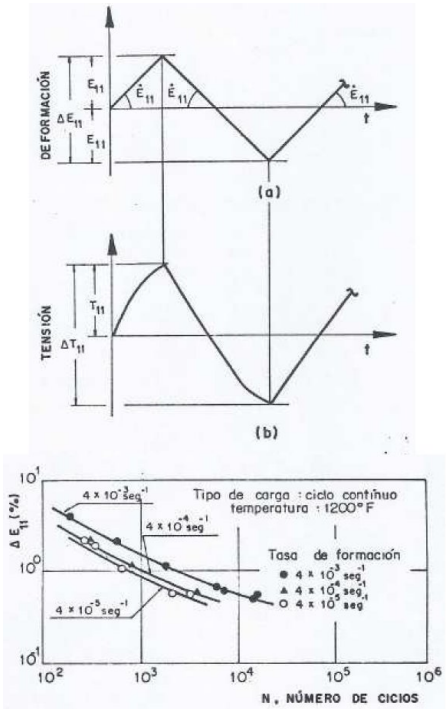


Fig. 5.14 Curva de fatiga para un acero AISI304 a 1.200°F.

Si ahora el ensayo se realiza de manera a permitir la presencia del fenómeno de relajación, ver Figura 5.15, podemos observar que a medida que aumenta el período de tiempo durante el cual actúa la relajación, disminuye el número de ciclos nece-

sarios para la rotura. Por otro lado, se observa también un fenómeno de saturación respecto al intervalo de tiempo durante el cual la relajación tiene lugar.

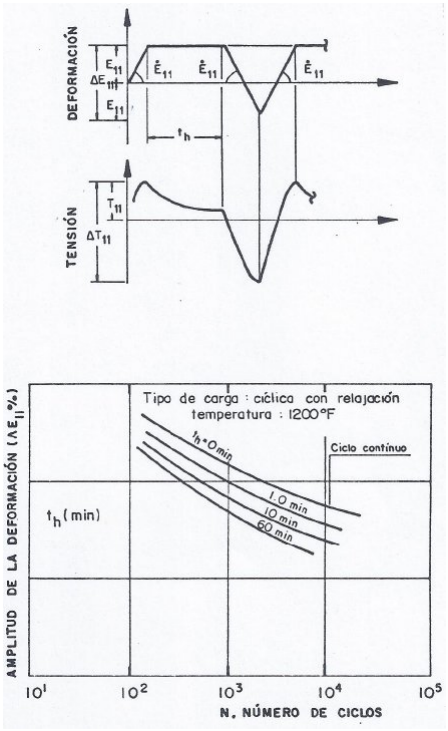


Fig. 5.15 Curva de fatiga en ciclos con relajación. Acero AISI304 a 1200°F.

Si ahora hacemos ensayos de manera que sea la tensión la que permanece constante durante intervalos de tiempo t_h, el comportamiento es similar al anterior. A medida que t_h crece, disminuye el número de ciclos necesarios para la rotura. Sin embargo, ahora ya no se verifica la presencia de la saturación anteriormente observada, Figura 5.15.

Es importante resaltar que hasta aquí, nos limitamos a presentar la respuesta de un material cuando sometido a programas de cargas-temperatura sumamente simples. En una estructura real, tales como las existentes en la industria petroquímica, naval, mecánica, nuclear, etc., las solicitaciones son mucho más complejas que las idealizadas en estos ensayos. Por otro lado, y como ya resaltamos, la fluencia debe observase por largos períodos de tiempo. Lo anterior, obliga al ingeniero a recurrir a técnicas de extrapolación de dificil comprobación experimental.

Por último, todo lo anterior nos muestra lo complicado que es el problema que estamos abordando.

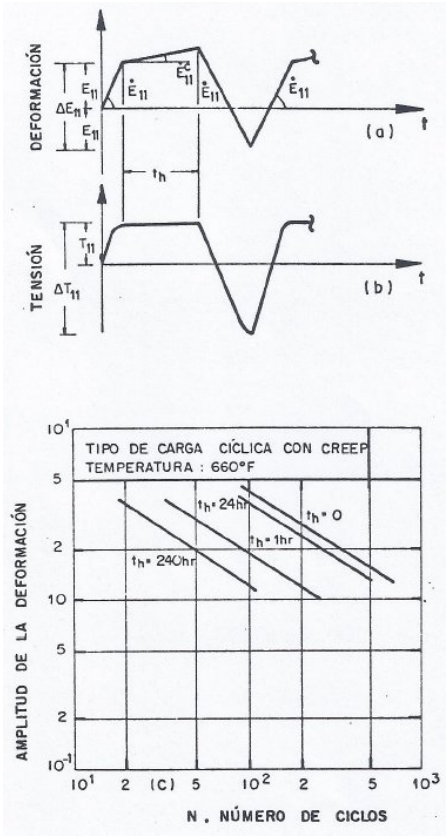


Fig. 5.16 Curva de fatiga con período constante de tensión.

5.5 Ecuaciones Constitutivas Uniaxiales

Para el análisis de los componentes mecánicos de una estructura, que a lo largo de su vida útil estará sometido a los efectos del fenómeno de fluencia, será necesario disponer de ecuaciones constitutivas capaces de modelar tal fenómeno.

Cuando tenemos niveles medios de tensiones y cargas que actúan por períodos prolongados de tiempo, la parte estacionaria del fenómeno de la fluencia pasa a ser comparativamente más importante que la parte no estacionaria. Esta fue una de las razones por la cual numerosas ecuaciones constitutivas uniaxiales fueron propuestas para modelar esta parte del fenómeno. En general, estas ecuaciones toman la forma

$$\dot{\varepsilon}_c = f_1(\sigma), \tag{5.3}$$

es decir, la tasa de deformación por fluencia a temperatura constante en la *etapa secundaria de la fluencia* depende de la tensión.

Uno de los primeros autores en proponer una expresión para la parte estacionaria fue Norton [205] que, al igual que Bailey [20, 21], estableció

$$\dot{\varepsilon}_c = A\sigma^n, \tag{5.4}$$

donde A y n son parámetros que dependen del material y n para el acero puede variar entre 3 a 8, con lo que podemos observar la fuerte no linealidad de estas expresiones.

Antes de continuar es interesante recordar que para niveles bajos de tensión, el mecanismo que predomina es el mecanismo de *fluencia por difusión* que se caracteriza por una expresión del tipo

$$\dot{\varepsilon}_c = A\sigma, \tag{5.5}$$

mientras que para niveles de tensión más elevados el mecanismo que predomina es el de *fluencia por discordancia* caracterizado por expresiones del tipo de la (5.4) con $n > 1$.

En particular, las constantes A y n son establecidas haciendo uso de las curvas $\log \dot{\varepsilon}_{\min}$ versus $\log \sigma$ obtenidas de los ensayos de fluencia. Luego

$$\log \dot{\varepsilon}_c = \log A + n \log \sigma. \tag{5.6}$$

De esta manera, la pendiente de la "recta" obtenida con los ensayos nos proporciona n y la intersección de esta recta con el eje de las ordenadas nos proporcionará la constante A.

Por lo general es conveniente trabajar con ecuaciones constitutivas adimensionales. Para ello se eligen convenientemente constantes $\dot{\varepsilon}_c^*$ y σ^* representando respectivamente tasa de deformación de fluencia y tensión. Así tenemos

$$\frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_c^*} = \left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right)^n, \tag{5.7}$$

que resulta adimensional. Es fácil verificar que para $\sigma = \sigma^*$ resulta $\dot{\varepsilon}_c = \dot{\varepsilon}_c^*$. De allí que σ^* suele llamarse *tensión de referencia*, correspondiente a la tasa de deformación $\dot{\varepsilon}_c^*$, la cual comúnmente adopta el valor [145]

$$\dot{\varepsilon}_c^* = 10^{-9} seg^{-1}. \tag{5.8}$$

Ahora bien, para niveles de tensión más elevados se ha podido comprobar que la tasa de deformación real es en general mayor que la prevista por esta ley potencial. Por esto, algunos autores (ver Odqvist [225, 226]) han propuesto expresiones del tipo exponencial

$$\frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_c^*} = \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right). \tag{5.9}$$

Una de las desventajas de esta expresión reside en el hecho de que para $\sigma = 0$ la tasa de deformación *no resulta nula*. Para corregir este defecto Nadai propone una ley del tipo seno hiperbólico [199]

$$\frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_c^*} = \operatorname{senh}\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right). \tag{5.10}$$

Para valores de $\sigma \gg \sigma^*$ la fórmula exponencial prácticamente coincide con la del seno hiperbólico mientras que, para valores bajos de tensión la ley del seno hiperbólico conduce a

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\dot{\varepsilon}_c^*}{\sigma^*}\sigma, \tag{5.11}$$

es decir, es *lineal* en σ y por lo tanto en correspondencia con el mecanismo de fluencia por difusión.

Mediante un extenso programa de ensayos de fluencia, McVetty [184] pudo concluir que la fórmula del seno hiperbólico representa mejor el fenómeno de fluencia que la fórmula de Norton. Sin embargo, la fórmula potencial de Norton resulta más atrayente desde el punto de vista computacional. Aún más, para $n = 1$ la expresión de Norton corresponde con la de elasticidad y para $n \to \infty$ la ley de Norton tiende a la de un material idealmente plástico.

Otras expresiones han sido también propuestas para corregir la ley exponencial. Así, Soderberg (ver [231]) propuso la expresión

$$\frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_c^*} = \exp\left(\frac{\sigma}{\sigma^*}\right) - 1. \tag{5.12}$$

Todas las expresiones anteriores limitan su rango de aplicación a la parte estacionara del fenómeno de fluencia. Numerosos investigadores han tratado de expresar la parte primaria y secundaria de la fluencia a través de una única expresión.

Así, tenemos que el proprio Andrade presentó, como resultado de sus experiencias realizadas a tensión constante, la siguiente expresión [4, 5]

$$\ell = \ell_0(1 + \beta t^{1/3})e^{kt}, \tag{5.13}$$

que establece una relación entre la longitud ℓ del cuerpo de prueba para cada instante de tiempo t y su longitud inicial ℓ_0.

Teniendo presente que este investigador consideró en su análisis deformaciones finitas y que controló cuidadosamente la constancia de las tensiones, tenemos

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{d\ell/dt}{\ell} = \frac{\beta}{3}\,\frac{1}{(t^{2/3} + \beta t)} + k. \tag{5.14}$$

Como podemos apreciar, a medida que t crece, la tasa de deformación tiende a un valor constante k (fluencia-k en la terminología de Andrade).

Por otra parte y supuesto **e** suficientemente pequeño, resulta

$$\varepsilon_c = \int_{\ell_0}^{\ell} \frac{d\ell}{\ell} = kt + \beta t^{1/3}. \tag{5.15}$$

De la expresión anterior vemos que la deformación de fluencia dada por la fórmula de Andrade, consiste en la superposición de dos modos de fluencia

- uno, llamado por Andrade de fluencia-β, que se realiza a tasa decreciente;
- otro, llamado fluencia-k, que se realiza a tasa constante.

En general, será posible aproximar la deformación de fluencia a través de la expresión

$$\varepsilon_c = g_1(\sigma)t^m + g_2(\sigma)t, \tag{5.16}$$

y donde m es aproximadamente igual a 1/3. Si estamos interesados en el análisis de la fluencia por un período corto de tiempo, será suficiente trabajar con el primer término del segundo miembro.

Un expresión similar es la propuesta por J. Marin y Y. N. Pao [179], en que la deformación total de fluencia es la suma de una parte que crece linealmente con t y otra que decrece en forma exponencial con t

$$\varepsilon_c = k(1-e^{-\alpha t}) + \beta t. \tag{5.17}$$

Si deseamos incluir el efecto de la temperatura, recurrimos a la ley de Arrhenius ya vista en secciones anteriores, del tipo $\exp\big(-\frac{u_0}{R\theta}\big)$.

Como hemos pedido apreciar, en la mayoría de los trabajos sobre fluencia a tensión y temperatura constante, la ecuación constitutiva toma la forma

$$\varepsilon_c = f(\sigma, t, \theta), \tag{5.18}$$

que en general se supone separable respecto a cada una de estas variables

$$\varepsilon_c = f_1(\sigma)f_2(t)f_3(\theta). \tag{5.19}$$

A continuación presentamos algunas de estas funciones

- Influencia de la tensión
  - $f_1(\sigma) = A\sigma^n$ (Norton-Bailey)
  - $f_1(\sigma) = A\,\mathrm{senh}(\beta\sigma)$ (Prandtl-Nadai)
  - $f_1(\sigma) = A\exp(\beta\sigma)$ (Dorn-Ludwik)
  - $f_1(\sigma) = A(senh(\beta\sigma))^n$ (Garófalo)
  - $f_1(\sigma) = A(\exp(\beta\sigma) - 1)$ (Soderberg)

  donde A, β y n son constantes que dependen del material.
- Influencia del tiempo
  - $f_2(t) = t$ (fluencia secundaria)
  - $f_2(t) = bt^m$ (Bailey)
  - $f_2(t) = (1 + bt^{1/3})e^{kt}$ (Andrade)
  - $f_2(t) = k(1-e^{-\alpha t}) + \beta t$ (Pao-Marin)
- Influencia de la temperatura
  - $f_3(\theta) = A\exp\big(-\frac{u_0}{R\theta}\big)$.

La formulación presentada hasta aquí, sólo permite modelar la fluencia para tensión y temperatura constante. Para el análisis de problemas reales debemos extender esta formulación de manera a contemplar la posibilidad de tensión y temperatura variable.

Para realizar lo anterior tenemos dos caminos

1. La respuesta del material depende solamente del estado en que el cuerpo se encuentra.
2. La respuesta del material depende explícitamente de la historia. Es decir, de todo el proceso de carga, deformación y temperatura que el cuerpo ha experimentado hasta el presente.

El primer camino conduce a ecuaciones constitutivas del tipo *ecuación de estado*. Mientras que el segundo corresponde a lo que se conoce en la literatura como material con *memoria*.

Si bien todo indica que las ecuaciones constitutivas son las del tipo con memoria, poca información experimental es conocida. Lo anterior afecta, desde un punto de vista práctico, el grado de aplicabilidad de tal tipo de ecuaciones.

No ocurre lo mismo con las ecuaciones de estado que presentan las siguientes ventajas.

- Han sido extensamente aplicadas, disponiéndose en la actualidad de una gran cantidad de resultados experimentales que permiten verificar el grado de validez de tales ecuaciones.
- Son, en general, expresiones simples de fácil manipulación computacional. Como en general estas ecuaciones de estado relacionan $\dot{\varepsilon}_c$ con las variables que intervienen en el fenómeno, son fácilmente incorporadas a los programas de cálculo ya existentes.

Para obtener estas ecuaciones de estado, vamos primero a reescribir la ecuación constitutiva $\varepsilon_c = f_1(\sigma) f_2(t) f_3(\theta)$ en función de $\dot{\varepsilon}_c$. Luego

$$\dot{\varepsilon}_c = f_1(\sigma)\, \frac{df_2(t)}{dt}\, f_3(\theta), \tag{5.20}$$

donde estamos suponiendo que σ y θ permanecen constantes (ya que así fue deducida este tipo de ecuación).

La *teoría de endurecimento por tiempo* (*time hardening theory*) consiste en aceptar que **aún para el caso de tensión y temperatura variable**, la tasa de deformación de fluencia está dada por una expresión similar a la anterior

$$\dot{\varepsilon}_c = g_1(\sigma) g_2(t) g_3(\theta). \tag{5.21}$$

La respuesta de acuerdo a esta teoría, para un diagrama de carga como el indicado en la Figura 5.17, está representada en la misma figura. Como podemos apreciar, para el nivel σ_1 la respuesta sigue el tramo de curva correspondiente. Cuando en el instante t_1 la tensión pasa de σ_1 a σ_2, la tasa de deformación corresponderá a la tasa de deformación del mismo material que en el instante de tiempo t_1 esté sometido a

la tensión σ_2. Es por esta razón que se llama *endurecimiento por tiempo*, ya que la respuesta del material depende explícitamente del tiempo transcurrido.

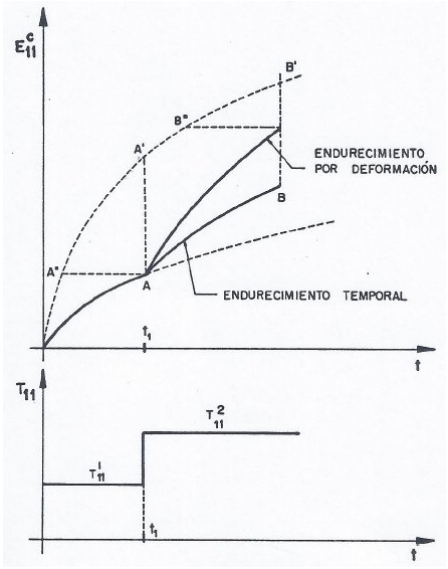


Fig. 5.17 Endurecimiento por tiempo y deformación.

Retornando a nuestra expresión de $\dot{\varepsilon}_c$ deducida para tensión y temperatura constante (5.20), y recordando la (5.19), es posible, haciendo uso de estas dos expresiones, eliminar la variable t (tiempo) resultando

$$\dot{\varepsilon}_c = h_1(\sigma)h_2(\varepsilon_c)h_3(\theta). \tag{5.22}$$

Llegamos así a una expresión que nos relaciona $\dot{\varepsilon}_c$ con el estado actual de tensiones, de deformación acumulada de fluencia (que de alguna manera viene a caracterizar la *historia* del proceso) y la temperatura.

Nuevamente, la teoría de endurecimiento por deformación parte de la hipótesis que la expresión anterior resulta igualmente válida aún para el caso de tensión y temperatura variable.

En la Figura 5.17 representamos también la respuesta para el caso de tensión variable supuesta válida la teoría de endurecimiento por deformación.

De la manera en que ambas teorías fueron deducidas, es fácil concluir que ambas coinciden si la tensión permanece constante. Ahora bien, si para cargas variables estas dos teorías conducen a respuestas diferentes, cual será la más correcta? En general, los ensayos realizados con programas de cargas variables muestran que la teoría de endurecimento por deformación se comporta mejor que su correspondiente por endurecimiento por tiempo.

Sin embargo, es interesante resaltar que la teoría de endurecimiento por tiempo, ha sido ampliamente usada en virtud de ciertas facilidades computacionales implícitas en esta formulación.

En efecto, admitiendo que en esta teoría se verifica que

$$\dot{\varepsilon}_c = \Phi(\sigma, \theta)\, \frac{d\psi(t)}{dt}, \tag{5.23}$$

y suponiendo ψ monótona creciente en $\mathbb{R}^+$ (ψ es monótona creciente si dado $t_2 > t_1$, resulta $\psi(t_2) > \psi(t_1)$), podemos introducir una nueva variable

$$\zeta = \psi(t), \tag{5.24}$$

por lo que

$$d\zeta = \frac{d\psi(t)}{dt}\, dt, \tag{5.25}$$

que substituída en la expresión (5.23) conduce a

$$\dot{\varepsilon}_c = \Phi(\sigma, \theta)\, \frac{d\zeta}{dt}. \tag{5.26}$$

de donde

$$\frac{d\varepsilon_c}{d\zeta} = \Phi(\sigma, \theta). \tag{5.27}$$

El primer miembro de la última expresión es la tasa de deformación de fluencia respecto al nuevo parámetro ζ y el segundo miembro, corresponde, según vimos, a una ecuación constitutiva para analizar la fluencia secundaria.

Luego, todo cálculo realizado para el análisis de fluencia en el régimen estacionario puede, mediante un simple cambio en la escala del tiempo, trasladarse para el caso de endurecimiento por tiempo.

Ahora bien, estas dos teorías (endurecimiento por deformación y por tiempo) no contemplan adecuadamente los casos de carga y descarga alternados, donde debemos llevar en cuenta los fenómenos de recuperación y de relajación. Necesitamos por lo tanto de ecuaciones constitutivas más complejas capaces de atender a este tipo de problema.

Numerosas posibilidades han sido sugeridas en la literatura (ver J. T. Boyle y J. Spence, [38, 39]) y en general todas son una extensión de las ideas embutidas en las ecuaciones de estado propuestas para las teorías anteriormente descriptas.

Básicamente, estas ecuaciones constitutivas introducen variables adicionales, llamadas *variables internas* que caracterizan de alguna manera los mecanismos disipativos del fenómeno que se está estudiando (ver también P. Germain, Q. S. Nguyen y P. Suquet, [118]).

Siguiendo la presentación de J. T. Boyle y J. Spence [39], presentamos el modelo para fluencia (procesos inelásticos más generales que la fluencia pueden ser incluidos con este tipo de modelo) con dos variables internas α y R. Tenemos así una *ecuación de estado*

$$\dot{\varepsilon}_c = f(\sigma, \alpha, R), \tag{5.28}$$

y ecuaciones (también llamadas de estado) que gobiernan la evolución de estas variables internas

$$\dot{\alpha} = g_1(\sigma, \alpha, R)\dot{\varepsilon}_c - g_2(\sigma, \alpha, R)\alpha, \tag{5.29}$$
$$\dot{R} = h_1(\sigma, \alpha, R)|\dot{\varepsilon}_c| - h_2(\sigma, \alpha, R)(R - R_0), \tag{5.30}$$

donde hemos asumido la presencia de dos mecanismos: uno de endurecimiento (proporcionado por el primer término) y otro de ablandamiento (proporcionado por el segundo término).

A estas ecuaciones deben agregarse las *condiciones iniciales*, por ejemplo

$$\alpha = 0,\ R = R_0,\ \varepsilon_c = 0 \quad \text{en} \quad t = 0. \tag{5.31}$$

Las funciones g_1, g_2, h_1 y h_2, toman diferentes formas para cada teoría. Por ejemplo (J. T. Boyle y J. Spence, [39])

- **Ecuación constitutiva de Boiley-Orowan.** En esta teoría se supone $\alpha = 0$ y

$$\dot{\varepsilon}_c = sig(\sigma) f(|\sigma|, R), \tag{5.32}$$
$$\dot{R} = h_1(R)|\dot{\varepsilon}_c| - h_2(R), \tag{5.33}$$

donde

$$f \geq 0 \qquad \text{si } |\sigma| \geq R, \tag{5.34}$$
$$f = 0 \qquad \text{si } |\sigma| < R, \tag{5.35}$$
$$h_2(R) = k_1 |R|^{n-m}, \tag{5.36}$$
$$h_1(R) = \frac{1}{k_2}\,|R|^{-m}. \tag{5.37}$$

Esta ecuación es capaz de modelar la fluencia secundaria tipo Norton. En efecto, haciendo $\dot{R} = 0$ tenemos

$$|\dot{\varepsilon}_c| = \frac{h_2(R)}{h_1(R)} = f(|\sigma|, R) = k_1 k_2 |R|^n, \tag{5.38}$$

que no es otra cosa que la ley de Norton.

En este modelo, los parámetros k_1, k_2, n y m deberán ser determinados a través de ensayos.

- **Ecuación constitutiva de Robinson.** En esta teoría se supone $R = R_0$ para todo tiempo, tenemos así que

$$\dot{\varepsilon}_c = f(\sigma, \alpha) = f(\sigma - \alpha), \tag{5.39}$$
$$\dot{\alpha} = g_1(\alpha)\dot{\varepsilon}_c - g_2(\alpha)\alpha, \tag{5.40}$$

donde

$$f = \begin{cases} \mu F^{(n-1)/2}\,(\sigma - \alpha), & \text{para } F > 0 \text{ y } \sigma(\sigma-\alpha) > 0, \\ 0, & \text{caso contrario}\ , \end{cases} \tag{5.41}$$

con

$$F = \frac{(\sigma-\alpha)^2}{R_0^2} - 1, \tag{5.42}$$

y

$$g_1(\alpha) = \begin{cases} c_1(\frac{\alpha}{R_0})^q & \text{para } \alpha > \alpha_0 \text{ y } \sigma\alpha \le 0, \\ c_1(\frac{\alpha_0}{R_0})^q & \text{caso contrario,} \end{cases} \tag{5.43}$$

$$g_2(\alpha) = \begin{cases} c_2(\frac{\alpha}{R_0})^{m-q-1} & \text{para } \alpha > \alpha_0 \text{ y } \sigma\alpha \le 0, \\ c_2(\frac{\alpha_\theta}{R_0})^{m-q-1} & \text{caso contrario,} \end{cases} \tag{5.44}$$

donde ahora tenemos 8 constantes a determinar: μ, n, R_0, α_0, c_1, c_2, m, y q.

Como vemos, a medida que aumentamos la complejidad del modelo, mayor será el número de constantes a determinar. Los ensayos para esto son, por otro lado, más complicados. Si a esto le sumamos ensayos con variación de temperatura, vemos cuan complicada puede ser la tarea de modelar el comportamiento real de un material que experimenta fluencia.

Por último, y antes de finalizar esta sección, debemos resaltar que no presentaremos los modelos empleados para la parte terciaria de *creep* y por lo tanto el análisis de rotura. Los objetivos y limitaciones de estas notas hacen que, no obstante la importancia de este tema, el mismo no sea tratado. De todos modos, los algoritmos para el análisis de fluencia no estacionaria, que veremos en estas notas, son fácilmente extendidos de manera a incluir el *creep* terciario.

5.6 Ecuaciones Constitutivas para Estados Multiaxiales de Tensión

En esta sección vamos presentar la generalización de las ecuaciones constitutivas uniaxiales para el caso de estados múltiples de tensiones.

Como en plasticidad, la teoría de la fluencia para estados complejos de tensiones se realiza a partir de ciertas consideraciones parcialmente comprobadas experimentalmente. Estas consideraciones básicamente son

1. La ecuación constitutiva multiaxial debe ser capaz de representar el comportamiento uniaxial.
2. La ecuación constitutiva debe llevar en cuenta que la deformación de fluencia primaria y secundaria se produce a volumen constante. Para el caso de un cuerpo tridimensional, lo anterior se traduce estableciendo que la tasa de deformación de *creep* sea tal que

$$\operatorname{tr}\mathbf{D} = 0 \tag{5.45}$$

o su equivalente en función de la velocidad

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{5.46}$$

donde $\mathbf{D}$, el tensor tasa de deformación y $\mathbf{v}$, la velocidad, están relacionados por

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v} + (\nabla\mathbf{v})^T), \tag{5.47}$$

y que en componentes cartesianas corresponde a

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{5.48}$$

3. La ecuación constitutiva debe ser independiente de la componente hidrostática del estado de tensiones. Recordando que

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} + \mathbf{S}, \tag{5.49}$$

donde $\mathbf{I}$ es el tensor identidad, $\mathbf{S}$ es la parte desviadora del tensor de tensiones $\mathbf{T}$, la tasa de deformación $\mathbf{D}$ dependerá solamente de $\mathbf{S}$.

4. Para un medio isotrópico, las direcciones principales del tensor tasa de deformación coinciden con las del tensor de tensiones $\mathbf{T}$. Recordando que

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} \tag{5.50}$$

tendremos que si $\mathbf{a}$ es un autovector de $\mathbf{T}$ y λ un autovalor correspondiente, es decir

$$\mathbf{T}\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}, \tag{5.51}$$

resulta

$$\mathbf{S}\mathbf{a} = \left(\mathbf{T} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T})\mathbf{I}\right)\mathbf{a} = \mathbf{T}\mathbf{a} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T})\mathbf{a} = \left(\lambda - \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{T}\right)\mathbf{a} = \gamma\mathbf{a}, \tag{5.52}$$

luego $\mathbf{a}$ también es un autovector de $\mathbf{S}$. En otras palabras, la tasa de deformación de fluencia $\mathbf{D}$ deberá ser coaxial con $\mathbf{S}$.

Vamos a mostrar ahora que estas cuatro condiciones están presentes en las ecuaciones constitutivas más conocidas.

En 1930, R. W. Bailey [20, 21] comprobó experimentalmente que en los metales, las deformaciones de fluencia se producían a volumen constante, sin ser afectadas por la presión hidrostática. De estas observaciones, y admitiendo isotropía, F. K. Odqvist [225, 226] postuló en 1934 la primera ley constitutiva para fluencia secundaria isotrópica bajo tensión triaxial

$$\mathbf{D} = f(\mathbf{S})\mathbf{S} = \frac{3}{2}kT_e^{n-1}\mathbf{S}, \tag{5.53}$$

donde k, n son constantes que dependen de cada material y T_e es la *tensión efectiva* dada por

$$T_e = \sqrt{\frac{3}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}}. \tag{5.54}$$

Es fácil comprobar las siguientes características de la ley de Odqvist

i) La componente hidrostática del estado de tensiones no influye en la respuesta del material. En otras palabras, dos estados de tensión que difieren en una presión hidrostática producen igual tasa de deformación $\mathbf{D}$. En efecto, sean $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{T}_2$ dos estados de tensión que difieren en una presión hidrostática

$$\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1 = p\mathbf{I}, \tag{5.55}$$

luego

$$\mathbf{T}_2 = p\mathbf{I} + \mathbf{T}_1, \tag{5.56}$$

y

$$\operatorname{tr}\mathbf{T}_2 = 3p + \operatorname{tr}\mathbf{T}_1. \tag{5.57}$$

La componente desviadora de $\mathbf{T}_2$, digamos $\mathbf{S}_2$, está dada por

$$\mathbf{S}_2 = \mathbf{T}_2 - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T}_2)\mathbf{I} = p\mathbf{I} + \mathbf{T}_1 - p\mathbf{I} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T}_1)\mathbf{I} = \mathbf{T}_1 - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{T}_1)\mathbf{I} = \mathbf{S}_1, \tag{5.58}$$

de donde se concluye que

$$\mathbf{D}(\mathbf{T}_1) = \mathbf{D}(\mathbf{T}_2). \tag{5.59}$$

ii) La tasa de deformación obtenida mediante la ley constitutiva $\mathbf{D} = f(\mathbf{S})\mathbf{S}$ corresponde a un campo de velocidades isotrópicas. En efecto

$$\operatorname{tr}\mathbf{D} = f(\mathbf{S})\operatorname{tr}\mathbf{S} = 0. \tag{5.60}$$

iii) La tensión efectiva T_e dada por la (5.54) y la velocidad de deformación efectiva D_e dada por

$$D_e = \sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}}, \tag{5.61}$$

verifican una relación similar a la ley de Norton, es decir

$$D_e = kT_e^n, \tag{5.62}$$

En efecto, de la (5.53) se sigue que

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} = \frac{9}{4}k^2T_e^{2n-2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = \frac{3}{2}k^2T_e^{2n}, \tag{5.63}$$

de donde

$$\sqrt{\frac{2}{3}\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}} = D_e = kT_e^n. \tag{5.64}$$

iv) Para el caso particular de un estado uniaxial de tensión la ley constitutiva (5.53) se reduce a la de Norton. En efecto, sea $\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ una terna unitaria ortogonal. Para un estado uniaxial de tensiones , supongamos, en la dirección $\mathbf{e}_1$, resulta

$$\mathbf{T} = T_{11}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1), \tag{5.65}$$

$$\mathrm{tr}\mathbf{T} = T_{11}\,\mathrm{tr}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1) = T_{11}\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = T_{11}, \tag{5.66}$$

luego

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} = T_{11}(\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1) - \frac{1}{3}T_{11}\mathbf{I}, \tag{5.67}$$

$$T_e^2 = \frac{3}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} = \frac{3}{2}\left(T_{11}^2 - \frac{2}{3}T_{11}^2 + \frac{1}{3}T_{11}^2\right) = T_{11}^2. \tag{5.68}$$

Por lo tanto

$$D_{11} = \frac{3}{2}kT_{11}^{n-1}\left(T_{11} - \frac{1}{3}T_{11}\right) = kT_{11}^n. \tag{5.69}$$

Es interesante observar que para esta ecuación constitutiva es posible determinar una función potencial $\phi = \phi(\mathbf{T})$ tal que

$$\mathbf{D} = \phi_{\mathbf{T}} = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{T}}. \tag{5.70}$$

Esta función potencial está dada por

$$\phi = \frac{k}{n+1}T_e^{n+1} = \frac{k}{n+1}\left(\frac{3}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}\right)^{(n+1)/2}. \tag{5.71}$$

Como podemos apreciar, la función potencial está definida explícitamente en función de $\mathbf{S}$ y, como $\mathbf{S}$ es una función de $\mathbf{T}$, tendremos ϕ como una función implícita de $\mathbf{T}$. Por la regla de la cadena, introduciendo el tensor de cuarto orden $\mathbf{S}_{\mathbf{T}} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{T}}$, tenemos

$$\phi_{\mathbf{T}} = (\mathbf{S}_{\mathbf{T}})^T\phi_{\mathbf{S}}. \tag{5.72}$$

Ahora bien

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\mathbf{T})\mathbf{I} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I})\mathbf{T} = \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}\right)\mathbf{T} = \mathbb{C}\mathbf{T}, \tag{5.73}$$

de donde podemos apreciar que el tensor de cuarto orden $\mathbb{C}$ es simétrico en el sentido dado por la (1.223), o sea $\mathbb{C} = \mathbb{C}^T$. Luego

$$\mathbf{S}_{\mathbf{T}} = \mathbb{C} = \mathbb{C}^T, \tag{5.74}$$

y substituyendo este resultado en la expresión (5.72), y observando que $\mathbb{C}\mathbf{S} = \mathbf{S}$, tenemos

$$\phi_{\mathbf{T}} = \mathbb{C}\phi_{\mathbf{S}} = \mathbb{C}\left(kT_e^n \frac{3}{2}\frac{\mathbf{S}}{T_e}\right) = \frac{3}{2}kT_e^{n-1}\mathbb{C}\mathbf{S} = \frac{3}{2}kT_e^{n-1}\mathbf{S} = \phi_{\mathbf{S}}. \tag{5.75}$$

La existencia de esta función potencial, de la cual podemos obtener la tasa de deformación, hace que esta ecuación constitutiva suela llamarse *ley asociativa*.

Otro aspecto importante de esta función potencial es su *convexidad*. En virtud de la regularidad de ϕ, la convexidad la podemos expresar de la siguiente forma

$$\phi(\mathbf{T}^*) - \phi(\mathbf{T}_0) \geq \phi_{\mathbf{T}}\big|_{\mathbf{T}_0} \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_0) \quad \mathbf{T}^* \in \mathscr{W}'. \tag{5.76}$$

En efecto

$$\phi(\mathbf{T}^*) = \phi(\mathbf{T}) + \phi_{\mathbf{T}}\big|_{\mathbf{T}_0} \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_0) + \frac{1}{2}\phi_{\mathbf{TT}}\big|_{\mathbf{T}_0}(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_0) \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_0) + \ldots. \tag{5.77}$$

Si $\phi_{\mathbf{TT}}$ es un tensor de cuarto orden positivo definido, es decir

$$\phi_{\mathbf{TT}}\big|_{\mathbf{T}_0}(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_0) \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}_0) \geq 0, \tag{5.78}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{T}^* = \mathbf{T}_0$, tendremos probada la convexidad. Para la ecuación de Odqvist (5.53) que estamos estudiando, resulta

$$\phi_{\mathbf{TT}}(\mathbf{T}) = \mathbb{C}\phi_{\mathbf{SS}} = \mathbb{C}\left[\frac{3}{2}kT_e^{n-1}\mathbb{I} + \frac{9}{4}k(n-1)T_e^{n-3}\mathbf{S}\otimes\mathbf{S}\right], \tag{5.79}$$

y para un estado de tensiones no nulo resulta

$$\phi_{\mathbf{TT}}(\mathbf{T}) = \alpha\mathbb{C} + \beta\mathbf{S}\otimes\mathbf{S} \quad \alpha, \mathsf{e} > 0. \tag{5.80}$$

Luego para $\mathbf{T}^*$ arbitrario se sigue que

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{TT}}(\mathbf{T})(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) = [\alpha\mathbb{C}(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) + \beta(\mathbf{S} \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}))\mathbf{S}] \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) = \\ \alpha(\mathbf{T}^* - \mathbf{T})^D \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) + \beta[\mathbf{S} \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T})]^2,\end{aligned} \tag{5.81}$$

donde $(\cdot)^D$ denota la *parte desviadora* de $(\cdot)$. Luego

$$\begin{aligned}\phi_{\mathbf{TT}}(\mathbf{T})(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) = \alpha(\mathbf{T}^* - \mathbf{T})^D \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T})^D + \beta[\mathbf{S} \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T})^D]^2 \geq \\ \alpha(\mathbf{T}^* - \mathbf{T})^D \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T})^D \geq 0,\end{aligned} \tag{5.82}$$

e igual a cero si y sólo si $(\mathbf{T}^* - \mathbf{T})^D = \mathbf{0}$. Hemos probado así la convexidad de esta función potencial.

Por otra parte, es fácil verificar que si designamos con $\mathbf{D}$ la tasa de deformación correspondiente al estado de tensiones $\mathbf{T}$, tendremos que para un estado de tensiones

$$\mathbf{T}_1 = \lambda\mathbf{T}, \tag{5.83}$$

le corresponde una tasa de deformación

$$\mathbf{D}_1 = \frac{3}{2}k\left(\frac{3}{2}\lambda\mathbf{S}\cdot\lambda\mathbf{S}\right)^{(n-1)/2}\lambda\mathbf{S} = \lambda^n\frac{3}{2}k\left(\frac{3}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}\right)^{n-1}\mathbf{S} = \lambda^n\mathbf{D}, \tag{5.84}$$

es decir, la tasa de deformación $\mathbf{D}_1$, asociada al estado de tensiones $\mathbf{T}_1$, es λ^n veces el campo tasa de deformación $\mathbf{D}$ asociado al estado $\mathbf{T}$.

De todo lo anterior podemos concluir que en el espacio de tensiones la región definida por todos los estados $\mathbf{T}$ para los cuales

$$\phi(\mathbf{T}) \leq K \quad K \text{ constante}, \tag{5.85}$$

por ejemplo, es convexa y, para diferentes K, todas ellas son similares y concéntricas. Por otra parte, la tasa de deformación es normal a la superficie $\phi = K$ en el correspondiente estado de tensión y, aún más, todas las tasas de deformación asociadas a estados de tensiones proporcionales, es decir del tipo

$$\mathbf{T}_1 = \lambda\mathbf{T} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.86}$$

son paralelas, (ver Figura 5.18).

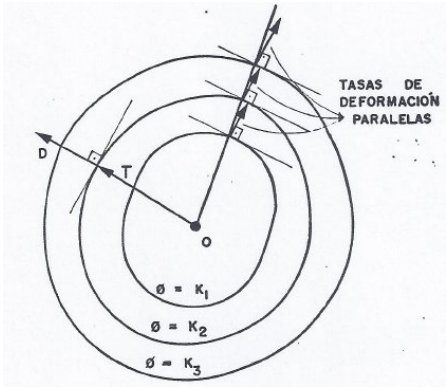


Fig. 5.18 Potencial constitutivo para el problema de fluencia secundaria isotrópica.

Ahora bien, la ecuación constitutiva de Odqvist (5.53) nos permite determinar $\mathbf{D}$ a partir del estado de tensiones. Nos preguntamos cuál será la ecuación constitutiva inversa. Para determinarla, observemos que $\mathbf{D}$ es tal que $\operatorname{tr}\mathbf{D} = 0$. Luego la ecuación inversa estará definida únicamente para todo campo tasa de deformación que cumpla con esta restricción (restricción cinemática correspondiente a lo que se llama de movimiento isocórico, ó a volumen constante).

Invirtiendo la (5.62), tenemos

$$T_e = \left(\frac{D_e}{k}\right)^{1/n}, \tag{5.87}$$

que substituida en la ecuación de Odqvist (5.53) nos conduce a

$$\mathbf{D} = \frac{3}{2}k\left(\frac{D_e}{k}\right)^{(n-1)/n}\mathbf{S} = \frac{3}{2}k^{1/n}D_e^{1-1/n}\mathbf{S}, \tag{5.88}$$

de donde

$$\mathbf{S} = \frac{2}{3}k^{-1/n}D_e^{(1/n)-1}\mathbf{D}, \tag{5.89}$$

que es la ecuación constitutiva inversa que estamos buscando.

Nuevamente, vemos existe una función potencial

$$\psi(\mathbf{D}) = \frac{n}{n+1}\frac{D_e^{(1+n)/n}}{k^{1/n}}, \tag{5.90}$$

tal que

$$\psi_{\mathbf{D}} = \frac{1}{k^{1/n}}D_e^{[(1+n)/n]-1}\frac{1}{2}\frac{4}{3}\frac{\mathbf{D}}{D_e} = \frac{2}{3}\frac{1}{k^{1/n}}D_e^{(1-n)/n}\mathbf{D} = \mathbf{S}. \tag{5.91}$$

A su vez, ψ es convexa gozando de propiedades similares a las de la función ϕ definida en la (5.71). Observe que ψ está definida en el espacio de tasas de deformación con trazo nulo.

Veamos un detalle adicional. Si en un punto del cuerpo tenemos un estado de tensiones $\mathbf{T}$, a este estado le corresponde un estado de deformación $\mathbf{D} = f(\mathbf{S})\mathbf{S}$, donde $\mathbf{S}$ es la parte desviadora de $\mathbf{T}$. Luego, recordando que $\mathrm{tr}\mathbf{D} = 0$, la potencia disipada estará dada por

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{S}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{S}\cdot f(\mathbf{S})\mathbf{S} = \mathbf{S}\cdot\left(\frac{3}{2}kT_e^{n-1}\mathbf{S}\right) = kT_e^{n+1} = (n+1)\phi(\mathbf{T}). \tag{5.92}$$

Es otras palabras, la superficie $\phi =$ constante en el espacio de tensiones representa físicamente una superficie donde la disipación es constante.

Igualmente

$$\mathbf{S}\cdot\mathbf{D} = \frac{2}{3}\frac{1}{k^{1/n}}D_e^{(1-n)/n}\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} = \frac{1}{k^{1/n}}D_e^{(1+n)/n} = \frac{1+n}{n}\psi(\mathbf{D}), \tag{5.93}$$

por lo tanto, la superficie $\psi =$ constante representa, en el espacio de tasas de deformación, una potencia de disipación constante.

Por otra parte, y para una misma potencia de disipación se sigue que

$$n\phi(\mathbf{T}) = \psi(\mathbf{D}), \tag{5.94}$$

o, lo que es idéntico, si $\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}$ están asociados por la ecuación constitutiva de Odqvist se sigue que

$$\psi(\mathbf{D}) + \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} \tag{5.95}$$

El lector podrá notar la similaridad de esta propiedad con la propiedad que se verificaba en materiales hiperelásticos como los estudiados en el Capítulo 4.

Por último, vamos a observar lo siguiente (ver C. R. Calladine y D. C. Drucker [44]): consideremos en el espacio de tensiones la superficie para la cual la energía de disipación sea igual a una constante K_1, arbitraria, luego

$$(n+1)\phi_n(T) = K_1 m \tag{5.96}$$

donde con $\phi_n(\mathbf{T})$ queremos resaltar que corresponde a un material con el exponente igual a n. Para otro material con exponente $r < n$ la misma energía de disipación corresponderá a

$$(r+1)\phi_r(\mathbf{T}) = K_1. \tag{5.97}$$

Luego

$$(n+1)\phi_n(\mathbf{T}) = (r+1)\phi_r(\mathbf{T}), \tag{5.98}$$

y como $n+1 > r+1$ se sigue

$$\phi_n(\mathbf{T}) < \phi_r(\mathbf{T}). \tag{5.99}$$

En otras palabras, las superficies de energía de dispación constante correspondientes a mayor n están encerradas por las correspondientes a menor valor del exponente. En particular, todas estas superficies estarán comprendidas entre la superficie $n = 1$ (correspondiente a una distribución de tensiones de un material elástico incompresible) y la superficie $n = \infty$ (correspondiente a la superficie de disipación de un material rígido plástico ideal).

Recíprocamente, si pensamos en el espacio de tasas de deformación tenemos

$$\frac{1+n}{n}\psi_n(\mathbf{D}) = \frac{1+r}{r}\psi_r(\mathbf{D}), \tag{5.100}$$

y para $n > r$ resulta

$$1 + \frac{1}{n} < 1 + \frac{1}{r}, \tag{5.101}$$

por lo que

$$\psi_n(\mathbf{D}) > \psi_r(\mathbf{D}). \tag{5.102}$$

Es decir, las superficies de mayor n envuelven las de menor n.

Estos resultados son usados en la obtención de cargas de colapso por E. Taroco et al. [275] y R. A. Feijóo et al. [98]. También se constituyen en la base para la determinación de ecuaciones constitutivas generalizadas (ver, por ejemplo, V. I. Rozenblium [257]).

Otra ecuación constitutiva es la de Tresca (ver Taroco et al. [277]), que también está definida a través de funciones potenciales convexas, $\phi(\mathbf{T})$ y $\psi(\mathbf{D})$, y que a pesar de presentar puntos angulosos gozan de las mismas propiedades que las de Odqvist.

5.7 Generalización de la Ley Constitutiva

Haciendo uso de las cuatro consideraciones enumeradas al principio de esta sección, limitándonos al caso de un material isotrópico y admitiendo un comportamiento idéntico tanto a tracción como a compresión, podemos plantear una expresión general que satisface todas las propiedades anteriores (ver el trabajo de W. Prager [239])

$$\mathbf{D} = \alpha_1 \mathbf{S} + \alpha_3 \mathbf{S}^3 + \alpha^5 \mathbf{S}^5 + \ldots, \tag{5.103}$$

donde al tasa de deformación está dada por un polinomio en $\mathbf{S}$, que es el tensor desviador correspondiente al estado de tensiones $\mathbf{T}$.

Sin embargo, las potencias de $\mathbf{S}$ no son independientes. En efecto del teorema de Cayley-Hamilton, todo tensor satisface su propia ecuación característica

$$\mathbf{S}^3 - J_2 \mathbf{S} - J_3 \mathbf{I} = \mathbf{0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{S}^3 = J_2 \mathbf{S} + J_3 \mathbf{I}, \tag{5.104}$$

donde J_2 y J_3 son los invariantes de $\mathbf{S}$

$$J_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2) = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}, \tag{5.105}$$

$$J_3 = \det \mathbf{S} = \frac{1}{3} \operatorname{tr}(\mathbf{S}^3) = \frac{1}{3} \mathbf{S}^3 \cdot \mathbf{I}, \tag{5.106}$$

donde debemos recordar que $J_1 = \operatorname{tr} \mathbf{S} = 0$ por ser $\mathbf{S}$ un tensor desviador (y por lo tanto de trazo nulo).

De lo anterior, no resulta difícil expresar $\mathbf{S}^{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ en función de $\mathbf{I}$, $\mathbf{S}$ y $\mathbf{S}^2$, en particular

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^5 &= J_2^2 \mathbf{S} + J_3 \mathbf{S}^2 + J_2 J_3 \mathbf{I}, \\ \mathbf{S}^7 &= (J_2^3 + J_3^2) \mathbf{S} + J_2^2 J_3 \mathbf{I} + 2 J_2 J_3 \mathbf{S}^2, \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned} \tag{5.107}$$

Introduciendo estos resultados en la expresión polinomial que define $\mathbf{D}$, tenemos

$$\mathbf{D} = p_1 \mathbf{I} + p_2 \mathbf{S} + p_3 \mathbf{S}^2, \tag{5.108}$$

donde p_i, $i = 1, 2, 3$, son polinomios de J_2 y J_1.

Para imponer la condición de que la deformación se realice a volumen constante, hacemos

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 3 p_1 + p_3 \operatorname{tr}(\mathbf{S}^2) = 3 p_1 + 2 p_3 J_2 = 0, \tag{5.109}$$

de donde

$$p_1 = -\frac{2}{3} p_3 J_2, \tag{5.110}$$

que, substituida en la ley general (5.109), conduce a

$$\mathbf{D} = p_2\mathbf{S} + p_3\left[\mathbf{S}^2 - \frac{2}{3}J_2\mathbf{I}\right]. \tag{5.111}$$

Tenemos así una ecuación constitutiva general para fluencia secundaria isotrópica para estados múltiples de tensión. Dando diferentes expresiones a p_2 y p_3 obtendremos la mayoría de las ecuaciones más conocidas. Por ejemplo, si hacemos

$$p_3 = 0, \tag{5.112}$$

$$p_2 = \frac{3}{2}k(3J_2)^{(n-1)/2}, \tag{5.113}$$

obtenemos la ecuación de Odqvist (5.53).

Ahora bien, recordando que $\mathbf{S} = \mathbb{C}\mathbf{T}$ con $\mathbb{C} = \mathbb{I} - \frac{1}{3}\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$, y llevando en cuenta las expresiones (5.105) y (5.106), resulta

$$\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{T}} = \mathbb{C}\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{S}} = \mathbb{C}\mathbf{S} = \mathbf{S}, \tag{5.114}$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{T}} = \mathbb{C}\mathbf{S}^2 = \mathbf{S}^2 - \frac{1}{3}[\mathrm{tr}(\mathbf{S}^2)]\mathbf{I} = \mathbf{S}^2 - \frac{2}{3}J_2\mathbf{I}. \tag{5.115}$$

Luego, nuestra ecuación generalizada para $\mathbf{D}$ resulta

$$\mathbf{D} = p_2\frac{\partial J_2}{\partial \mathbf{T}} + p_3\frac{\partial J_3}{\partial \mathbf{T}}. \tag{5.116}$$

Tenemos así que, si existe una función potencial

$$\phi = \phi(J_2, J_3), \tag{5.117}$$

tal que

$$p_2 = \frac{\partial \phi}{\partial J_2} \quad p_3 = \frac{\partial \phi}{\partial J_3}, \tag{5.118}$$

la tasa de deformación podrá expresarse como

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{T}}. \tag{5.119}$$

Otra forma de establecer una ley general para fluencia secundaria, sería partir directamente de la definición de una función potencial ϕ de la cual pueda derivarse la tasa de deformación. Por isotropía, esta función potencial tendrá que ser

$$\phi = \phi(I_1, I_2, I_3), \tag{5.120}$$

donde I_i, $i = 1,2,3$, son los invariantes asociados al estado de tensiones $\mathbf{T}$

$$I_1 = \operatorname{tr}\mathbf{T}, \tag{5.121}$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\mathbf{T}^2), \tag{5.122}$$

$$I_3 = \det\mathbf{T}. \tag{5.123}$$

Ahora bien, no resulta difícil mostrar que [275]

$$I_2 = J_2 - \frac{1}{3}I_1^2, \tag{5.124}$$

$$I_3 = J_3 + \frac{1}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1 J_2, \tag{5.125}$$

donde J_2 y J_3 son los invariantes de la parte desviadora $\mathbf{S}$ de $\mathbf{T}$. Luego, introduciendo este resultado en ϕ, tenemos

$$\phi = \phi(I_1, J_2, J_3). \tag{5.126}$$

Observando que

$$\mathbf{D} = \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{T}} = \frac{\partial\phi}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{T}} + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\frac{\partial J_2}{\partial\mathbf{T}} + \frac{\partial\phi}{\partial J_3}\frac{\partial J_3}{\partial\mathbf{T}}, \tag{5.127}$$

que $\operatorname{tr}\mathbf{D} = 0$, y llevando en cuenta que $\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{T}} = \mathbf{I}$, empleando las expresiones (5.114) y (5.115), tenemos que

$$\operatorname{tr}\mathbf{D} = \frac{\partial\phi}{\partial I_1}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial I_1}{\partial\mathbf{T}}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial J_2}{\partial\mathbf{T}}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial J_3}\operatorname{tr}\left(\frac{\partial J_3}{\partial\mathbf{T}}\right) = \frac{\partial\phi}{\partial I_1}3 + \frac{\partial\phi}{\partial J_2}\operatorname{tr}\mathbf{S} + \frac{\partial\phi}{\partial J_3}\operatorname{tr}\left(\mathbf{S}^2 - \frac{2}{3}J_2\mathbf{I}\right) = 3\frac{\partial\phi}{\partial I_1} = 0. \tag{5.128}$$

para todo estado de tensiones $\mathbf{T}$. Lo anterior indica que ϕ no puede ser función de I_1, y así llegamos a que nuestra función potencial ϕ debe ser

$$\phi = \phi(J_2, J_3). \tag{5.129}$$

además de ser convexa, es decir

$$\phi(\mathbf{T}^*) - \phi(\mathbf{T}) \geq \phi_{\mathbf{T}}\big|_{\mathbf{T}} \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}). \tag{5.130}$$

Existiendo esta función potencial, siempre será posible construir su función dual es decir, otra función potencial $\psi = \psi(\mathbf{D})$ tal que

$$\psi(\mathbf{D}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \phi(\mathbf{T}), \tag{5.131}$$

ó, lo que es similar

$$\psi(\mathbf{D}) + \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}. \tag{5.132}$$

Teniendo presente que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}$ en el caso de fluencia representa la potencia de disipación, los potenciales ψ y ϕ son conocidos como *potenciales de disipación*.

Por la propia definición de ψ se sigue que

$$\mathbf{T} = \psi_{\mathbf{D}}, \tag{5.133}$$

y

$$\psi(\mathbf{D}^*) - \psi(\mathbf{D}) \geq \psi_{\mathbf{D}}\big|_{\mathbf{D}} \cdot (\mathbf{D}^* - \mathbf{D}). \tag{5.134}$$

Si designamos con $\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}$ el estado de tensión y la tasa de deformación asociados a través de la ecuación constitutiva de fluencia, la expresión anterior también puede ser escrita como

$$\psi(\mathbf{D}^*) - \psi(\mathbf{D}) \geq \mathbf{T}\cdot(\mathbf{D}^* - \mathbf{D}), \tag{5.135}$$

y recordando que

$$\psi(\mathbf{D}) + \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}, \tag{5.136}$$

la desigualdad (5.134) toma la forma

$$\psi(\mathbf{D}^*) - \psi(\mathbf{D}) \geq \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}^* - \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}^* - \psi(\mathbf{D}) - \phi(\mathbf{T}), \tag{5.137}$$

de donde

$$\psi(\mathbf{D}^*) + \phi(\mathbf{T}) \geq \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}^*, \tag{5.138}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}^*$ están asociados a través de la ecuación constitutiva.

Vemos así que, admitiendo la existencia de potenciales de disipación, la ecuación constitutiva de fluencia secundaria podrá ser escrita según las siguientes tres formas equivalentes

$$\psi(\mathbf{D}) + \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}, \tag{5.139}$$

$$\mathbf{D} = \left.\frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{T}}\right|_{\mathbf{T}}, \tag{5.140}$$

$$\mathbf{T} = \left.\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{D}}\right|_{\mathbf{D}}. \tag{5.141}$$

Como podemos apreciar, al definir esta ecuación constitutiva para fluencia secundaria hemos adoptado una série de hipótesis que nos proporcionaron una estructura similar a la que teníamos en el capítulo de materiales hiperelásticos. Lo anterior, y como veremos en las próximas secciones, nos permitirá modelar los problemas mecánicos que experimentan fluencia (secundaria) por intermedio de principios de mínimo enteramente similares a los ya estudiados para materiales hiperelásticos.

Por último, y como ya dijimos al comienzo de este capítulo, nosotros no presentaremos las ecuaciones constitutivas llevando en cuenta efectos de endurecimiento por tiempo (*time hardening*) o por deformación (*strain hardening*), cargas variables, etc. El lector interesado en estos aspectos puede consultar, por ejemplo, el libro de Yu. N. Rabotnov [243].

5.8 Ecuaciones Constitutivas para Componentes Estructurales

Al modelar un problema mecánico, la introdución de hipótesis cinemáticas conduce, como en el caso de vigas, placas y cáscaras a modelos en términos de *variables de tensión generalizadas*. Por ejemplo, en el caso de placas y cáscaras hablamos de la deformación de la superfície media y de los esfuerzos generalizados a ellas asociadas: $\mathbf{N}_t$, el *tensor de tensiones de membrana* y $\mathbf{M}_t$, el *tensor de momentos de membrana*.

Todos estos aspectos del modelado de componentes estructurales serán tratados con cuidado en el Capítulo 7 para el caso de componentes de tipo viga y en el Capítulo 9 para el caso de componentes de tipo placas y cáscaras. El lector no familiarizado con los componentes estructurales puede dirigirse a esos capítulos para interiorizarse sobre los detalles de las diferentes teorías cinemáticas y las consecuencias en términos de las variables duales associadas. En esta sección solamente serán abordados los aspectos fundamentales para tratar el modelado constitutivo.

Cuando el material es elástico, la obtención de estas ecuaciones constitutivas generalizadas para los esfuerzos $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{M}_t$, no presenta dificultad alguna. No ocurre lo mismo cuando el material presenta un comportamiento inelástico, caso que introduce algunas dificultades en la obtención de estas ecuaciones generalizadas.

El uso de modelos generalizados en plasticidad podemos verlo a partir de los trabajos de W. Prager [240], P. G. Hodge [143, 144], M. A. Save y C. E. Massonnet [265, 266]. En el modelado de la fluencia podemos decir que los primeros trabajos en variables generalizadas surgen a partir de las publicaciones de L. M. Kachanov [150], C. R. Calladine y D. C. Drucker [44], Yu. N. Rabotnov [243], W. Olszak y A. Sawczuk [228].

A continuación vamos a analizar algunas ecuaciones constitutivas generalizadas para los modelos de vigas, placas y cáscaras, adecuadas para el análisis del problema de fluencia secundaria en este tipo de componentes estructurales.

5.8.1 Vigas en Flexión

Consideremos una viga de sección transversal con dos ejes de simetría, sometida a la acción de cargas actuando en uno de los planos de simetría, por ejemplo el $\overline{xOz}$. Donde Ox es el eje longitudinal de la viga, que suponemos recto, y Oz el eje vertical. La altura de la viga será $2h$ y su ancho b es conocido como una función de z/h. Las hipótesis cinemáticas que vamos a admitir corresponden a la teoría clássica de vigas (teoría de Bernoulli) que establece que

- las secciones transversales permanecen normales al plano medio después de la deformación;
- las fibras normales (según la dirección Oz) no modifican su longitud durante la deformación.

Estas dos hipótesis permiten establecer que nuestro campo de velocidades cinemáticamente admisible con este tipo de restricción cinemática esté dado por

$$\mathbf{v} = w\mathbf{n} - z\frac{dw}{dx}\mathbf{e}_x, \tag{5.142}$$

donde $w = w(x)$ es la velocidad según la dirección normal al plano medio de la viga, de coordenada x, $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a dicho plano y constante ya que estamos suponiendo viga de eje recto, y $\mathbf{e}_x$ es el vector unitario según la dirección positiva de dicho eje.

Siguiendo la teoría presentada en el Capítulo 7 (ver también el curso *Teoría de Placas y Cáscaras* de E. Taroco y R. A. Feijóo [279]), la medida de deformación generalizada corresponde a

$$\chi = -\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{5.143}$$

y a ella estará asociado por dualidad un esfuerzo generalizado M (momento flector) dado por

$$M = \int_{-h}^{h} \sigma z b\left(\frac{z}{h}\right) dz, \tag{5.144}$$

donde σ es la tensión en la dirección del eje de la viga.

Ahora bien, la relación constitutiva uniaxial local que relaciona σ con la tasa de deformación uniaxial $\varepsilon = z\chi$ la suponemos conocida. Por ejemplo una ley tipo Norton

$$\sigma = s(\varepsilon) = \sigma_n\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_n}\right)^{1/n}, \tag{5.145}$$

donde n, σ_n y ε_n son parâmetros que dependen del material de la viga. Substituyendo esta expresión en la (5.144) tenemos

$$M = \int_{-h}^{h} s(\varepsilon) z b\left(\frac{z}{h}\right) dz. \tag{5.146}$$

Dada la simetría y realizando un cambio de variables de z para ε, con $\varepsilon' = h\chi$, tenemos

$$M = 2\int_0^h s(\varepsilon) z b\left(\frac{z}{h}\right) dz = \frac{2}{\chi^2}\int_0^{\varepsilon'} s(\varepsilon)\varepsilon b\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) d\varepsilon = \frac{2h^2}{\varepsilon'^2}\int_0^{\varepsilon'} s(\varepsilon)\varepsilon b\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) d\varepsilon. \tag{5.147}$$

Si llamamos con b_0 al valor de b en $z = 0$ y si σ^* es una constante arbitraria con la dimensión de una tensión, podemos introducir

$$m(\varepsilon') = m(h\chi) = \frac{2}{\sigma^* b_0 \varepsilon'^2}\int_0^{\varepsilon'} s(\varepsilon)\varepsilon b\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\right) d\varepsilon, \tag{5.148}$$

llegando así a

$$M = \sigma^* b_0 h^2 m(h\chi), \tag{5.149}$$

expresión que nos relaciona la tasa de deformación generalizada χ (tasa de cambio de curvatura) con el esfuerzo generalizado M.

Para el caso particular de una *sección rectangular* y ley de Norton, tenemos

$$m(h\chi) = \frac{2}{\sigma^* b_0 \varepsilon'^2} \int_0^{\varepsilon'} \sigma_n \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_n}\right)^{1/n} \varepsilon b_0 d\varepsilon = \frac{2n}{2n+1} \frac{\sigma_n}{\sigma^*} \left(\frac{\varepsilon'}{\varepsilon_n}\right)^{1/n}, \tag{5.150}$$

y como σ^* es arbitrario podemos adoptar

$$\sigma^* = \sigma^n, \tag{5.151}$$

luego

$$m(h\chi) = \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h\chi}{\varepsilon_n}\right)^{1/n}. \tag{5.152}$$

Substituyendo este resultado en la expresión general de M tenemos finalmente

$$M = \sigma_n b_0 h^2 \frac{2n}{2n+1} \left(\frac{h\chi}{\varepsilon_n}\right)^{1/n}, \tag{5.153}$$

y cuya inversa conduce a

$$\chi = \frac{\varepsilon_n}{h} \left(\frac{2n+1}{2n} \frac{1}{\sigma_n b_0 h^2} M\right)^n. \tag{5.154}$$

Llamado

$$\chi_n = \frac{\varepsilon_n}{h} \qquad M_n = \frac{2n}{2n+1} \sigma_n b_0 h^2, \tag{5.155}$$

resulta

$$\chi = \chi_n \left(\frac{M}{M_n}\right)^n. \tag{5.156}$$

En base a los resultados anteriores, no resulta difícil deducir los potenciales de fluencia. Tenemos así

$$\phi(M) = \frac{1}{n+1} \chi_n M_n \left(\frac{M}{M_n}\right)^{n+1}, \tag{5.157}$$

$$\psi(\chi) = \frac{n}{n+1} \chi_n M_n \left(\frac{\chi}{\chi_n}\right)^{(n+1)/n}, \tag{5.158}$$

y como verificación se obtiene

$$\phi(M) + \psi(\chi) = M\chi. \tag{5.159}$$

Otra forma de presentar estas ecuaciones consiste en trabajar con la ley de Norton no adimensionalizada

$$\varepsilon = B\sigma^n \qquad \sigma = \frac{1}{B^{1/n}}\,\varepsilon^{1/n}. \tag{5.160}$$

Ahora bien, esta ecuación corresponde al comportamiento uniaxial en tracción y/o compresión. Para llevar en cuenta este comportamiento en una sola expresión recurrimos a la función signo

$$\mathrm{sgn}(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{|\varepsilon|}, \tag{5.161}$$

donde $|\varepsilon|$ es el valor absoluto de ε. Con esta función, las ecuaciones toman la forma

$$\sigma = \frac{1}{B^{1/n}}|\varepsilon|^{1/n}\mathrm{sgn}(\varepsilon), \tag{5.162}$$

$$\varepsilon = B|\sigma|^n\mathrm{sgn}(\sigma), \tag{5.163}$$

ya que la constante B es positiva. De esta manera, , y representando A la sección transversal de la viga, la expresión del esfuerzo generalizado resulta

$$M = \int_A \sigma z dA = \int_A \frac{1}{B^{1/n}}|z\chi|^{1/n}\mathrm{sgn}(\chi)\mathrm{sgn}(z)z dA = \frac{1}{B^{1/n}}|\chi|^{1/n}\mathrm{sgn}(\chi)\int_A |z|^{1+1/n}dA. \tag{5.164}$$

Si definimos

$$I_n = \int_A |z|^{1+1/n}dA, \tag{5.165}$$

resulta

$$M = \frac{I_n}{B^{1/n}}|\chi|^{1/n}\mathrm{sgn}(\chi), \tag{5.166}$$

o su inversa

$$\chi = \frac{B}{I_n^n}|M|^n\mathrm{sgn}(M). \tag{5.167}$$

Los correspondientes potenciales resultan ahora dados por [39]

$$\phi(M) = \frac{1}{n+1}\frac{B}{I_n^n}(M^2)^{(n+1)/2}, \tag{5.168}$$

$$\psi(\chi) = \frac{n}{n+1}\frac{I_n}{B^{1/n}}(\chi^2)^{(n+1)/2}. \tag{5.169}$$

5.8.2 Vigas en Flexión y Tracción/Compresión

Si al problema analizado anteriormente le agregamos la posibilidad de deformación en el plano medio, debemos modificar nuestra cinemática de manera de incluir movimientos sobre dicho plano. De esta manera, nuestro campo de velocidades está

dado por

$$\mathbf{v} = w\mathbf{n} + \left(v - z\frac{dw}{dx}\right)\mathbf{e}_x, \tag{5.170}$$

donde $v = v(x)$ es la velocidad del eje medio en la dirección del eje x. Con este campo de velocidades nuestra tasa de deformación será

$$\varepsilon = \frac{dv}{dx} - z\frac{d^2w}{dx^2}. \tag{5.171}$$

Por lo tanto, las tasas de deformaciones generalizadas corresponden a

$$\varepsilon_o = \frac{dv}{dx}, \tag{5.172}$$

$$\chi = -\frac{d^2w}{dx^2}, \tag{5.173}$$

y la potencia de disipación por unidad de longitud de la viga será $N\varepsilon_o + M\chi$, donde N y M son los esfuerzos generalizados asociados, respectivamente, a ε_o y χ. Recordando que la sección rectangular de la viga tiene ancho $b(z/h)$, los esfuerzos N y M están dados por

$$N = \int_{-h}^{h} \sigma b dz, \tag{5.174}$$

$$M = \int_{-h}^{h} \sigma z b dz. \tag{5.175}$$

Nuevamente consideremos un material tipo Norton

$$\sigma = \sigma_n \left(\frac{\varepsilon_o + z\chi}{\varepsilon_n}\right)^{1/n}. \tag{5.176}$$

Substituyendo esto en la expresión para N, y asumiendo que el ancho b es constante, tenemos

$$N = \int_{-h}^{h} \sigma_n \left(\frac{\varepsilon_o + z\chi}{\varepsilon_n}\right)^{1/n} b dz = \frac{\sigma_n b}{\varepsilon_n^{1/n}} \frac{n}{(n+1)} \frac{1}{\chi} \left[(\varepsilon_o + h\chi)^{1+1/n} - (\varepsilon_o - h\chi)^{1+1/n}\right], \tag{5.177}$$

ó, en forma adimensional

$$\frac{N}{\sigma_n bh} = \frac{1}{\varepsilon_n^{1/n}} \frac{1}{h\chi} \frac{n}{(n+1)} \left[(\varepsilon_o + h\chi)^{1+1/n} - (\varepsilon_o - h\chi)^{1+1/n}\right]. \tag{5.178}$$

Igualmente para el momento M, tenemos

$$M = \int_{-h}^{h} \sigma_n \left(\frac{\varepsilon_o + z\chi}{\varepsilon_n} \right)^{1/n} zbdz = \frac{\sigma_n b h^2}{\varepsilon_n^{1/n}} \frac{1}{(h\chi)^2} \frac{n}{2n+1} \left[(\varepsilon_o + h\chi)^{2+1/n} - (\varepsilon_o - h\chi)^{2+1/n} \right] - \frac{\varepsilon_o}{\chi} N, \quad (5.179)$$

o en forma adimensional

$$\frac{M}{\sigma_n b h^2} = \frac{1}{\varepsilon_n^{1/n}} \frac{1}{(h\chi)^2} \frac{n}{2n+1} \left[(\varepsilon_o + h\chi)^{2+1/n} - (\varepsilon_o - h\chi)^{2+1/n} \right] - \frac{\varepsilon_o}{\chi} \frac{N}{\sigma_n b h^2}. \quad (5.180)$$

Hemos arribado así a expresiones que nos relacionan N y M con ε_o y χ. Estas expresiones son de una naturaleza tal que resulta imposible explicitar ε_o y χ en función de N y M. Existen numerosas maneras de salvar esta dificultad. Una de ellas es construir una función potencial *aproximada* del tipo

$$\phi = \phi(R), \quad (5.181)$$

donde R es, a su vez, una función de N y M que es elegida de tal manera que, cuando $N = 0$ se tiene que $R = M$. A continuación vamos a mostrar como construir esta función. Por la definición del potencial de creep tenemos

$$\chi = \frac{\partial \phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial M}. \quad (5.182)$$

Para $N = 0$ vimos que (en forma exacta)

$$\chi = \chi_n \left(\frac{M}{M_n} \right)^n \quad (5.183)$$

y como para este caso $M = R$ tenemos que

$$\phi(R) = \chi_n M_n \frac{1}{n+1} \left(\frac{R}{M_n} \right)^{n+1}. \quad (5.184)$$

También, hemos visto que en el espacio de tensiones generalizadas, las curvas de disipación asociadas a una determinada normalización y correspondiente a los diferentes valores de n, están comprendidas entre las curvas correspondientes a $n = 1$ (distribución de tensiones en material elástico incompresible) y $n = \infty$ (idealmente plástico). Luego, si designamos con σ_Y la tensión de fluencia del material (idealmente plástico), la relación entre N y M que agota la capacidad resistente de una sección rectangular corresponde a

$$N = b(2h - 2z)\sigma_Y, \quad (5.185)$$

$$M = bz(2h - z)\sigma_Y, \quad (5.186)$$

de donde

$$\bar{N} = \frac{N}{2bh\sigma_Y} = \frac{1}{h}(h-z), \tag{5.187}$$

$$\bar{M} = \frac{M}{bh^2\sigma_Y} = \frac{z}{h^2}(2h-z), \tag{5.188}$$

por lo que

$$\bar{N}^2 + \bar{M} = 1. \tag{5.189}$$

En el espacio de las tensiones generalizadas la expresión anterior corresponde a una parábola, como se aprecia en la Figura 5.19.

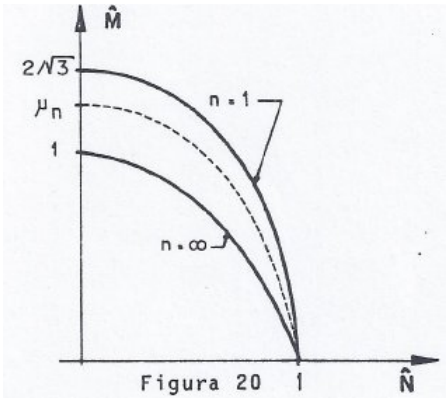


Fig. 5.19 Potencial de disipación.

Por otra parte para el caso $n = 1$, que corresponde a una distribución elástica, tenemos

$$\sigma = \frac{N}{2bh} + \frac{3}{2}\frac{Mz}{bh^3}, \tag{5.190}$$

o

$$\frac{\sigma}{\sigma_n} = \overline{\sigma} = \bar{N} + \frac{3}{2}\bar{M}\frac{z}{h}, \tag{5.191}$$

y adoptando como normalización para la curva del potencial de disipación el criterio que el potencial por unidad de volumen sea unitario, es decir

$$b\int_{-h}^{h} \overline{\sigma}^2 dz = 2bh, \tag{5.192}$$

tenemos finalmente

$$\bar{N}^2 + \frac{3}{4}\bar{M}^2 = 1, \tag{5.193}$$

que corresponde a una elipse en el espacio de tensiones generalizadas, como mostrado en la Figura 5.19.

Como resulta obvio, todas las curvas de disipación constante pasan por el punto $(N,M) = (1,0)$. Para determinar la intersección de estas curvas con el eje $\bar{M}$, bastará analizar la potencia disipada en el caso de flexión pura ($\bar{N} = 0$). Para ello recordemos que

$$\chi = \chi_n \left(\frac{M}{M_n} \right)^n, \tag{5.194}$$

por lo que la potencia disipada será

$$M\chi = M\chi_n \left(\frac{M}{M_n} \right)^n = \chi_n M_n \left(\frac{M}{M_n} \right)^{n+1}, \tag{5.195}$$

y de la condición de normalización

$$M\chi = 2bh\sigma_n\varepsilon_n, \tag{5.196}$$

tenemos

$$\chi_n M_n \left(\frac{M}{M_n} \right)^{n+1} = 2hb\sigma_n\varepsilon_n, \tag{5.197}$$

de donde

$$M = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n/(n+1)} \sigma_n h^2 b, \tag{5.198}$$

por lo que

$$\bar{M} = \frac{M}{\sigma_n h^2 b} = \left(\frac{n}{2n+1} \right)^{n/(n+1)} = \mu_n, \tag{5.199}$$

expresión que nos define el punto de intersección que estamos procurando.

Como podemos apreciar una vez más, todas las curvas están comprendidas entre las curvas para $n = 1$, que corta los ejes en los pontos $(0, 2/\sqrt{3})$ y $(1,0)$, y la curva $n = \infty$, que corta los ejes en los puntos $(0,1)$ y $(1,0)$ (en referencia al cuadrante positivo). Para cualquier otro valor de n la intersección será $(0,\mu_n)$ y $(1,0)$. Luego, la *función potencial aproximada la calculamos suponiendo que esta curva sea una elipse* que pasa por dichos puntos, es decir

$$\left(\frac{\bar{M}}{\sqrt{\mu_n}} \right)^2 + \bar{N}^2 = 1. \tag{5.200}$$

En base a estos resultados, la función R resulta finalmente

$$R^2 = M^2 + \mu_n^2 h^2 N^2, \tag{5.201}$$

mientras que el potencial de creep resulta

$$\phi(R) = \chi_n M_n \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{R^2}{M_n^2} \right)^{(n+1)/2}, \tag{5.202}$$

de donde

$$\varepsilon_o = \frac{\partial \phi}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial N} = \chi_n \left(\frac{R}{M_n}\right)^n (\mu_n h)^2 \frac{N}{R}, \tag{5.203}$$

$$\chi = \frac{\partial \phi}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial M} = \chi_n \left(\frac{R}{M_n}\right)^n \frac{M}{R}. \tag{5.204}$$

5.8.3 Cáscaras y Placas

La obtención de ecuaciones constitutivas generalizadas para el análisis de placas y cáscaras dentro de las hipótesis asociadas a creep estacionario ha sido objeto de numerosos trabajos. En particular la obra de Yu. N. Rabotnov (ver [243]), se dedica fundamentalmente a la obtención de ecuaciones constitutivas generalizadas cuando la flexión, o la deformación de membrana, predomina una sobre la otra.

La obtención de ecuaciones constitutivas generalizadas cuando ambos efectos están presentes puede ser consultada en el libro de W. Olszak y A. Sawczuk (ver [228]), donde se presenta una sistemática general para la dedución exacta de tales ecuaciones. También pueden consultarse los trabajos de V. I. Rozenblium [257], y de J. T. Boyle y J. Spence [38, 39].

En particular, y para finalizar esta sección, Rozenblium [257] propone la seguiente función potencial

$$\phi = \frac{B}{n+1}\frac{1}{h^n}\Big[\big(N_{11}^2 - N_{11}N_{22} + N_{22}^2 + 3N_{12}^2\big) + \frac{4}{\mu_n^2 h^2}\big(M_{11}^2 - M_{11}M_{22} + M_{22}^2 + 3M_{12}^2\big)\Big]^{(n+1)/2}, \tag{5.205}$$

donde

$$\mu_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n/(n+1)}, \tag{5.206}$$

y N_{ij}, M_{ij} son, respectivamente, las componentes de los tensores $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{M}_t$ cuando referidos a las direcciones principales de la cáscara.

5.9 Problema de Equilibrio en Fluencia Estacionaria

Esta sección y las siguientes, tienen por objetivo presentar los distintos métodos comúnmente empleados en el análisis de tensiones en estructuras donde el fenómeno de fluencia está presente.

En particular, nuestra presentación se limitará a los *métodos variacionales*. Hacemos esto en virtud de que, como ya mencionamos, consideramos la formulación variacional la manera más adecuada para modelar un determinado problema mecánico.

Además, la formulación variacional nos proporciona el algoritmo numérico para la obtención de soluciones aproximadas del problema planteado. Como veremos más adelante, estos algoritmos son fácilmente incorporados en los programas de cálculo automático de estructuras elásticas.

El lector interesado en otras técnicas de análisis, podrá consultar la bibliografía que anexamos al final del trabajo.

En estas secciones presentamos el análisis de la fluencia durante la parte secundaria del fenómeno. El equilibrio será planteado empleando el Principio de la Potencia Virtual (PPV). Admitiendo potenciales de fluencia convexos, mostramos principios de mínimos similares a los existentes en elasticidad (ver Capítulo 4). A partir de allí, resulta fácil extender los teoremas de Castigliano de la elasticidad para incluir la fluencia secundaria. Posteriormente, y para ecuaciones constitutivas de tipo Norton, presentamos resultados que permiten acotar los desplazamientos y algunos ejemplos de aplicación.

También discutimos algunos aspectos computacionales oriundos de la formulación variacional, particularmente en lo referente a la incompresibilidad. Para evitar este problema de caracter computacional, presentamos un modelo que hemos llamado "elasto-creep". La resolución de este modelo, como veremos, alcanza en el tiempo un régimen estacionario, que coincide con la solución del problema de fluencia.

Finalizamos esta última parte del capítulo presentando el análisis de tensiones cuando se lleva en cuenta la parte primaria de la fluencia y/o cargas de origen mecánicas-térmicas variables con el tiempo.

En el comportamiento de un material sometido a condiciones de tensión y temperatura constantes, es posible observar que para ciertos niveles de tensión las curvas de fluencia presentan una región donde la tasa de deformación resulta prácticamente constante. Este tramo, como vimos, es llamado fluencia secundaria o estacionaria.

Para largos períodos de tiempo y en la suposición que la parte primaria de la curva es despreciable frente a la secundaria, parece razonable introducir una aproximación como la indicada en la Figura 5.20. En este caso podemos ver que la deformación en el instante t estará dada por

$$E_{11} = E_{11}^0 + D_{11}^c t, \tag{5.207}$$

donde E_{11}^0 está asociado a la deformación instantánea elástica o elasto-plástica, y D_{11}^c es la mínima tasa de deformación de fluencia, correspondiente a la región estacionaria.

Dejando de lado el origen de E_{11}^0, en numerosos problemas de relevancia industrial E_{11}^0 es pequeño de modo que para largos períodos de tiempo el término $D_{11}^c t$ predomina. Surge así en la mecánica un problema que consistirá en determinar el estado de tensiones y tasa de deformación de fluencia en un cuerpo cuando sometido a efectos de carga y temperatura constante. Lo anterior queda formulado matemáticamente de la siguiente forma.

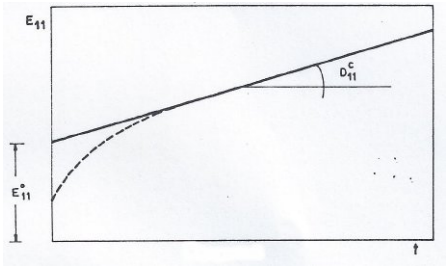


Fig. 5.20 Manifestación de la fluencia. Deformación en el tiempo.

5.9.1 Enunciado del Problema

Consideremos un cuerpo ocupando la región $\mathscr{B}$ del espacio Euclidiano puntual tridimensional $\mathscr{E}$, sometido a la acción de un sistema de cargas constantes el tiempo $(\mathbf{b},\mathbf{a})$ donde

- $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathscr{B}$, es una fuerza de cuerpo por unidad de volumen;
- $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\mathscr{B}_a$, fuerza por unidad de superficie aplicada (prescripta) en la parte $\partial\mathscr{B}_a$ del contorno del cuerpo $\partial\mathscr{B}$.

A su vez, el cuerpo estará apoyado de manera tal que ciertas restricciones cinemáticas son inducidas por estos apoyos. Limitando la presentación al caso de restricciones bilaterales lo anterior podemos expresarlo matemáticamente estableciendo que el campo de velocidades $\mathbf{v}$ está prescripto en los apoyos. En otras palabras $\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \partial\mathscr{B}_v$, donde $\partial\mathscr{B}_v$ es la parte de $\partial\mathscr{B}$ donde tenemos apoyos.

En particular, supondremos que donde hemos prescripto fuerzas de superficie no hemos prescripto velocidades. Luego $\partial\mathscr{B} = \partial\mathscr{B}_v \cup \partial\mathscr{B}_a$, $\partial\mathscr{B}_v \cap \partial\mathscr{B}_a = \emptyset$.

Si admitimos válida la hipótesis de pequeñas deformaciones, la configuración deformada podrá confundirse con la configuración inicial. De esta manera, si $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ es el campo de desplazamientos que el cuerpo experimenta cuando sometido al sistema de cargas $(\mathbf{b},\mathbf{a})$, resulta

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{u}}, \tag{5.208}$$

por lo que las restricciones cinemáticas debido a los apoyos también podrán colocarse como

$$\dot{\mathbf{u}} = \overline{\dot{\mathbf{u}}} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_v. \tag{5.209}$$

Luego, el problema de la fluencia secundaria consistirá en determinar los campos: de velocidades $\dot{\mathbf{u}}$, de tensiones, $\mathbf{T}$, y de tasas de deformaciones de fluencia, $\mathbf{D}$, tales que satisfagan el siguiente sistema de ecuaciones

- *Ecuación de Equilibrio (PPV)*

$$-(\mathbf{T}(\mathbf{D}(\dot{\mathbf{u}})), \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v = \mathrm{Var}_{\dot{u}}. \tag{5.210}$$

- *Tasa de Deformación*

$$\mathbf{D}(\dot{\mathbf{u}}) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}(\nabla \dot{\mathbf{u}} + (\nabla \dot{\mathbf{u}})^T), \tag{5.211}$$

que en componentes cartesianas toma la forma

$$D_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}\right). \tag{5.212}$$

- *Ecuación Constitutiva*

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + p\mathbf{I} = g(\mathbf{D})\mathbf{D} + p\mathbf{I}, \tag{5.213}$$

que en componentes cartesianas toma la forma

$$T_{ij} = g(\mathbf{D})D_{ij} + p\delta_{ij}. \tag{5.214}$$

- *Restricción de incompresibilidad de la tasa de deformación*

$$\operatorname{tr}\mathbf{D} = \operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} = 0, \tag{5.215}$$

que en componentes cartesianas corresponde a

$$\frac{\partial \dot{u}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \dot{u}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \dot{u}_3}{\partial x_3} = 0. \tag{5.216}$$

- *Condiciones de Contorno Principales*

$$\dot{\mathbf{u}} = \bar{\dot{\mathbf{u}}} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_v. \tag{5.217}$$

- *Condiciones de Contorno Naturales*

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{a} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a, \tag{5.218}$$

las cuales son satisfechas naturalmente al ser satisfecho el PPV (5.210).

Como podemos apreciar, el problema de la fluencia estacionaria es un problema no lineal. La no linealidad está presente en la ecuación constitutiva $\mathbf{T} = g(\mathbf{D})\mathbf{D}$. Por otra parte es importante tener presente que este problema está definido para todo campo de velocidades que satisfaga la *restricción de incompresibilidad* $\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}} = 0$. Luego, en la definición del espacio cinemáticamente admisible de velocidades, además de las restricciones al movimiento impuestas en la frontera $\partial\mathscr{B}_v$, es necesario incluir la restricción de incompresibilidad.

5.9.2 Formulación Variacional

El problema de fluencia estacionaria anteriormente descripto puede ser colocado dentro de una formulación variacional equivalente proporcionada por el Principio de la Potencia Virtual (PPV).

Para ello, definamos previamente el conjunto de velocidades cinemáticamente admisibles, es decir, conjunto de todos los campos de velocidades que satisfacen las restricciones cinemáticas prescriptas en $\partial\mathscr{B}_v$ y son compatibles con el material, es decir satisfacen la incompresibilidad. A este conjunto lo designaremos Kin_v, luego

$$\text{Kin}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \text{div}\,\mathbf{v} = 0,\, \mathbf{v}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \overline{\mathbf{v}}\}, \tag{5.219}$$

donde $\mathscr{V}$ es un espacio de funciones suficientemente regulares tal que las operaciones realizadas tengan sentido. A su vez llamaremos, Var_v al subespacio

$$\text{Var}_v = \{\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V};\, \text{div}\,\hat{\mathbf{v}} = 0,\, \hat{\mathbf{v}}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \mathbf{0}\}, \tag{5.220}$$

también llamado espacio de campos virtuales de velocidades.

Luego, aplicando el PPV, el problema variacional (comparar con la (3.209)) asociado a la fluencia estacionaria consistirá en lo siguiente: determinar $\mathbf{v} \in \text{Kin}_v$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot\mathscr{D}(\mathbf{v}^* - \mathbf{v})dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot(\mathbf{v}^* - \mathbf{v})dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}^* - \mathbf{v})dS \qquad \forall \mathbf{v}^* \in \text{Kin}_v, \tag{5.221}$$

donde el estado de tensiones $\mathbf{T}$ debe estar asociado con el campo $\mathbf{v}$ a través de la ecuación constitutiva correspondiente a fluencia estacionaria, es decir

$$\mathbf{T} = g(\mathscr{D}(\mathbf{v}))\mathscr{D}(\mathbf{v}) + p\mathbf{I} = \mathbf{S} + p\mathbf{I}, \tag{5.222}$$

y donde la tasa de deformación para el cuerpo que nos ocupa está dada por

$$\mathbf{D} = \mathscr{D}(\mathbf{v}) = \nabla^s\mathbf{v}, \tag{5.223}$$

$$\mathbf{D}^* = \mathscr{D}(\mathbf{v}^*) = \nabla^s\mathbf{v}^*. \tag{5.224}$$

Introduciendo la ecuación constitutiva en la expresión variacional anterior y teniendo presente que

$$\mathbf{I}\cdot(\mathbf{D}^* - \mathbf{D}) = \text{tr}(\mathbf{D}^* - \mathbf{D}) = \text{div}(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}) = \text{div}\,\mathbf{v}^* - \text{div}\,\mathbf{v} = 0, \tag{5.225}$$

ya que $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^* \in \text{Kin}_v$, tenemos que la presión p que aparece en la (5.222) es inmaterial en el problema variacional, el cual es reescrito de la siguiente forma: determinar $\mathbf{v} \in \text{Kin}_v$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}} g(\nabla^s\mathbf{v})\nabla^s\mathbf{v}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}}dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v. \tag{5.226}$$

Vemos así que para caracterizar el problema es necesario sólamente especificar la parte desviadora de la tensión $\mathbf{T}$ en la (5.222), que llamamos $\mathbf{S}$.

De la misma manera que fue realizada en elasticidad, vamos a mostrar que el PPV nos proporciona también las formas *locales* o *fuertes* del equilibrio. Como fue visto, lo anterior corresponde a poner en evidencia el operador de equilibrio $\mathscr{D}^*$. Para ello, recordemos que (teorema de la divergencia)

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{S}\cdot\nabla^s\mathbf{v}dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{S}\cdot\nabla\mathbf{v}dV = \int_{\mathscr{B}} \operatorname{div}(\mathbf{S}\mathbf{v})dV - \int_{\mathscr{B}} \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}dV = \int_{\partial\mathscr{B}} \mathbf{S}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}dS - \int_{\mathscr{B}} \operatorname{div}\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}dV. \quad (5.227)$$

Substituyendo este resultado en la (5.221), y observando que $\hat{\mathbf{v}}$ es nulo en $\partial\mathscr{B}_v$, tenemos

$$-\int_{\mathscr{B}} (\operatorname{div}\mathbf{S}+\mathbf{b})\cdot\hat{\mathbf{v}}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} (\mathbf{S}\mathbf{n}-\mathbf{a})\cdot\hat{\mathbf{v}}dS = 0 \quad \forall\mathbf{v}^*\in \mathrm{Var}_v. \quad (5.228)$$

Observe que los elementos de Var_v poseen divergencia nula. Luego, admitiendo continuidad en los integrandos, de la (5.228) concluimos que

$$\operatorname{div}\mathbf{S}+\mathbf{b} = -\nabla\phi \quad \text{en } \mathscr{B}, \quad (5.229)$$

$$\mathbf{S}\mathbf{n} = -\phi\mathbf{n}+\mathbf{a} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a, \quad (5.230)$$

donde $-\phi$ es una función escalar definida en $\mathscr{B}$ y que es una reacción de vínculo a la restricción de divergencia nula. Este resultado sigue de la ortogonalidad entre los espacios de gradiente y de divergencia nula (ver [283]).

Observando que $\nabla\phi = \operatorname{div}(\phi\mathbf{I})$, y de la (5.222) recordando que $\mathbf{T} = \mathbf{S}+p\mathbf{I}$, identificamos al campo ϕ como el campo de presión que surge en el cuerpo como respuesta a la restricción cinemática de divergencia nula. Luego, las ecuaciones (5.229)-(5.230), junto con las restricciones cinemáticas y la ecuación constitutiva define completamente el problema de valor de contorno (ó forma fuerte) en fluencia estacionaria, como sigue

$$\operatorname{div}\mathbf{T}+\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}, \quad (5.231)$$

$$\mathbf{T}\mathbf{n} = \mathbf{a} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a, \quad (5.232)$$

$$\mathbf{v} = \overline{\mathbf{v}} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_v, \quad (5.233)$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \mathscr{B}, \quad (5.234)$$

$$g(\nabla^s\mathbf{v})\nabla^s\mathbf{v}+p\mathbf{I} = \mathbf{T} \quad \text{en } \mathscr{B}. \quad (5.235)$$

5.9.3 Unicidad del Campo de Velocidades y de Tensiones

En esta sección vamos a mostrar que si admitimos ciertas restricciones sobre la función $g(\mathbf{D})$, el problema variacional descripto admitirá una única solución para el campo de velocidades.

En efecto, supongamos que $g(\mathbf{D})$ satisface las siguientes propiedades

- g es una función continua;
- $g = g(\mathbf{D}) \geq 0$ e igual a cero si y sólo si $\mathbf{D} = \mathbf{0}$;
- dados $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{D}_2$ arbitrarios resulta

$$(g_2 - g_1)(\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.236}$$

donde $g_i = g(\mathbf{D}_i)$, $i = 1,2$.

Satisfechas estas propiedades, no resulta difícil demostrar el siguiente resultado.

Lema 5.1 *Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathrm{Kin}_v$ campos arbitrarios de velocidades. Suponiendo que $g = g(\mathbf{D})$, con $\mathbf{D} = \nabla^s \mathbf{v}$, satisface las propiedades anteriores, resulta*

$$(g_2\mathbf{D}_2 - g_1\mathbf{D}_1) \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.237}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. A su vez, recordando que $\mathbf{T}_i = g_i\mathbf{D}_i + p_i\mathbf{I}$, $i = 1,2$ la expresión anterior puede ser colocada en función del estado de tensiones, es decir

$$(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.238}$$

e igual a 0 si y sólo si $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$.

Demostración. Observe que

$$\begin{aligned}(g_2\mathbf{D}_2 - g_1\mathbf{D}_1) \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \frac{1}{2}(g_2 - g_1)(\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{D}_1) \\ + \frac{1}{2}(g_2 + g_1)(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1).\end{aligned} \tag{5.239}$$

Como podemos apreciar el primer término del segundo miembro es positivo o nulo por la propiedad (5.236) que satisface g. Por su parte, el segundo término es estrictamente positivo para todo $\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 \neq \mathbf{0}$ por propiedad de positividad de la función g y por la propiedad del producto escalar. Luego

$$(g_2\mathbf{D}_1 - g_1\mathbf{D}_1) \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.240}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1$.

Ahora bien, si $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1$ resulta $\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1 = \mathbf{0}$ y como $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \in \mathrm{Kin}_v$ se tiene $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ en $\partial\mathscr{B}_v$. De lo anterior tenemos el siguiente problema de valor de contorno

$$\nabla(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}, \tag{5.241}$$

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_v, \tag{5.242}$$

cuya única solución corresponde a $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, es decir, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Así, obtenemos finalmente

$$(g_2\mathbf{D}_2 - g_1\mathbf{D}_1)\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.243}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$, con lo que queda demostrado el resultado. ■

Probado el Lema 5.1, no resulta difícil demostrar que el problema variacional correspondiente a la fluencia estacionaria admite un único campo de velocidades como solución, caso esta exista.

Para demostrar esto supongamos lo contrario, es decir, consideremos $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$ campos de velocidades no idénticamente nulos soluciones del problema variacional y tales que $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_1$. Dado que cada campo es, por hipótesis, solución del problema variacional tendremos

$$\int_{\mathscr{B}} g(\mathbf{D}_1)\mathbf{D}_1\cdot(\mathbf{D}^* - \mathbf{D}_1)dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_1)dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_1)dS \qquad \forall \mathbf{v}^* \in \mathrm{Kin}_v, \tag{5.244}$$

y también

$$\int_{\mathscr{B}} g(\mathbf{D}_2)\mathbf{D}_2\cdot(\mathbf{D}^* - \mathbf{D}_2)dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_2)dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}^* - \mathbf{v}_2)dS \qquad \forall \mathbf{v}^* \in \mathrm{Kin}_v, \tag{5.245}$$

donde $\mathbf{D}_i = \nabla^s\mathbf{v}_i$, $i = 1,2$, $\mathbf{D}^* = \nabla^s\mathbf{v}^*$.

Como $\mathbf{v}^*$ es arbitrario, las expresiones anteriores deberán ser satisfechas para algún $\mathbf{v}^*$ particular. Tomemos así, respectivamente, $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}_1$ en la (5.244) y (5.245). Luego

$$\int_{\mathscr{B}} g(\mathbf{D}_1)\mathbf{D}_1\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)dS, \tag{5.246}$$

$$\int_{\mathscr{B}} g(\mathbf{D}_2)\mathbf{D}_2\cdot(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2)dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)dS. \tag{5.247}$$

Sumando miembro a miembro obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}} (g(\mathbf{D}_1)\mathbf{D}_1 - g(\mathbf{D}_2)\mathbf{D}_2)\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)dV = 0, \tag{5.248}$$

o en forma equivalente

$$\int_{\Omega} (g(\mathbf{D}_2)\mathbf{D}_2 - g(\mathbf{D}_1)\mathbf{D}_1)\cdot(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)dV = 0. \tag{5.249}$$

El Lema 5.1 nos dice que el integrando es estrictamente positivo toda vez que $\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{v}_1$. Llegamos así a una contradicción que provino de suponer que las soluciones $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_1$ eran diferentes. Se tiene así demonstrado que, si existe solución del problema variacional, ella es única.

Alcanzada la unicidad en el campo de velocidades $\mathbf{v}$ se sigue que el tensor tasa de deformación, $\mathbf{D} = \nabla^s \mathbf{v}$, también será único y, a través de la ecuación constitutiva, se tiene que la componente desviadora, del tensor de tensiones $\mathbf{T}$, dada por $\mathbf{S} = g(\mathbf{D})\mathbf{D}$, también será única. Para demostrar la unicidad del tensor de tensiones nos falta probar la unicidad de la presión hidrostática p (recuerde $\mathbf{T} = \mathbf{S} + p\mathbf{I}$).

Para realizar esta demostración, podemos emplear el PPV que nos proporcionará la expresión de p dual con la restricción cinemática asociada a la incompresibilidad. Para ello ahora relajamos la restricción de incompresibilidad trabajando con un espacio Var_v donde esta restricción no esta más presente. Luego, del PPV (5.226) tenemos que si existen dos estados $p_1 \neq p_2$, ellos deben ser tales que

$$-\int_{\mathscr{B}} \nabla(p_2 - p_1) \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial \mathscr{B}_a} (p_2 - p_1)\hat{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v^0 \tag{5.250}$$

donde

$$\mathrm{Var}_v^0 = \{\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V} \ \hat{\mathbf{v}}|_{\partial \mathscr{B}_v} = \mathbf{0}\}. \tag{5.251}$$

De la ecuación variacional (5.250) tenemos que

$$p_2 = p_1, \tag{5.252}$$

con lo que demostramos la unicidad del estado de tensiones.

La demostración anterior puede realizarse también empleando la forma fuerte del equilibrio. En efecto, substituyendo $\mathbf{T} = \mathbf{S} + p\mathbf{I}$ en el problema de valor de contorno (formulación fuerte dada por (5.229) y (5.230)) de la fluencia estacionaria, y como $\mathbf{S}$ ahora es conocido resulta

$$\nabla p = -(\mathbf{b} + \mathrm{div}\,\mathbf{S}) \quad \text{en } \mathscr{B}. \tag{5.253}$$

con la condición de contorno

$$p = (\mathbf{a} - \mathbf{S}\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \partial \mathscr{B}_a. \tag{5.254}$$

Nuevamente, este problema de valor de contorno admite una única solución para p. En efecto si p_1 y p_2 son solución su diferencia satisface

$$\nabla(p_1 - p_2) = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}, \tag{5.255}$$

$$p_1 - p_2 = 0 \quad \text{en } \partial \mathscr{B}_a. \tag{5.256}$$

Del resultado anterior se sigue que $p_1 = p_2$, con lo que obtenemos la unicidad de la presión hidrostática.

Hemos llegado así a un importante resultado, si el problema variacional admite solución tendremos que el campo de velocidades será único y también lo será el campo de tensiones asociado via la ecuación constitutiva.

Es importante resaltar que la unicidad de tensiones ocurre si existen cargas prescriptas en la frontera. Si el problema de fluencia estacionaria es tal que $\partial \mathscr{B} \equiv \partial \mathscr{B}_v$, es decir no existen cargas aplicadas en el contorno del cuerpo, tendremos que el

estado de tensiones $\mathbf{T}$ queda indeterminado en lo que a su componente hidrostática se refiere. Luego si $\mathbf{T}^*$ es solución, el estado de tensiones que difiera de $\mathbf{T}^*$ en una presión hidrostática constante también es solución.

5.9.4 Principios Variacionales de Mínimo

A continuación, vamos a admitir que la ecuación constitutiva de la fluencia estacionaria puede obtenerse a partir de una *función potencial* llamada de potencial de disipación $\psi = \psi(\mathbf{D})$ tal que

$$\mathbf{T} = \psi_{\mathbf{D}} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{D}}. \tag{5.257}$$

Recordemos ahora el Lema 5.1 de la sección anterior

$$(\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.258}$$

donde los pares $(\mathbf{T}_2, \mathbf{D}_2)$ y $(\mathbf{T}_1, \mathbf{D}_1)$ están asociados por la ecuación constitutiva de la fluencia estacionaria. Si tomamos $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1 + d\mathbf{D}$ y $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}$ resulta

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}_1) \cdot d\mathbf{D} \geq 0. \tag{5.259}$$

Luego, si realizamos un proceso que lleva el material de un estado de tasas de deformación $\mathbf{D}_1$ a otro $\mathbf{D}_2$ resulta

$$\int_{\mathbf{D}_1}^{\mathbf{D}_2} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_1) \cdot d\mathbf{D} = \int_{\mathbf{D}_1}^{\mathbf{D}_2} \mathbf{T} \cdot d\mathbf{D} - \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0. \tag{5.260}$$

Dado que hemos admitido la existencia de la función potencial ψ tal que vale la (5.257), la expresión anterior toma la forma

$$\int_{\mathbf{D}_1}^{\mathbf{D}_2} \psi_{\mathbf{D}} \cdot d\mathbf{D} - \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.261}$$

ó, lo que es equivalente

$$\int_{\mathbf{D}_1}^{\mathbf{D}_2} d\psi - \mathbf{T}_1 \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.262}$$

que conduce finalmente a

$$\psi(\mathbf{D}_2) - \psi(\mathbf{D}_1) \geq \psi_{\mathbf{D}}(\mathbf{D}_1) \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1). \tag{5.263}$$

Esta expresión establece la convexidad de esta función potencial. Observe que hemos llegado a la propiedad de convexidad como consecuencia de la existencia

de la función potencial ψ y de la propiedad de la función $g(\mathbf{D})$ establecida en el Lema 5.1.

Si substituimos la desigualdad (5.263) en la expresión (5.221) del PPV, tenemos

$$\int_{\mathscr{B}}[\psi(\mathbf{D}^*)-\psi(\mathbf{D})]dV \geq \int_{\mathscr{B}}\mathbf{b}\cdot(\mathbf{v}^*-\mathbf{v})dV+\int_{\partial\mathscr{B}_a}\mathbf{a}\cdot(\mathbf{v}^*-\mathbf{v})dS \qquad \forall\mathbf{v}^*\in \mathrm{Kin}_v, \quad (5.264)$$

o en forma similar

$$\Pi(\mathbf{v}^*)=\int_B \psi(\mathbf{D}^*)dV-\int_{\mathscr{B}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}^*dV-\int_{\partial\mathscr{B}_a}\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}^*dS\geq\Pi(\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}^*\in\mathrm{Kin}_v, \quad (5.265)$$

e igual si y sólo si $\mathbf{v}^*=\mathbf{v}$.

Llegamos así a que el problema de la fluencia estacionaria resulta equivalente al siguiente problema de mínimo: determinar el campo $\mathbf{v}_0\in\mathrm{Kin}_v$ tal que minimice el funcional

$$\Pi(\mathbf{v})=\int_{\mathscr{B}}\psi(\nabla^s\mathbf{v})dV-\int_{\mathscr{B}}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}-\int_{\partial\mathscr{B}_a}\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}dS. \quad (5.266)$$

Hasta aquí, hemos presentado el problema de la fluencia estacionaria dentro de una formulación donde la variable era el campo de velocidades. A continuación vamos a presentar la formulación variacional dual a la anterior, donde la variable principal es ahora el estado de tensiones.

Para plantear esta formulación variacional definamos, como hecho en el Capítulo 3, el conjunto de campos de tensiones estáticamente equilibrados

$$\mathrm{Est}_T=\{\mathbf{T}\in\mathscr{W}';-(\mathbf{T},\mathscr{D}\hat{\mathbf{v}})+\langle f,\hat{\mathbf{v}}\rangle=0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathrm{Var}_v\}, \quad (5.267)$$

o si queremos expresarlo en función de la forma fuerte del equilibrio

$$\mathrm{Est}_T=\{\mathbf{T};\operatorname{div}\mathbf{T}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad \forall\mathbf{x}\in\mathscr{B},\ \mathbf{Tn}=\mathbf{a} \quad \forall\mathbf{x}\in\partial\mathscr{B}_a\}. \quad (5.268)$$

Recordando, Est_T está formado por todos los campos de tensiones que satisfacen el equilibrio mecánico. A partir de este conjunto surge fácilmente la definición del espacio de campos de tensiones autoequilibrados

$$\mathrm{Var}_T=\{\hat{\mathbf{T}}\in\mathscr{W}';-(\hat{\mathbf{T}},\mathscr{D}\hat{\mathbf{v}})=0 \quad \forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathrm{Var}_v\}, \quad (5.269)$$

o en forma fuerte

$$\mathrm{Var}_T=\{\hat{\mathbf{T}};\operatorname{div}\hat{\mathbf{T}}=\mathbf{0} \quad \forall\mathbf{x}\in\mathscr{B},\ \hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}=\mathbf{0} \quad \forall\mathbf{x}\in\partial\mathscr{B}_a\}, \quad (5.270)$$

es decir, $\hat{\mathbf{T}}$ es un campo de tensiones en equilibrio con el sistema de cargas nulo ($\mathbf{b}=\mathbf{0}$ y $\mathbf{a}=\mathbf{0}$). Es más, de la linealidad de las ecuaciones de equilibrio se sigue que, dados $\mathbf{T}_1,\mathbf{T}_2\in\mathrm{Est}_T$ arbitrarios, su diferencia $\mathbf{T}_1-\mathbf{T}_2\in\mathrm{Var}_T$, es decir es un campo de tensiones autoequilibrado.

De la definición del problema de la fluencia secundaria, vemos que su solución, en término de tensiones, deberá estar dada por un campo $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$ tal que la tasa de deformación asociada a este estado a través de la ecuación constitutiva sea compatible es decir, sea el gradiente simétrico de un campo de velocidades cinemáticamente admisible. Luego, nuestro problema consistirá ahora en determinar el campo de tensiones que tenga todas estas características. La siguiente formulación variacional (llamada dual), y que no es otra cosa que el Principio de la Potencia Virtual Complementaria (PPVC) aplicado a materiales que experimentan fluencia (ver Capítulo 3), permite caracterizar este campo: determinar $\mathbf{T} \in \mathrm{Est}_T$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{D} \cdot (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) dV = \int_{\partial \mathscr{B}_v} (\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS \quad \forall \mathbf{T}^* \in \mathrm{Est}_T, \tag{5.271}$$

y donde $\mathbf{D} = h(\mathbf{T})$, es decir está asociada a $\mathbf{T}$ a través de la ecuación constitutiva.

Nuevamente, si admitimos la existencia de la función potencial complementaria $\phi = \phi(\mathbf{T})$ tal que

$$\mathbf{D} = \phi_{\mathbf{T}} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{T}}. \tag{5.272}$$

Recordando la propiedad (5.258) de la función g (ver también Lema 5.1), si tomamos $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_1 + d\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}$ se tiene

$$d\mathbf{T} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.273}$$

y para todo proceso que pasa del estado de tensiones $\mathbf{T}_1$ al $\mathbf{T}_2$ resulta

$$\int_{\mathbf{T}_1}^{\mathbf{T}_2} d\mathbf{T} \cdot (\mathbf{D} - \mathbf{D}_1) \geq 0, \tag{5.274}$$

que corresponde a

$$\int_{\mathbf{T}_1}^{\mathbf{T}_2} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{T} - \mathbf{D}_1 \cdot (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) \geq 0, \tag{5.275}$$

y su equivalente

$$\int_{\mathbf{T}_1}^{\mathbf{T}_2} \phi_{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{T} - \phi_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_1) \cdot (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1) \geq 0, \tag{5.276}$$

de donde

$$\phi(\mathbf{T}_2) - \phi(\mathbf{T}_1) \geq \phi_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_1) \cdot (\mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1), \tag{5.277}$$

que nos dice que ϕ es un potencial también convexo.

Substituyendo este resultado en la formulación variacional (5.271) obtenemos

$$\Pi^*(\mathbf{T}^*) = \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}^*) dV - \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}^* \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS \geq \Pi^*(\mathbf{T}) \quad \forall \mathbf{T}^* \in \mathrm{Est}_T. \tag{5.278}$$

Tenemos así que el problema de la fluencia estacionaria corresponde al siguiente problema variacional de mínimo: determinar $\mathbf{T}_0 \in \mathrm{Est}_T$ tal que haga mínimo el funcional

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}) dV - \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS. \tag{5.279}$$

Al igual que realizado en el Capítulo 4, no resulta difícil mostrar que estos los principios de mínimo dados por (5.266) y (5.279) (PPV y PPVC, respectivamente) pueden relacionarse a través de una única desigualdad. En efecto, designemos con

- $\mathbf{v}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{T}$ las soluciones del problema de la fluencia estacionaria y por lo tanto soluciones de los problemas variacionales de mínimo.
- $\mathbf{v}_k, \mathbf{D}_k$ (donde $\mathbf{D}_k = \nabla^s \mathbf{v}_k$), respectivamente, los campos de velocidades y tasas de deformación cinemáticamente admisibles.
- $\mathbf{T}_s, \mathbf{D}_s$ (donde $\mathbf{D}_s = \phi_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_s)$), respectivamente, los campos de tensión estáticamente admisibles y campos de tasas de deformación correspondientes a los campos $\mathbf{T}_s$ via ecuación constitutiva.

Luego, el principio de mínimo en velocidades establece que para todo $\mathbf{v}_k \in \mathrm{Kin}_v$ se verifica que

$$\Pi(\mathbf{v}_k) = \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_k dV - \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_k dS \geq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}) dV - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dS = \Pi(\mathbf{v}). \tag{5.280}$$

Por su parte, recordando que

$$\psi(\mathbf{D}) + \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}. \tag{5.281}$$

toda vez que $\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}$ están asociados a través de la ecuación constitutiva, tenemos

$$\int_B \psi(\mathbf{D}) dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV - \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}) dV = \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS + \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV - \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}) dV, \tag{5.282}$$

que, substituida en la desigualdad anterior (5.280), conduce a

$$\Pi(\mathbf{v}_k) \geq \Pi(\mathbf{v}) = -\int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}) dV + \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS = -\Pi^*(\mathbf{T}) \geq -\Pi^*(\mathbf{T}_s). \tag{5.283}$$

Luego, a partir de cantidades conocidas es posible acotar superior e inferiormente el valor $\Pi(\mathbf{v}) = -\Pi^*(\mathbf{T})$.

Para ciertos tipos de cargas y condiciones de contorno, el resultado anterior permite deducir cotas para el potencial de disipación $\int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}) dV$ y para el potencial complementario de disipación $\int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}) dV$. En efecto, consideremos los siguientes casos.

i) Considere que las cargas de cuerpo son nulas, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ en $\mathscr{B}$, y que la condición de contorno cinemática es nula también, $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ en $\partial \mathscr{B}_v$. Para este caso el resultado

(5.283) conduce a

$$-\int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k)dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_k dS \leq \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T})dV \leq \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s)dV \qquad (5.284)$$

para todos los campos $\mathbf{v}_k$ cinemáticamente admisibles que satisfacen la restricción $\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ en $\partial\mathscr{B}_v$ y para todos los campos $\mathbf{T}_s$ de tensiones en equilibrio con el sistema de cargas $(\mathbf{0},\mathbf{a})$. Dado que el campo $\mathbf{v}_k$ satisface restricciones de tipo homogéneo en el contorno $\partial\mathscr{B}_v$, se tendrá que el campo $\lambda\mathbf{v}_k$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, también satisface esta restricción cinemática independientemente del número real λ.
Luego, definido un elemento $\mathbf{v}_k$ (una dirección de acción de movimiento), podemos obtener para esa dirección una cota inferior "óptima" para el potencial de disipación a través del siguiente proceso de maximización, sin restricción, en la variable λ dado por

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\{ \lambda \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_k dS - \int_{\mathscr{B}} \psi(\lambda\mathbf{D}_k)dV \right\} \leq \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T})dV. \qquad (5.285)$$

ii) Considere ahora que las cargas de cuerpo y las de superficie son nulas, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ en $\mathscr{B}$ y $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ en $\partial\mathscr{B}_a$. Para este caso el resultado (5.283) nos conduce a

$$-\int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s)dV + \int_{\partial\mathscr{B}_v} \mathbf{T}_s\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{v}} dS \leq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D})dV \leq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k)dV, \qquad (5.286)$$

para todos los campos $\mathbf{T}_s$ de tensiones en equilibrio con las cargas nulas y para todos los campos $\mathbf{v}_k$ cinemáticamente admisibles.
Nuevamente, dadas las propiedades de $\mathbf{T}_s$ se sigue que $\lambda\mathbf{T}_s$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ también estará en equilibrio con el sistema de cargas nulas. Luego, definido el elemento $\mathbf{T}_s$ (una dirección de tensión), podemos obtener para esa dirección una cota superior "óptima" para el potencial complementario de disipación, a través del siguiente proceso de maximización, sin restricción, en la variable λ dado por

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}} \left\{ \lambda \int_{\partial\mathscr{B}_v} \mathbf{T}_s\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{v}} dS - \int_{\mathscr{B}} \phi(\lambda\mathbf{T}_s)dV \right\} \leq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D})dV. \qquad (5.287)$$

5.10 Método de la Velocidad y Fuerza Ficticia. Teoremas de Castigliano

En esta sección vamos a suponer por simplicidad que la carga de cuerpo $\mathbf{b}$ es nula y la carga de superficie $\mathbf{a}$ es una carga *uni-paramétrica*. Lo anterior equivale a decir que existe un parámetro Q, llamado *carga generalizada*, y un campo vectorial $\mathbf{l}_a$, que caracteriza el *padrón de distribución de carga superficial*, tal que

$$\mathbf{a} = Q\mathbf{l}_a \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a. \tag{5.288}$$

Substituyendo esto en el Principio de la Potencia Virtual (5.226) tenemos

$$\int_{\mathscr{B}} g(\nabla^s \mathbf{v})\nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{v}} dV = Q \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{l}_a \cdot \hat{\mathbf{v}} dS = Q\hat{q} \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{5.289}$$

donde $\hat{q}$ es llamado *velocidad generalizada*.

Como lo anterior debe satisfacerse para todo $\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$, en particular lo será para un $\hat{\mathbf{v}}_1$ tal que

$$\hat{q} = \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{l}_a \cdot \hat{\mathbf{v}}_1 dS = 1, \tag{5.290}$$

con lo que obtenemos

$$Q = \int_{\mathscr{B}} g(\nabla^s \mathbf{v})\nabla^s \mathbf{v} \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{v}}_1 dV. \tag{5.291}$$

Vemos así que, dado el campo de velocidades $\mathbf{v}$ y el campo virtual $\hat{\mathbf{v}}_1$ (asociado a una velocidad generalizada unitaria), podemos calcular la fuerza generalizada Q que lo produce. Esto es conocido en la literatura con el nombre de *Método de la Velocidad Ficticia*.

Un resultado similar, que nos permitirá calcular la velocidad generalizada, podemos obtener partiendo del Principio de la Potencia Virtual Complementaria (5.271). En efecto, si suponemos ahora que $\overline{\mathbf{v}} = q\mathbf{l}_v$, tenemos

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{D}(\mathbf{T}) \cdot \hat{\mathbf{T}} dV = \hat{Q}q \quad \forall \hat{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T, \tag{5.292}$$

donde

$$\hat{Q} = \int_{\partial\mathscr{B}_v} \hat{\mathbf{T}}\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_v dS. \tag{5.293}$$

Luego, adoptando un campo de tensiones autoequilibrado $\hat{\mathbf{T}}_1$ tal que

$$\hat{Q} = \int_{\partial\mathscr{B}_v} \hat{\mathbf{T}}_1\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_v dS = 1, \tag{5.294}$$

obtenemos

$$q = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{D}(\mathbf{T}) \cdot \hat{\mathbf{T}}_1 dV. \tag{5.295}$$

Esta expresión nos permite calcular el campo de velocidades q en la dirección $\mathbf{l}_v$ producido por el estado de tensiones $\mathbf{T}$ a partir del conocimiento de un estado de tensiones autoequilibrado convenientemente elegido. El procedimiento anterior es conocido con el nombre de *Método de la Fuerza Ficticia*.

Si admitimos ahora la existencia de los potenciales de disipación los principios de mínimo nos conducirán a resultados similares a los ya alcanzados. Así, para la carga generalizada Q el principio de mínimo (5.266) consistirá en determinar $\mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v$ tal que

$$\Pi(\mathbf{v}) = \min_{\mathbf{v}^* \in \mathrm{Kin}_v} \int_{\mathscr{B}} \psi(\nabla^s \mathbf{v}^*) dV - Qq^*, \tag{5.296}$$

donde

$$q^* = \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{l}_a \cdot \mathbf{v}^* dS, \tag{5.297}$$

es la velocidad generalizada asociada a la carga Q.

Si suponemos ahora que $\mathbf{D}^* = \nabla^s \mathbf{v}^*$ puede escribirse en función de q^*, tenemos

$$\Pi(\mathbf{v}) = \min_{q^* \in \mathbb{R}} \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}^*(q^*)) dV - Qq^*, \tag{5.298}$$

y la condición de mínimo implica en

$$\frac{\partial}{\partial q} \int_{\mathscr{B}} \psi dV = Q, \tag{5.299}$$

que no es otra cosa que la expresión del primer Teorema de Castigliano.

Teorema 5.1 Primer Teorema de Castigliano. *Si el potencial $\int_{\mathscr{B}} \psi dV$ es escrito en función de la velocidad generalizada q, su derivada respecto a esta velocidad es igual a la carga generalizada a ella asociada.*

Demostración. Ver los desarrollos anteriores al enunciado del teorema. ■

Si pensamos ahora en el principio de mínimo en función del campo de tensiones (5.279) tendremos que el problema consistirá en determinar $\mathbf{T} \in \text{Est}_T$ tal que

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \min_{\mathbf{T}^* \in \text{Est}_T} \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}^*) dV - Q^* q, \tag{5.300}$$

donde ahora $Q^* = \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}^* \mathbf{n} \cdot \mathbf{l}_v dS$. Si admitimos la posibilidad de expresar $\mathbf{T}^*$ en función del escalar Q^* tendremos

$$\Pi^*(\mathbf{T}^*) = \min_{Q^* \in \mathbb{R}} \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}^*(Q^*)) dV - Q^* q, \tag{5.301}$$

y la condición de mínimo nos conduce a

$$\frac{\partial}{\partial Q^*} \int_{\mathscr{B}} \phi dV = q, \tag{5.302}$$

que corresponde al segundo Teorema de Castigliano.

Teorema 5.2 Segundo Teorema de Castigliano. *Si el potencial complementario $\int_{\mathscr{B}} \phi dV$ es escrito en función de la carga generalizada Q, su derivada respecto a esta carga es igual a la velocidad generalizada a ella asociada.*

Demostración. Ver los desarrollos anteriores al enunciado del teorema. ■

En esta sección hemos presentado distintas técnicas para calcular la carga generalizada Q o su velocidad generalizada q. La elección de uno o otro método dependerá fundamentalmente de la familiaridad de la persona con el método, ya que todos son equivalentes desde el punto de vista del cálculo.

5.11 Cotas para las Velocidades y Fuerzas Generalizadas

En esta sección vamos a particularizar algunos de los resultados ya obtenidos en secciones anteriores al caso de ecuaciones constitutivas tipo Norton. Para estas ecuaciones los potenciales de disipación toman la forma

$$\psi(\mathbf{D}) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\left(\frac{2}{3}\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}\right)^{\frac{n+1}{2n}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{n}}(D_e)^{\frac{n+1}{n}}, \tag{5.303}$$

$$\phi(\mathbf{T}) = \frac{k}{n+1}\left(\frac{3}{2}\mathbb{C}\mathbf{T}\cdot\mathbb{C}\mathbf{T}\right)^{\frac{n+1}{2}} = \frac{k}{n+1}T_e^{n+1}. \tag{5.304}$$

Recordando también que

$$D_e = kT_e^n, \tag{5.305}$$

tenemos también

$$\psi(\mathbf{D}) = n\phi(\mathbf{T}), \tag{5.306}$$

y como

$$\psi(\mathbf{D}) + \phi(\mathbf{T}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D}, \tag{5.307}$$

se sigue que

$$\phi(\mathbf{T}) = \frac{1}{n+1}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D} \qquad \psi(\mathbf{D}) = \frac{n}{n+1}\mathbf{T}\cdot\mathbf{D}. \tag{5.308}$$

A su vez $\mathbb{C}$ es el tensor de cuarto orden que actuando sobre todo tensor de segundo orden nos proporciona su componente desviadora. Es decir

$$\mathbb{C}\mathbf{T} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\mathbf{I} = \mathbf{S}. \tag{5.309}$$

De estas expresiones se sigue que ψ y ϕ son funciones homogêneas de grado $(n+1)/n$ y $n+1$ respectivamente

$$\psi(\lambda\mathbf{D}) = \lambda^{(n+1)/n}\psi(\mathbf{D}), \tag{5.310}$$

$$\phi(\lambda\mathbf{T}) = \lambda^{n+1}\phi(\mathbf{T}). \tag{5.311}$$

Este resultado es importante ya que nos permite obtener las cotas óptimas. Tenemos así los siguientes casos.

i) Considere cargas de cuerpo nula, $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, y condición de contorno cinemática $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$. Según vimos, dada la "dirección" $\mathbf{v}_k$ la cota inferior óptima para $\int_{\mathscr{B}}\phi(\mathbf{T})dV$, está dada por la solución del problema (5.285). Dada la (5.310), tenemos

$$\max_{\lambda\in\mathbb{R}}\left(\lambda\int_{\partial\mathscr{B}_a}\mathbf{a}\cdot\mathbf{v}_k dS - \lambda^{(n+1)/n}\int_{\mathscr{B}}\psi(\mathbf{D}_k)dV\right) \leq \int_{\mathscr{B}}\phi(\mathbf{T})dV \leq \int_{\mathscr{B}}\phi(\mathbf{T}_s)dV. \tag{5.312}$$

De donde concluimos que la solución $\lambda_{\max}$ estará dada por

$$\lambda_{\max} = \left(\frac{n}{n+1} \frac{\int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_k dS}{\int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV} \right)^n . \tag{5.313}$$

Con este resultado podemos ahora calcular la cota inferior óptima

$$\lambda_{\max} \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_k dS - \lambda_{\max}^{(n+1)/n} \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV, \tag{5.314}$$

de donde

$$\lambda_{\max} \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v}_k dS \leq (n+1) \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}) dV \leq (n+1) \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV. \tag{5.315}$$

Por otra parte si $\mathbf{v}_k$ coincide con el campo $\mathbf{v}$, solución del problema, tendremos que $\lambda_{\max} = 1$ por lo que

$$\int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} dS \leq (n+1) \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV. \tag{5.316}$$

Si ahora suponemos que la carga superficial aplicada está asociada a la carga generalizada Q tendremos finalmente

$$Qq \leq (n+1) \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV, \tag{5.317}$$

de donde

$$q \leq \frac{1}{Q}(n+1) \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV, \tag{5.318}$$

con lo que obtenemos una cota superior para la velocidad generalizada asociada a Q a partir del conocimiento de los campos de tensiones $\mathbf{T}_s$ equilibrados con la carga Q.

ii) Considere cargas de cuerpo y de superficie nulas, esto es $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. De una manera similar a la presentada arriba, es posible obtener para este caso una cota superior para la carga generalizada. En efecto, para la ecuación constitutiva adoptada, tenemos que, el problema (5.287) particularizado con la propiedad (5.311), la cota inferior óptima de $\int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}) dV$ en la "dirección" de $\mathbf{T}_s \in \mathrm{Est}_T$ estará dada por

$$\max_{\lambda \in \mathbb{R}} \left(\lambda \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}_s \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} dS - \lambda^{n+1} \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV \right) \leq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV, \tag{5.319}$$

de donde obtenemos que el valor de $\lambda_{\max}$ que permite obtener la mayor cota inferior estará dado por

$$\lambda_{\max} = \left(\frac{1}{n+1} \frac{\displaystyle\int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}_s \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS}{\displaystyle\int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV} \right)^{1/n} . \tag{5.320}$$

Luego

$$\lambda_{\max} \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}_s \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS - \lambda_{\max}^{n+1} \int_{\mathscr{B}} \phi(\mathbf{T}_s) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV, \tag{5.321}$$

de donde

$$\lambda_{\max} \int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T}_s \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS \leq \frac{n+1}{n} \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}) dV \leq \frac{n+1}{n} \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV. \tag{5.322}$$

Por otra parte, si $\mathbf{T}_s$ coincide con el campo $\mathbf{T}$ solución del problema, tendremos que $\lambda_{\max} = 1$ por lo que

$$\int_{\partial \mathscr{B}_v} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}} dS \leq \frac{n+1}{n} \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV. \tag{5.323}$$

Suponiendo que $\overline{\mathbf{v}}$ puede expresarse a través de la velocidad generalizada q tendremos finalmente

$$Qq \leq \frac{n+1}{n} \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV, \tag{5.324}$$

de donde

$$Q \leq \frac{1}{q} \frac{n+1}{n} \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}_k) dV, \tag{5.325}$$

es la cota superior para la carga generalizada asociada a la velocidad generalizada prescripta q, y donde $\mathbf{v}_k \in \mathrm{Kin}_v$ es compatible con la velocidad generalizada q.

Hasta aquí hemos presentado una manera de obtener cotas para las velocidades y cargas generalizadas. Ahora, vamos a presentar una manera para obtener cotas para la velocidad generalizada en un punto cualquiera de la structura. Este tipo de estimativa es conocida con el nombre de *estimativa de Martin* (J. B. Martin [180], ver también el libro de J. T. Boyle y J. Spence [39]).

Para ello, recordemos que de la convexidad de los potenciales de fluencia obteníamos

$$\psi(\mathbf{D}_1) + \phi(\mathbf{T}_2) \geq \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{T}_2, \tag{5.326}$$

y donde la igualdad se verifica si y sólo si $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{T}_2$ están asociados a través de la ecuación constitutiva.

Llamando con $\mathbf{T}_1$ y $\mathbf{D}_1$ el estado de tensión y la tasa de deformación asociados respectivamente a través de la ecuación constitutiva con $\mathbf{D}_1$ y $\mathbf{T}_1$, tenemos

$$\psi(\mathbf{D}_1) = \frac{n}{n+1}\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{D}_1, \tag{5.327}$$

$$\phi(\mathbf{T}_2) = \frac{1}{n+1}\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{D}_2, \tag{5.328}$$

que substituidas en la desigualdad (5.326) conducen a

$$\frac{n}{n+1}\mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{D}_1 + \frac{1}{n+1}\mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{D}_2 \geq \mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{T}_2. \tag{5.329}$$

Si ahora identificamos $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{D}_1$ con la solución del problema de fluencia $\mathbf{T}$, $\mathbf{D}$ para condiciones de contorno $\mathbf{a}$ en $\partial\mathscr{B}_a$ y $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ en $\partial\mathscr{B}_v$; y $\mathbf{T}_2$, $\mathbf{D}_2$ con la solución $\mathbf{T}^*$, $\mathbf{D}^*$ para otra condición de carga $\mathbf{a}^*$ (por el momento digamos que es arbitraria) y suponiendo fuerzas de cuerpo $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ en $\mathscr{B}$, se tiene lo siguiente

$$\frac{1}{n+1}\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^* dV \geq \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D} dV - \frac{n}{n+1}\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{D} dV = \int_{\partial\mathscr{B}_a} \left(\mathbf{a}^* - \frac{n}{n+1}\mathbf{a}\right) \cdot \mathbf{v} dV. \tag{5.330}$$

Este resultado nos permite obtener la estimativa para la velocidad en un punto $\mathbf{x}$ del componente. En efecto, si ahora adoptamos $\mathbf{a}^*$ como

$$\mathbf{a}^* = \frac{n}{n+1}\mathbf{a} + Q^*\mathbf{l}_{a_x}, \tag{5.331}$$

donde $Q^*\mathbf{l}_{a_x}$ es una fuerza concentrada en el punto $\mathbf{x}$ en la dirección según la cual queremos acotar la velocidad generalizada, la desigualdad (5.330) nos conduce a

$$\frac{1}{n+1}\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^* dV \geq \int_{\partial\mathscr{B}_a} Q^*\mathbf{l}_{a_x} \cdot \mathbf{v} dS = Q^* q, \tag{5.332}$$

de donde

$$q \leq \frac{1}{Q^*}\frac{1}{n+1}\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^* dV. \tag{5.333}$$

Como en el segundo miembro de la desigualdad los campos $\mathbf{T}^*$ y $\mathbf{D}^*$ dependen de Q^*, podemos optimizar la cota superior obteniendo finalmente

$$q \leq \min_{Q^* \in \mathbb{R}} \frac{1}{Q^*}\frac{1}{n+1}\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^* dV. \tag{5.334}$$

5.12 Ejemplos de Aplicación

5.12.1 Disco Girando a Velocidad Constante

En este ejemplo vamos a presentar, dentro de un enfoque puramente variacional, el análisis de un problema mecánico que consiste en un disco hueco girando a velocidad constante w sin tensiones en el contorno, o sea

$$T_r(r_i) = 0, \tag{5.335}$$
$$T_r(r_e) = 0, \tag{5.336}$$

donde r_i es el radio interno y r_e es el radio externo.

En coordenadas cilíndricas, la cinemática del movimiento quedará definida si conocemos los campos de velocidades $\dot{u}_r$, $\dot{u}_\theta$ y $\dot{u}_z$, y dada la simetría, tendremos $\dot{u}_\theta = 0$. A su vez, la tasa de deformación está caracterizada por

$$D_r = \frac{d\dot{u}_r}{dr},\ D_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r},\ D_z = \frac{d\dot{u}_z}{dz} \tag{5.337}$$

y, por dualidad, tendremos las tensiones T_r, T_θ y T_z. Supondremos también que nuestro modelo corresponde a un estado plano de tensiones, luego $T_z = 0$. A su vez, vamos a suponer que el material tiene un comportamiento que se expresa a través de la ecuación constitutiva de Tresca-Norton. Esta ecuación constitutiva está definida por una función potencial regular por partes. Ahora bien, para el problema que estamos estudiando no precisamos conocer toda la función potencial, ya que sólo una parte de ella es la que interesa. En efecto, para el ejemplo que nos ocupa la distribución de tensiones será tal que

$$T_\theta > T_r \geq T_z = 0 \quad \text{para } r \in [r_i, r_e]. \tag{5.338}$$

En base a lo anterior, la mayor diferencia entre las tensiones principales estará dada por

$$T_\theta - T_z = T_\theta. \tag{5.339}$$

Luego, la parte (regular) de la ecucación constitutiva de Tresca-Norton que nos interesa corresponde a

$$\phi(\mathbf{T}) = \frac{B}{n+1}(T_\theta - T_z)^{n+1} = \frac{B}{n+1}T_\theta^{n+1} \tag{5.340}$$

de donde

$$D_\theta = \phi_{T_\theta} = BT_\theta^n, \tag{5.341}$$
$$D_r = \phi_{T_r} = 0, \tag{5.342}$$
$$D_z = \phi_{T_z} = -BT_\theta^n, \tag{5.343}$$

donde B y n son constantes que dependen del material y, como era de esperar, se debe verificar la incompresibilidad

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{D} = D_r + D_\theta + D_z = 0. \tag{5.344}$$

Dado que estamos interesados en aplicar el principio variacional de mínimo en función del campo de velocidades (ver expresión (5.266)), debemos proceder a calcular $\psi(\mathbf{D})$. Para ello, usando la (5.341), tenemos

$$\psi(\mathbf{D}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{D} - \phi(\mathbf{T}) = T_\theta D_\theta - \frac{B}{n+1}T_\theta^{n+1} = \frac{1}{B^{1/n}}\frac{n}{n+1}D_\theta^{1+1/n}. \tag{5.345}$$

El lector debe observar que la cinemática que estamos imponiendo al disco implica que todas las acciones de movimiento del cuerpo sean tales que

$$D_r = \frac{d\dot{u}_r}{dr} = 0. \tag{5.346}$$

De esta manera, el esfuerzo interno que surge como reacción a esta restricción cinemática, no podrá ser evaluado, ya que su potencia siempre será nula. Luego T_r sólo podrá calcularse por equilibrio una vez calculada la solución del PPV en el espacio de acciones de movimiento admisibles. Conocida esta solución, las otras tensiones podrán calcularse a través de la ecuación constitutiva, en particular

$$T_z = 0 \qquad T_\theta = \frac{1}{B^{1/n}}D_\theta^{1/n}. \tag{5.347}$$

Con todos estos elementos, podemos plantear el problema variacional que modela el comportamiento de un disco hueco girando a velocidad w. El problema consistirá en: determinar $\dot{u}_r \in \mathrm{Kin}_v$ tal que minimice el siguiente funcional

$$\Pi(u_r) = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\frac{n}{n+1}\frac{1}{B^{1/n}}D_\theta^{1+1/n}r\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\rho w^2 r^2\dot{u}_r\,dr\,d\theta, \tag{5.348}$$

donde $D_\theta = \dot{u}_r/r$ y el conjunto (espacio) Kin_v está caracterizado por

$$\mathrm{Kin}_v = \left\{\dot{u}_r;\, D_r = \frac{d\dot{u}_r}{dr} = 0 \text{ para } r \in (r_i, r_e)\right\}. \tag{5.349}$$

En base a lo anterior se tiene que $\dot{u}_r$ es una constante, es decir Kin_v está formado por todos los campos $\dot{u}_r$ constantes. En otras palavras, $\mathrm{Kin}_v = \mathbb{R}$, y el problema variacional consistirá ahora en: determinar $C_1 \in \mathbb{R}$ tal que minimice la siguiente función

$$\Pi(C_1) = \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} \frac{n}{n+1}\frac{1}{B^{1/n}}\left(\frac{C_1}{r}\right)^{1+1/n} r\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e} \rho w^2 r^2 C_1\,dr\,d\theta = 2\pi\left[\frac{n^2}{n^2-1}\frac{1}{B^{1/n}}C_1^{1+1/n}(r_e^\alpha - r_i^\alpha) - \rho w^2 C_1 (r_e^3 - r_i^3)/3\right] \quad (5.350)$$

donde $\alpha = 1 - 1/n$. La condición necesaria (y suficiente) de mínimo será entonces

$$\frac{\partial \Pi}{\partial C_1} = \frac{1}{B^{1/n}}\frac{n}{n-1}C_1^{1/n}(r_e^\alpha - r_i^\alpha) - \rho w^2 \frac{(r_e^3 - r_i^3)}{3} = 0, \quad (5.351)$$

de donde obtemos el campo $\dot{u}_r$ solución del problema

$$\dot{u}_r = C_1 = B\left[\frac{n-1}{3n}\rho w^2 \frac{(r_e^3 - r_i^3)}{(r_e^\alpha - r_i^\alpha)}\right]^n. \quad (5.352)$$

Conocido $\dot{u}_r$ y utilizando la ecuación cinemática obtenemos

$$D_\theta = \frac{\dot{u}_r}{r} = \frac{C_1}{r}, \quad (5.353)$$

y de la incompresibilidad sigue que

$$D_z = -D_\theta. \quad (5.354)$$

Con estos resultados y la ecuación constitutiva tenemos las tensiones

$$T_\theta = \frac{1}{B^{1/n}}D_\theta^{1/n} = \left(\frac{C_1}{Br}\right)^{1/n} = \frac{1}{r^{1/n}}\left[\frac{n-1}{3n}\rho w^2 \frac{(r_e^3 - r_i^3)}{(r_e^\alpha - r_i^\alpha)}\right]. \quad (5.355)$$

Para calcular T_r (variable dual asociada a la restricción cinemática $D_r = 0$) recurrimos al PPV (que nos proporciona el equilibrio)

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}(T_\theta \hat{D}_\theta + T_r \hat{D}_r) r\,dr\,d\theta - \int_0^{2\pi}\int_{r_i}^{r_e}\rho w^2 r^2 \hat{u}_r\,dr\,d\theta = 0 \quad \forall \hat{u}_r \in \mathscr{V}, \quad (5.356)$$

donde $\mathscr{V}$ ahora es el espacio de todas las acciones de movimiento virtual donde las restricciones cinemáticas impuestas al problema no precisan ser satisfechas y donde $\hat{D}_\theta = \frac{\hat{u}_r}{r}$, y $\hat{D}_r = \frac{d\hat{u}_r}{dr}$, y donde el estado de tensiones T_θ es el estado de tensiones solución del problema original, el cual está dado por la expresión (5.355). Como el problema es independiente de la variable θ, la definición anterior del equilibrio equivale a la siguiente ecuación variacional

$$\int_{r_i}^{r_e}\left(T_\theta \hat{u}_r + r T_r \frac{d\hat{u}_r}{dr} - \rho w^2 r^2 \hat{u}_r\right) dr = 0 \quad \forall \hat{u}_r \in \mathscr{V}, \quad (5.357)$$

que en forma local corresponde a

$$T_\theta - \frac{d}{dr}(rT_r) - \rho w^2 r^2 = 0 \quad \text{en } (r_i, r_e), \tag{5.358}$$

$$T_r = 0 \quad \text{en } r = r_i, \tag{5.359}$$

$$T_r = 0 \quad \text{en } r = r_e, \tag{5.360}$$

y donde recuerde que T_θ es la función conocida dada por la (5.355). Integrando tenemos

$$T_r = \frac{1}{r}\int T_\theta dr - \rho w^2 \frac{r^3}{3} + \frac{C_2}{r} = \rho w^2 \frac{1}{3}\frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^\alpha - r_i^\alpha} r^{-1/n} - \frac{1}{3}\rho w^2 r^2 + \frac{C_2}{r}, \tag{5.361}$$

y de las condiciones de contorno (5.335) y (5.336) se llega a

$$\frac{1}{3}\rho w^2 \left[\frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^\alpha - r_i^\alpha} r_i^{-1/n} - r_i^2\right] + \frac{C_2}{r_i} = 0, \tag{5.362}$$

$$\frac{1}{3}\rho w^2 \left[\frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^\alpha - r_i^\alpha} r_e^{-1/n} - r_e^2\right] + \frac{C_2}{r_e} = 0. \tag{5.363}$$

Multiplicando la primera de las expresiones anteriores por r_i y la segunda por r_e y sumando miembro a miembro, obtenemos

$$\frac{1}{3}\rho w^2 \left[\frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^\alpha - r_i^\alpha}(r_i^\alpha + r_e^\alpha) - (r_i^3 + r_e^3)\right] + 2C_2 = 0, \tag{5.364}$$

de donde

$$C_2 = \frac{1}{3}\rho w^2 \frac{r_i^3 r_e^\alpha - r_e^3 r_i^\alpha}{r_e^\alpha - r_i^\alpha}. \tag{5.365}$$

Substituyendo este resultado en la (5.361) tenemos finalmente

$$T_r = \frac{1}{6}\frac{\rho w^2}{r}\left[\frac{r_e^3 - r_i^3}{r_e^\alpha - r_i^\alpha}(r^\alpha - r_i^\alpha) - (r^3 - r_i^3)\right], \tag{5.366}$$

con lo que queda resuelto el problema.

En la Figura 5.21 hemos representado la distribución de tensiones T_θ y T_r para un disco hueco de radio interno $r_i = 1.25$ in y radio externo $r_e = 6$ in, que gira a una velocidad constante $w = 15.000$ rpm con masa específica $\rho = 7.35 \times 10^{-4}$ lb seg^2, y para el exponente n hemos tomado $n = 1$ (distribución de tensiones elásticas), y también $n = 4, 6, 9$. El lector podrá observar que a medida que n crece la distribución de tensiones converge a la distribución de tensiones correspondiente a un material plástico ideal tipo Tresca.

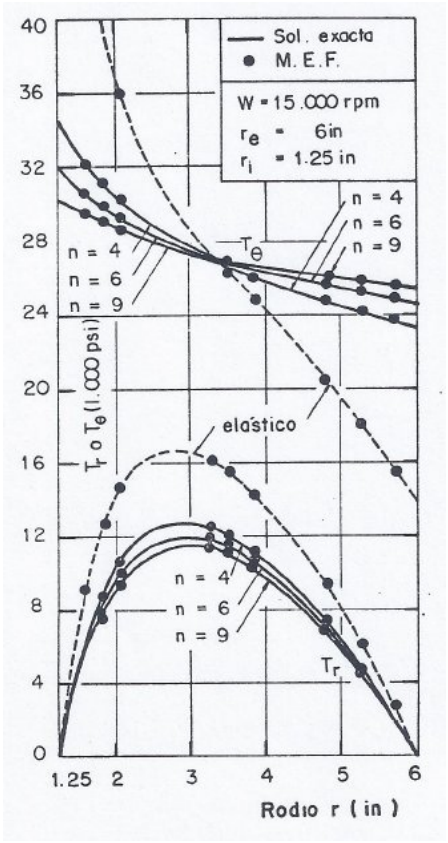


Fig. 5.21 Tensiones T_θ y T_r para un disco hueco de radio interno $r_i = 1.25$ in y radio externo $r_e = 6$ in, que gira a una velocidad constante $w = 15.000$ rpm con masa específica $\rho = 7.35 \times 10^{-4}$ lb seg^2, y para exponentes $n = 1, 4, 6, 9$.

5.12.2 Viga Empotrada con Carga Uniforme

En este ejemplo vamos a mostrar la aplicación de lo que hemos llamado *estimativa de Martin*. Para ello, tomemos un problema simple como el correspondiente a la viga empotrada en un extremo y sujeta a carga uniforme p. La longitud de la viga la designaremos con L y la ecuación constitutiva será de tipo generalizado

$$\chi = B_n M^n, \tag{5.367}$$

donde χ es la tasa de cambio de curvatura, M es el momento flector en la sección transversal de la viga y donde la ecuación cinemática está dada por

$$\chi = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \tag{5.368}$$

siendo w la velocidad transversal de un punto sobre el eje de la viga.

La solución de este problema haciendo uso del principio de mínimo (en velocidades) puede verse en Boyle-Spence [39] y corresponde a

$$w = -B_n(p/2)^n\left(\frac{L^{2n+1}}{2n+1} + \frac{(L-x)^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{L^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right). \tag{5.369}$$

Luego, la deflexión máxima ocurre en $x = L$ y vale

$$q = -w(L) = B_n(p/2)^n\frac{L^{2n+2}}{2n+2}, \tag{5.370}$$

y que para $n = 1$ conduce a

$$q_1 = \frac{B_n p L^4}{8}. \tag{5.371}$$

En lo que sigue aplicaremos el procedimiento de Martin para obtener cotas superiores para q. Para ello, de la ecuación constitutiva se tiene

$$\chi M = B_n M^{n+1} = (1/B_n)^{1/n}\chi^{1+1/n}, \tag{5.372}$$

$$\phi(M) = \frac{1}{n+1}B_n M^{n+1}, \tag{5.373}$$

$$\psi(\chi) = \frac{n}{n+1}B_n M^{n+1} = \frac{n}{n+1}(1/B_n)^{1/n}\chi^{1+1/n}. \tag{5.374}$$

A su vez, según vimos en la Sección 5.11 (ver expresión (5.330), tenemos

$$\frac{1}{n+1}\int_0^L \chi^* M^* dx \geq \int_0^L M^*\chi dx - \frac{n}{n+1}\int_0^L M\chi dx, \tag{5.375}$$

donde χ y M son solución del problema planteado y χ^*, M^* corresponde a la solución de la viga pero para otro tipo de carga que más adelante será convenientemente seleccionada.

Substituyendo la (5.368) en el segundo miembro de la (5.375), e integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{n+1}\int_0^L \chi^* M^* dx &\geq -M^*\frac{dw}{dx}\bigg|_0^L + \frac{dM^*}{dx}w\bigg|_0^L + \frac{n}{n+1}M\frac{dw}{dx}\bigg|_0^L - \frac{dM}{dx}w\bigg|_0^L \\ &+ \int_0^L\left(\frac{n}{n+1}p - p^*\right)dx = \frac{dM^*}{dx}w\bigg|_L + \int_0^L\left(\frac{n}{n+1}p - p^*\right)dx.\end{aligned} \tag{5.376}$$

Luego, si queremos acotar w en $x = L$ bastará adoptar el siguiente tipo de carga

$$p^* = \begin{cases} \frac{n}{n+1}p & \text{en } x \in (0,L), \\ -Q & \text{en } x = L, \end{cases} \tag{5.377}$$

con lo que obtenemos

$$\frac{1}{n+1}\int_0^L B_n M^{*n+1}dx \geq Qw(L), \tag{5.378}$$

o su equivalente

$$w(L) \leq \frac{B_n}{n+1}\frac{1}{Q}\int_0^L M^{*n+1}dx = \frac{B_n}{n+1}\frac{1}{Q}\int_0^L \left[Q(L-x)+\frac{n}{n+1}p\frac{(L-x)^2}{2}\right]^{n+1}dx. \tag{5.379}$$

Como vemos, la cota depende del propio valor de Q. Luego, la mejor cota para $w(L)$ corresponderá a aquel Q que minimice el segundo miembro, es decir

$$w(L) \leq \frac{B_n}{n+1}\min_{Q\in\mathbb{R}^+}\frac{1}{Q}\int_0^L \left[Q(L-x)+\frac{n}{n+1}p\frac{(L-x)^2}{2}\right]^{n+1}dx. \tag{5.380}$$

Dada la no linealidad del problema tendremos que recurrir a técnicas numéricas para la obtención de estas cotas. En particular, veamos el resultado para $n=1$. En este caso tenemos

$$w(L) \leq \frac{B_n}{2}\min_{Q\in\mathbb{R}^+}\frac{1}{Q}\int_0^L \left[Q(L-x)+\frac{1}{4}p(L-x)^2\right]^2 dx. \tag{5.381}$$

El valor de Q que minimiza el segundo miembro será tal que

$$-\int_0^L \left[Q(L-x)+\frac{1}{4}p(L-x)^2\right]^2 dx + 2Q\int_0^L \left[Q(L-x)+\frac{1}{4}p(L-x)^2\right](L-x)dx = 0, \tag{5.382}$$

de donde

$$\frac{Q}{pL} = 0.19365, \tag{5.383}$$

que substituido en la desigualdad anterior nos conduce a

$$w(L) \leq \frac{B_n}{2}\left[\frac{QL^3}{3}+\frac{1}{8}pL^4+\frac{1}{80}\frac{p^2L^5}{Q}\right] = \frac{B_n}{2}pL^4\left[\frac{0.19365}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{80}\frac{1}{0.19365}\right] = 0.12705B_npL^4. \tag{5.384}$$

Si a esta cota superior la adoptamos como valor aproximado obtenemos

$$w(L) = q_a = 0.12705B_npL^4, \tag{5.385}$$

que comparada con la solución exacta (5.371) nos proporciona

$$\frac{q_a}{q_1} = \frac{0.12705}{0.125} = 1.0164, \tag{5.386}$$

o sea, hemos obtenido en la determinación del valor de la velocidad en este punto un error igual al 1.64%.

5.13 Algoritmos Numéricos para Fluencia Estacionaria

En esta sección vamos a presentar dos algoritmos numéricos para el análisis de la fluencia estacionaria, teniendo como variable básica el campo de velocidades.

Para simplificar nuestra presentación vamos a suponer que el campo de velocidades es tal que $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ en $\partial\mathscr{B}_v$.

Teniendo esto presente y recordando lo visto en la Sección 5.9.4, tenemos que el problema de la fluencia estacionaria, cuando expresado en función del campo de velocidades, consiste en determinar el campo $\mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v$ tal que minimice el funcional

$$\Pi(\mathbf{v}^*) = \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}^*) dV - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}^* dV - \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}^* dS, \tag{5.387}$$

definido para todo $\mathbf{v}^* \in \mathrm{Kin}_v$ y donde $\mathbf{D}^* = \nabla^s\mathbf{v}^*$. El espacio Kin_v corresponde a

$$\mathrm{Kin}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0,\, \mathbf{v}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \mathbf{0}\}. \tag{5.388}$$

Recuerde que la restricción $\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$ corresponde a asegurar que todos los movimientos cinemáticamente admisibles sean también isocóricos.

El algoritmo natural para resolver aproximadamente el problema anterior, consistirá en redefinirlo en un espacio $\mathrm{Kin}_v^N \subset \mathrm{Kin}_v$ de dimensión N finita. En otras palabras, supongamos conocido el conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty}$ denso[1] en Kin_v llamadas *funciones bases* o *coordenadas*, y cuya construcción puede realizarse a través del Método de los Elementos Finitos. Luego, llamando

$$\mathrm{Kin}_v^N = \mathrm{span}\{\phi_i\}_{i=1}^N, \tag{5.389}$$

tendremos que el problema aproximado consistirá ahora en: determinar $\mathbf{v}^a \in \mathrm{Kin}_v^N$ tal que minimice

$$\Pi(\mathbf{v}^{*a}) = \int_{\mathscr{B}} \psi(\mathbf{D}^{*a}) dV - \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}^{*a} dV - \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot\mathbf{v}^{*a} dS, \tag{5.390}$$

para todo $\mathbf{v}^{*a} \in \mathrm{Kin}_v^N$ y donde $\mathbf{D}^{*a} = \nabla^s\mathbf{v}^{*a}$.

Ahora bien, como

[1] Recuerde que por denso queremos significar que dado $\mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v$ arbitrario y $\varepsilon > 0$ siempre será posible determinar $N(\varepsilon)$ tal que para todo $m \geq N$ resulte $\|\mathbf{v} - \sum_{i=1}^m a_i\phi_i\| < \varepsilon$ y donde $\|\cdot\|$ es la norma adoptada en Kin_v.

$$\mathbf{v}^{*a} = \sum_{i=1}^{N} c_i^* \boldsymbol{\phi}_i, \tag{5.391}$$

y llamando con $\mathbf{c}^* = (c_1^*, c_2^*, \ldots, c_N^*) \in \mathbb{R}^N$, el problema anterior consistirá finalmente en determinar $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^N$ tal que minimice la *función*

$$\mathscr{F}(\mathbf{c}^*) = \Pi\left(\sum_{i=1}^{N} c_i^* \boldsymbol{\phi}_i\right) = \int_{\mathscr{B}} \psi\left(\sum_{i=1}^{N} c_i^* \nabla^s \boldsymbol{\phi}_i\right) dV - \sum_{i=1}^{N} c_i^* \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\phi}_i dV = \\ - \sum_{i=1}^{N} c_i^* \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\phi}_i dS. \tag{5.392}$$

De la convexidad de la función potencial ψ, tenemos que la condición necesaria y suficiente para el mínimo corresponde a

$$\frac{\partial \mathscr{F}(\mathbf{c}^*)}{\partial c_i^*} = 0 \quad i = 1, \ldots, N, \tag{5.393}$$

que corresponde a un sistema de N ecuaciones **no lineales** acopladas cuya resolución permitirá determinar los coeficientes $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_N)$ que nos proporcionan la solución aproximada que minimiza el funcional de disipación en el espacio Kin_v^N.

Como podemos apreciar, este algoritmo presenta básicamente las siguientes dificultades.

1) Determinación de las funciones coordenadas $\boldsymbol{\phi}_i$. Con efecto, observe que la restricción de isocoricidad pasa a ser una de las dificultades mayores.
2) Resolución de un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas.

Debemos resaltar también que desde el punto de vista computacional, el algoritmo formulado arriba exigirá la elaboración de un código de cálculo específicamente orientado a tal fin.

Nos preguntamos si será posible definir otro algoritmo que permita la resolución del problema de fluencia estacionaria y que pueda ser implantado fácilmente en un programa de elementos finitos para el análisis elástico lineal. La respuesta es afirmativa y corresponde a un algoritmo que hemos llamado *elasto-creep*.

Para presentar este algoritmo, consideramos el mismo cuerpo ocupando la misma región $\mathscr{B}$ de contorno $\partial\mathscr{B}$, sometido a la acción del sistema de fuerza $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$ y a la misma velocidad prescripta $\overline{\mathbf{v}}$ en $\partial\mathscr{B}_v$ pero, ahora, este cuerpo está constituido de un material que experimenta deformaciones de *elasto-creep*. Es decir, el material tiene dos comportamientos simultáneos, un comportamiento instantáneo elástico y otro en el tiempo correspondiente a la fluencia secundaria (creep).

El problema de *elasto-creep* consistirá así en determinar los campos $\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$, $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t)$, $\dot{\mathbf{E}}^c = \dot{\mathbf{E}}^c(\mathbf{x}, t)$ y $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x}, t)$ definidos en $\mathscr{B} \times [0, \infty)$ tales que

- $\dot{\mathbf{u}} \in Kin_v$, es decir el campo sea cinemáticamente admisible;
- $\dot{\mathbf{E}}$ sea compatible es decir $\dot{\mathbf{E}} = \mathscr{D}\dot{\mathbf{u}} = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}$ en el caso de un cuerpo tridimensional;
- $\dot{\mathbf{T}}$ esté asociado con la tasa de deformación elástica $\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^c$ a través de la ecuación constitutiva correspondiente a un material elástico, que supondremos lineal por

simplicidad; es decir, $\dot{\mathbf{T}} = \mathbb{D}(\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^c)$ donde, por simplicidad supondremos que $\mathbb{D}$ es el tensor de elasticidad de un material isotrópico $\mathbb{D} = 2\mu\mathbb{I} + \lambda\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}$, $\mathbb{I}$ es el tensor de identidad de cuarto orden e $\mathbf{I}$ el tensor identidad de segundo orden, y λ y μ son las constantes de Lamé;

- $\dot{\mathbf{E}}^c$ es la tasa de deformación de fluencia que deberá estar asociadas con el estado de tensiones a través de la ecuación constitutiva correspondiente es decir, por una ecuación del tipo $\dot{\mathbf{E}}^c = f(\mathbf{S})\mathbf{S}$, donde $\mathbf{S}$ es el tensor desviador asociado al estado de tensiones $\mathbf{T}$;
- como estamos suponiendo que las cargas $(\mathbf{b},\mathbf{a})$ no varían con t, la tasa de tensiones $\dot{\mathbf{T}}$ deve ser autoequilibrada en todo instante de tiempo $t \in (0,\infty)$ es decir, $\dot{\mathbf{T}} \in \mathrm{Var}_T$, $\forall t \in (0,\infty)$ ó, en forma variacional, debe satisfacer el PPV que, para el cuerpo tridimensional que estamos estudiando, establece que $\dot{\mathbf{T}}$ debe satisfacer la siguiente ecuación variacional para cada instante de tiempo $t \in (0,\infty)$, o sea

$$\int_{\mathscr{B}} \dot{\mathbf{T}} \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{u}} dV = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in Var_v, \tag{5.394}$$

ó, como ya vimos, en forma local debe satisfacer para cada $t \in (0,\infty)$

$$\mathrm{div}\,\dot{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}, \tag{5.395}$$

$$\dot{\mathbf{T}}\mathbf{n} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a. \tag{5.396}$$

Como el problema propuesto es evolutivo, falta agregar las condiciones iniciales para completar su definición. Estas condiciones deberán ser compatibles con lo que hemos llamado de comportamiento instantáneo elástico. Es decir, los campos $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x},0)$, $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(x,0)$, $\mathbf{E}_0^c = \mathbf{E}^c(\mathbf{x},0)$ y $\mathbf{T}_0 = \mathbf{T}(\mathbf{x},0)$ para el instante de tiempo $t = 0$ deben ser solución del problema puramente elástico (respuesta instantánea). Tenemos así que para el instante de tiempo $t = 0$ estos campos son tales que

- $\mathbf{T}_0$ debe equilibar las cargas es decir, debe satisfacer el PPV

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}_0 \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{u}} dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}\cdot\hat{\mathbf{u}} dS \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u \equiv \mathrm{Kin}_u, \tag{5.397}$$

donde $\mathrm{Kin}_u = \{\mathbf{u} \in \mathscr{V}; \mathbf{u}|_{\partial\mathscr{B}_u} = \mathbf{0}\}$. Hemos adoptado condiciones homogéneas para simplificar la presentación. Como ya vimos, la forma variacional equivale a la forma local

$$\mathrm{div}\,\mathbf{T}_0 = \mathbf{b} \quad \text{en } \mathscr{B}, \tag{5.398}$$

$$\mathbf{T}_0\mathbf{n} = \mathbf{a} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a. \tag{5.399}$$

- $\mathbf{T}_0$ debe estar asociado a través de la ecuación cosntitutiva del material elástico (respuesta instantánea) con el estado de deformación inicial $\mathbf{E}_0$ es decir, $\mathbf{T}_0 = \mathbb{D}\mathbf{E}_0$;
- la deformación inicial $\mathbf{E}_0$ debe ser compatible con el campo inicial de desplazamientos $\mathbf{u}_0$ es decir, $\mathbf{E}_0 = \nabla^s\mathbf{u}_0$;

- el campo inicial de desplazamiento $\mathbf{u}_0$ debe ser cinemáticamente admisible es decir, $\mathbf{u}_0 \in Kin_u$;
- por último, la deformación inicial de fluencia debe ser nula es decir, $\mathbf{E}_0^c = \mathbf{O}$.

Supongamos ahora que la solución $\mathbf{T}$, $\dot{\mathbf{E}}$, $\dot{\mathbf{E}}^c$ y $\dot{\mathbf{u}}$ del problema anterior converge para $t \to \infty$ a una solución estacionaria $\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\dot{\mathbf{E}}}$, $\tilde{\dot{\mathbf{E}}}^c$ y $\tilde{\mathbf{u}}$. Existiendo esta solución estacionaria, no resulta difícil mostrar que la misma es la propia solución del problema de fluencia estacionaria original. En efecto, como converge a una solución estacionaria tendremos

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{O}, \tag{5.400}$$

luego

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{T}(\mathbf{x},t) = \tilde{\mathbf{T}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{T}}, \tag{5.401}$$

que conduce a

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\mathbf{E}}^c = f(\tilde{\mathbf{S}})\tilde{\mathbf{S}}, \tag{5.402}$$

donde $\tilde{\mathbf{S}}$ es la parte desviadora de $\tilde{\mathbf{T}}$. A su vez, de la relación constitutiva $\dot{\mathbf{T}} = \mathbb{D}(\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^c)$, de la positividad de $\mathbb{D}$ y de la expresión (5.400) resulta también que

$$\lim_{t\to\infty} (\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^c) = \mathbf{O}, \tag{5.403}$$

de donde

$$\lim_{t\to\infty} \dot{\mathbf{E}} = \lim_{t\to\infty} \dot{\mathbf{E}}^c = f(\tilde{\mathbf{S}})\tilde{\mathbf{S}} = \tilde{\dot{\mathbf{E}}}. \tag{5.404}$$

De las consideraciones anteriores se sigue que la solución estacionaria $\tilde{\mathbf{T}}$, $\tilde{\dot{\mathbf{E}}}$, $\tilde{\mathbf{u}}$ del problema de *elasto-creep* satisface las mismas ecuaciones que gobiernan la fluencia estacionaria. Por último debemos observar que con esta formulación de *elasto-creep* se obtiene, en el límite (solución estacionaria), que la tasa de deformación estacionaria $\tilde{\dot{\mathbf{E}}}$ satisface la ecuación constitutiva de fluencia y como consecuencia es también isocórica.

Con esta formulación el lector podrá observar que el problema original de fluencia estacionaria fue substituido por un problema que para cada instante de tiempo t corresponde a un problema elástico con deformaciones iniciales conocidas y dadas por la tasa de deformación de fluencia. Esta forma de modelar la fluencia secundaria tiene así la ventaja de: (i) relajar la incompresibilidad en la definición del espacio admisible Kin_v; (ii) trabajar en cada paso de tiempo con un problema lineal; y, como consecuencia de lo anterior, (iii) la solución aproximada del problema de elasto-creep puede ser fácilmente implementada en un programa que permita el análisis elástico. Como desventaja, con esta formulación se *paga el precio* de tener un problema evolutivo donde se busca la solución estacionaria. Sin embargo, esta *desventaja* es parcial ya que en el problema original tenemos que resolver un sistema no lineal de ecuaciones que forzosamente requiere también un proceso iterativo.

A continuación vamos a presentar con más detalle la obtención de la solución aproximada de este modelo de *elasto-creep*. Para plantear la formulación variacional equivalente al problema de elasto-creep recordemos las definiciones

$$\text{Kin}_u = \{\mathbf{u} \in \mathscr{V}; \mathbf{u}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \mathbf{0}\}, \tag{5.405}$$

$$\text{Kin}_v = \{\dot{\mathbf{u}} \in \mathscr{V}; \dot{\mathbf{u}}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \overline{\mathbf{v}}\}. \tag{5.406}$$

Definidos estos conjuntos, el problema variacional equivalente al problema de elasto-creep consiste en: determinar $\dot{\mathbf{u}} \in \text{Kin}_v$ tal que para todo $t \in (0,\infty)$ se verifique

$$\int_{\mathscr{B}} \dot{\mathbf{T}} \cdot \nabla^s(\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}) dV = 0 \quad \forall \dot{\mathbf{u}}^* \in \text{Kin}_v, \tag{5.407}$$

con la condición inicial $\mathbf{E}_0^c = \mathbf{O}$, y $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u$ satisfaciendo

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}_0 \cdot \nabla^s(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0) dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0) dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0) dS \quad \forall \mathbf{u}^* \in \text{Kin}_u, \tag{5.408}$$

y donde

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbb{D}(\nabla^s \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{E}}^c), \tag{5.409}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^c = f(\mathbf{S})\mathbf{S}, \tag{5.410}$$

$$\mathbf{T}_0 = \mathbb{D}\nabla^s \mathbf{u}_0, \tag{5.411}$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\text{tr}\,\mathbf{T})\mathbf{I}. \tag{5.412}$$

Introduciendo las relaciones constitutivas en las expresiones integrales, el problema anterior puede ser reescrito como: determinar $\dot{\mathbf{u}} \in Kin_v$ tal que para todo $t \in (0,\infty)$ se verifique

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \dot{\mathbf{u}} \cdot \nabla^s(\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}) dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D} f(\mathbf{S})\mathbf{S} \cdot \nabla^s(\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}) dV \quad \dot{\mathbf{u}}^* \in \text{Kin}_v, \tag{5.413}$$

con la condición inicial $\mathbf{E}_0^c = \mathbf{O}$ y $\mathbf{u}_0 \in \text{Kin}_u$ satisfaciendo

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\nabla^s \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^s(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0) dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0) dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0) dS \quad \forall \mathbf{u}^* \in \text{Kin}_u. \tag{5.414}$$

Como era esperado, las dos expresiones anteriores corresponden al PPV para el instante de tiempo t y al PTV para el instante inicial $t = 0$, respectivamente.

Los problemas variacionales anteriores están definidos en espacios Kin_v y Kin_u de dimensión infinita. Como ya vimos, para la obtención de las soluciones aproximadas $\dot{\mathbf{u}}^a$ y $\mathbf{u}_0^a$ será necesario redefinirlos en espacios de dimensión finita Kin_v^n y Kin_u^n. Una manera de lograr lo anterior es considerar que

$$\dot{\mathbf{u}}^a \in \mathrm{Kin}_v^n \implies \dot{\mathbf{u}}^a = \overline{\mathbf{v}} + \sum_{i=1}^{n} \dot{u}_i^a(t)\phi_i(\mathbf{x}), \tag{5.415}$$

$$\mathbf{u}_0^a \in \mathrm{Kin}_u^n \implies \mathbf{u}_0^a = \sum_{i=1}^{n} u_{0i}^a \phi_i(\mathbf{x}), \tag{5.416}$$

donde

- $\phi_i, i = 1, \ldots, n$ son campos vectoriales llamados de funciones coordenadas y tales que $\phi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ para todo $i = 1, \ldots, n$ y todo $\mathbf{x} \in \partial\mathscr{B}_v$;
- $\dot{u}_i^a(t)$, $t \in (0, \infty)$ y u_{0i}^a son las variables a determinar a través del problema variacional.

Como ya observamos antes, la funciones coordenadas pueden construirse sistemáticamente a través del Método de los Elementos Finitos. Como es conocido, dicho método consiste en particionar Ω en subregiones llamadas elementos finitos y aproximar, independientemente en cada uno de ellos, las funciones candidatas $\dot{\mathbf{u}}^a$ y $\mathbf{u}_0^a$. En este caso, los escalares $\dot{u}_i^a$ y u_{0i}^a tienen un significado físico ya que representan las componentes de la velocidad $\dot{\mathbf{u}}^a$ y del desplazamiento $\mathbf{u}_0^a$ en los nudos de la partición. A su vez, las funciones coordenadas globales ϕ_i, son construidas a través del ensamblaje sobre todos los elementos de funciones de interpolación locales, definidas en cada elemento finito.

Con las aproximaciones anteriores, el problema de elasto-creep resulta ahora definido como sigue: determinar $\dot{\mathbf{u}}^a \in \mathrm{Kin}_v^n$ tal que para todo $t \in (0, \infty)$ se verifique

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \dot{\mathbf{u}}^a \cdot \nabla^s(\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}^a) dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D} f(\mathbf{S})\mathbf{S} \cdot \nabla^s(\dot{\mathbf{u}}^* - \dot{\mathbf{u}}^a) dV \quad \forall \dot{\mathbf{u}}^* \in \mathrm{Kin}_v^n, \tag{5.417}$$

con la condición inicial $\mathbf{E}^c = \mathbf{O}$ y $\mathbf{u}_0^a \in \mathrm{Kin}_u^n$ satisfaciendo

$$\int_{\Omega} \mathbb{D}\nabla^s \mathbf{u}_0^a \cdot \nabla^s(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0^a) dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0^a) dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{u}^* - \mathbf{u}_0^a) dS \quad \forall \mathbf{u}^* \in \mathrm{Kin}_u^n. \tag{5.418}$$

De la aproximación adoptada, el problema anterior conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias en la variable $t \in (0, \infty)$

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} \dot{u}_j^a(t) = h_i^c(t) - f_i^2 \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.419}$$

con la condición inicial ($t = 0$) $\mathbf{E}_0^c = \mathbf{O}$ y

$$\sum_{j=1}^{n} K_{ij} u_{0j}^a = f_i^1 \quad i = 1, \ldots, n, \tag{5.420}$$

donde

$$K_{ij} = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \phi_i \cdot \nabla^s \phi_j dV, \tag{5.421}$$

$$h_i^c(t) = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\dot{\mathbf{E}}^{ca} \cdot \nabla^s \phi_i dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D} f(\mathbf{S}(t))\mathbf{S}(t) \cdot \nabla^s \phi_i dV, \tag{5.422}$$

$$f_i^1 = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b} \cdot \phi_i dV + \int_{\partial \mathscr{B}_a} \mathbf{a} \cdot \phi_i dS, \tag{5.423}$$

$$f_i^2 = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla^s \phi_i dV. \tag{5.424}$$

La integración numérica del sistema de ecuaciones anterior, puede realizarse por alguno de los métodos clásicos de cuadratura ya existentes. A efectos de simplificar la presentación nos limitaremos a mostrar el algoritmo que emplea el Método de Euler. El lector interesado podrá consultar J. T. Boyle y J. Spence ([39]) para analizar la aplicación de otros métodos. El Método de integración de Euler consiste en la siguiente sequencia de cálculo

1) Para $t_0 = 0$ el sistema (5.420) permite determinar $\mathbf{u}_0^a$, y con éste resultado podemos calcular la deformación
$$\mathbf{E}_0^a = \nabla^s \mathbf{u}_0^a, \tag{5.425}$$
y la tensión
$$\mathbf{T}_0^a = \mathbb{D}\mathbf{E}_0^a. \tag{5.426}$$

2) Conocido $\mathbf{T}_0^a$ se determinan
$$\mathbf{S}^a(0) = \mathbf{T}_0^a - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T}_0^a)\mathbf{I}, \tag{5.427}$$
$$\dot{\mathbf{E}}^{ca}(0) = f(\mathbf{S}^a(0))\mathbf{S}^a(0), \tag{5.428}$$
$$h_i^c(0) = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\dot{\mathbf{E}}^{ca}(0) \cdot \nabla^s \phi_i dV,\ i = 1, \ldots, n. \tag{5.429}$$

3) Con el vector $\mathbf{h}^c(0)$, el vector $\mathbf{f}^2$ definido en la expresión (5.424) y la matriz $\mathbf{K}$ definida en (5.421), es possible resolver el sistema lineal de ecuaciones algebraicas (5.419). La solución de este sistema permite conocer $\dot{\mathbf{u}}^a(0)$ y con este resultado podemos evaluar
$$\dot{\mathbf{E}}^a(0) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}^a(0), \tag{5.430}$$
y el estado de tasa de tensiones $\dot{\mathbf{T}}^a(0)$ asociado a través de la ecuación constitutiva elástica
$$\dot{\mathbf{T}}^a(0) = \mathbb{D}(\dot{\mathbf{E}}^a(0) - \dot{\mathbf{E}}^{ca}(0)). \tag{5.431}$$

4) Con estos elementos ya es posible conocer el estado de tensiones en que se encuentra el sólido en el instante $t_1 = t_0 + \Delta t = \Delta t$
$$\mathbf{T}^a(t_1) = \mathbf{T}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{T}}^a(0). \tag{5.432}$$

5) Conocido este nuevo estado de tensiones se procede a repetir los pasos 2) - 4) hasta que la solución estacionaria sea alcanzada.

Desde el punto de vista computacional, lo anterior equivale a aplicar el procedimiento numérico hasta que la norma de la diferencia del vector $\mathbf{h}^c$ en un instante, t_{n+1}, y en el instante anterior, t_n, sea suficientemente pequena. Es decir, hasta que

$$\frac{\|\mathbf{h}^c(t_n+1)\|}{\|\mathbf{h}^c(t_n)\|} \leq \varepsilon, \tag{5.433}$$

donde $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño.

Por su parte, el paso de integración, Δt, es escogido de manera a satisfacer los siguientes criterios

$$\Delta t_{n+1} \leq 1.5\Delta t_n, \tag{5.434}$$

$$\Delta t_{n+1} \leq \min_{\mathbf{x}\in\mathscr{B}} \tau \frac{\|\mathbf{E}^a(t_n)\|}{\left\|\dot{\mathbf{E}}^a(t_n)\right\|}, \tag{5.435}$$

donde $\tau = 0.1$ y la norma es la norma clásica en el espacio Euclideo.

5.14 Problema de Fluencia no Estacionaria

En esta sección vamos a extender los resultados anteriores para el caso de fluencia no estacionaria incluyendo diversos tipos de endurecimiento así como cargas variables en el tiempo. Según vimos las ecuaciones constitutivas para fluencia llevando en cuenta la teoria de endurecimiento por deformación y por tiempo, pueden ser escritas en general como

$$\dot{\mathbf{E}}^c = g(T_e, \theta, \mathbf{E}_e^c)\mathbf{S} \qquad \text{endurecimiento por deformación,} \tag{5.436}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^c = f(T_e, \theta, t)\mathbf{S} \qquad \text{endurecimiento por tiempo,} \tag{5.437}$$

donde θ es la temperatura, T_e es la tensión efectiva dada por la expresión (5.54) y E_e^c, dada por la expresión (5.61), es la deformación efectiva de fluencia.

Teniendo esto presente, el análisis del problema de fluencia no estacionaria puede plantearse como sigue. Sea un cuerpo que ocupa la región $\mathscr{B}$ de contorno $\partial\mathscr{B}$, sometido a la acción de cargas de cuerpo $\mathbf{b} = \mathbf{b}(\mathbf{x},t)$ y de superficie $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x},t)$, esta última actuando en la parte $\partial\mathscr{B}_a$ de $\partial\mathscr{B}$, y sometido también a una restricción en el campo de desplazamiento dada por $\overline{\mathbf{u}} = \overline{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t)$ en la parte $\partial\mathscr{B}_v$ (observe que estamos inclusive prescribiendo velocidades en este contorno). Nuevamente, las condiciones iniciales deben ser compatibles con la respuesta elástica instantánea.

Para formular este problema recurrimos una vez más al PPV para cada instante de tiempo y al PTV para definir las condiciones iniciales. Para ello definamos los siguientes conjuntos y subespacios

- $\text{Kin}_u = \{\mathbf{u} \in \mathscr{V};\, \mathbf{u}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \overline{\mathbf{u}}\}$ que es el conjunto de todos los campos de desplazamientos cinemáticamente admisibles inclusive con la restriccón al movimiento en el instante $t = 0$ en la parte de la frontera $\partial\mathscr{B}_v$ donde los desplazamientos en el tiempo (y por tanto las velocidades) están prescriptas;
- $\text{Var}_u = \{\hat{\mathbf{u}} \in \mathscr{V};\, \hat{\mathbf{u}}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \mathbf{0}\}$ es el espacio de desplazamientos virtuales. Recuerde que para el tipo de restricción bilateral que se está utilizando en el modelo tenemos que se verifica lo siguiente $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in \text{Kin}_u \implies \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in \text{Var}_u$;
- $\text{Kin}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \mathbf{v}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \dot{\overline{\mathbf{u}}}\}$ es el conjunto de acciones de movimiento cinemáticamente admisibles;
- $\text{Var}_v = \{\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V};\, \hat{\mathbf{v}}|_{\partial\mathscr{B}_v} = \mathbf{0}\}$ es el espacio de acciones virtuales de movimiento. Nuevamente, recuerde que en este caso se verifica lo siguiente $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \text{Kin}_v \implies \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \in \text{Var}_v$;

Con estos conjuntos, el problema variacional equivalente al problema de fluencia no estacionaria consiste en lo siguiente: determinar $\dot{\mathbf{u}} \in \text{Kin}_v$ tal que para cada instante de tiempo t se verifique

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}(\nabla^s \dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{E}}^c) \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{v}} dV = \int_{\mathscr{B}} \dot{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \dot{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \text{Var}_v, \tag{5.438}$$

y donde las condiciones iniciales satisfacen $\mathbf{E}^c_0 = \mathbf{E}^c(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{O}$ en $\mathscr{B}$ y el desplazamiento inicial $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \in \text{Kin}_u$ es tal que

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\nabla^s \mathbf{u}_0 \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{u}} dV = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{b}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} dV + \int_{\partial\mathscr{B}_a} \mathbf{a}_0 \cdot \hat{\mathbf{u}} dS \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \text{Var}_u, \tag{5.439}$$

donde $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(\mathbf{x}, 0)$ y $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}(\mathbf{x}, 0)$.

Siguiendo los pasos descriptos ya varias veces en este trabajo, es posible mostrar la forma fuerte (ecuaciones de Euler) asociada a las ecuaciones variacionales anteriores. Desde este punto de vista, el problema de fluencia no estacionaria consiste en determinar los campos $\mathbf{u}, \mathbf{E}, \mathbf{E}^c$ y $\mathbf{T}$ definidos en $\mathscr{B} \times [0, t_f)$, donde t_f representa el tiempo final de análisis, tales que satisfagan las siguientes expresiones

- Condiciones de contorno cinemáticas

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \in \text{Kin}_u, \tag{5.440}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_0 = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, 0) \in \text{Kin}_v. \tag{5.441}$$

- Compatibilidad de la deformación

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \mathscr{B} \text{ y } \forall t \in [0, t_f), \tag{5.442}$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad \text{en } \mathscr{B} \text{ y } \forall t \in [0, t_f). \tag{5.443}$$

- Ecuaciones constitutivas

$$\dot{\mathbf{E}}^c = \dot{\mathbf{E}}^c(\mathbf{x},t) = g(T_e,\theta,E_e^c)\mathbf{S} \quad \text{endurecimiento por deformación,} \tag{5.444}$$

$$\dot{\mathbf{E}}^c = \dot{\mathbf{E}}^c(\mathbf{x},t) = f(T_e,\theta,t)\mathbf{S} \quad \text{endurecimiento por tiempo,} \tag{5.445}$$

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{x},t) = \mathbb{D}(\dot{\mathbf{E}} - \dot{\mathbf{E}}^c), \tag{5.446}$$

donde T_e y E_e^c representan, respectivamente, la parte efectiva del tensor de tensiones y de deformación de creep.

- Equlibrio del estado de tensiones

$$\operatorname{div}\mathbf{T}_0 + \mathbf{b}_0 = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B} \text{ y } t = 0, \tag{5.447}$$

$$\operatorname{div}\dot{\mathbf{T}} + \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B} \text{ y } t \in (0,t_f). \tag{5.448}$$

- Condiciones de contorno naturales o mecánicas

$$\mathbf{T}_0\mathbf{n} = \mathbf{a}_0 \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a \text{ y } t = 0, \tag{5.449}$$

$$\dot{\mathbf{T}}\mathbf{n} = \dot{\mathbf{a}} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_a \text{ y } t \in (0,t_f). \tag{5.450}$$

5.15 Algoritmo Numérico para Fluencia No Estacionaria

La aplicación del Método de los Elementos Finitos en la formulación variacional de la sección anterior, conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primera orden (los efectos dinámicos se suponem suficientemente pequeños como para no ser llevados en cuenta):

$$\mathbf{K}\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{f}} + \dot{\mathbf{h}}^c, \tag{5.451}$$

con las condiciones iniciales

$$\mathbf{K}\mathbf{d}_0 = \mathbf{f}_0, \tag{5.452}$$

donde

- $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez global del sistema;
- $\dot{\mathbf{f}}$ es el vector término independiente para el instante de tiempo t, asociado a la tasa del sistema $(\mathbf{b},\dot{\mathbf{a}})$ de fuerzas actuantes y a la condición de contorno no homogénea en velocidades sobre el contorno $\partial\mathscr{B}_v$;
- $\dot{\mathbf{h}}^c$ es el vector asociado a las tasas de deformaciones de creep para el instante t;
- $\dot{\mathbf{d}}$ es el vector de velocidades nodales generalizadas para el instante t;
- $\mathbf{f}_0$ es el vector término independiente asociado al sistema de cargas $(\mathbf{b},\mathbf{a})$ y a la condición de contorno no homogénea de desplazamiento sobre $\partial\mathscr{B}_v$ en el instante inicial $t = 0$;
- $\mathbf{d}_0$ es el vector de desplazamientos nodales generalizados en el instante $t = 0$.

Nuevamente, la resolución del sistema anterior puede realizarse a través de técnicas bien conocidas como son el Método de Runge-Kutta, Método de Euler,

etc. Por ejemplo, si se utiliza el Método de Euler el algoritmo puede organizarse en los siguientes pasos.

1) Para $t_0 = 0$, calcular $\mathbf{d}_0$ a partir de $\mathbf{K}\mathbf{d}_0 = \mathbf{f}_0$.
2) Conocido $\mathbf{d}_0$, es inmediato el cálculo del estado inicial de desplazamientos en todo el cuerpo dado por $\mathbf{u}_0$, de deformaciones $\mathbf{E}_0 = \nabla^s \mathbf{u}_0$ y de tensiones $\mathbf{T}_0 = \mathbb{D}\mathbf{E}_0$.
3) Conocido estos campos, es posible calcular $\dot{\mathbf{E}}^c(0)$ empleando la ecuación constitutiva que corresponda.
4) Conocido $\dot{\mathbf{E}}^c(0)$, se procede a calcular $\dot{\mathbf{h}}^c(0)$. A su vez, conocidos $\dot{\mathbf{b}}(0)$ y $\dot{\mathbf{a}}(0)$, se procede a calcular el vector $\dot{\mathbf{f}}(0)$.
5) Calcular $\dot{\mathbf{d}}(0)$ a partir de $\mathbf{K}\dot{\mathbf{d}}(0) = \dot{\mathbf{f}}(0) + \dot{\mathbf{h}}^c(0)$.
6) Conocido $\dot{\mathbf{d}}(0)$ que es el vector de velocidades nodales, es posible calcular $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0)$, $\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x},0) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0)$, $\dot{\mathbf{T}}(0) = \mathbb{D}(\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{x},0) - \dot{\mathbf{E}}^c(0))$.
7) El Método de Euler consiste en suponer que las tasas respecto al tiempo son constantes en cada paso de integración Δt. Con esta hipótesis tenemos

$$t_1^c = t_0 + \Delta t, \tag{5.453}$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{d}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{d}}(0), \tag{5.454}$$

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{E}}(0), \tag{5.455}$$

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_0 + \Delta t \dot{\mathbf{T}}(0), \tag{5.456}$$

$$\mathbf{E}_1^c = \mathbf{E}_0^c + \Delta t \dot{\mathbf{E}}^c(0) = \Delta t \dot{\mathbf{E}}^c(0). \tag{5.457}$$

De esta manera, para el instante t_1 tenemos completamente conocido el estado del cuerpo. Luego el proceso de cálculo consistirá en repetir los pasos 3) hasta 7), pero ahora substituyendo $t_0 = 0$ por t_1, hasta alcanzar el tiempo de integración t_f que se desee, o bien, hasta que arribemos a una solución estacionaria.

5.16 Lectura Adicional

El lector interesado en aumentar los conocimientos en este tema puede consultar las publicaciones indicadas en la bibliografia al final de este trabajo. En particular, los siguientes trabajos han sido utilizados en la preparación de este capítulo

1) **Libros**: G. Bernasconi y G. Piatti ([28]), J. T. Boyle y J. Spence ([38]-[39]), P. G. Hodge ([143]-[144]), J. A. H. Hult ([145]), L. M. Kachanov ([150]), H. Kraus ([161]), J. B. Martin ([180]), A. Nadai ([199]), F. H. Norton ([205]), F. K. Odqvist ([226]), W. Olszak y A. Sawczuk ([228]), R. K. Penny y D. L. Marriot ([231]), W. Prager ([240]), Y. U. N. Robotnov ([243]), M. A. Save y C. E. Massonnet ([265]-[266]).
2) **Publicaciones en general**: E. N. Andrade ([4]-[5]), M. F. Ashby ([16]), R. W. Bailey ([20]-[21]), J. F. Besseling ([29]), C. R. Calladine y D. C. Drucker ([44]), las publicaciones del Comitê da Asociação Brasileira de Ciências Mecânicas

sobre Comportamento Inelástico de Materiais ([53], [54], [55]), J. E. Dorn ([73]-[74]), los trabajos de R. A. Feijóo y E. Taroco ([91], [90], [93], [94]), los trabajos de R. A. Feijóo, E. Taroco y J. N. C. Guerreiro ([95], [96], [97]), R. A. Feijóo, E. Taroco y N. Zouain ([98]), J. J. Frost y M. F. Ashby ([109]), G. A. Greenbaum y M. F. Rubinstein ([125]), P. Germain, Q. S. Nguyen y P. Suquet ([118]), J. N. C. Guerreiro ([127]), P. Hault ([136]), J. Marin y Y. N. Pao ([179]) , A. K. Mukherjee, J. E. Bird y J. E. Dorn ([198]), F. K. Odqvist ([225]), H. Oikawa ([227]), W. Prager ([239]), E. L. Robinson ([246]), V. I. Rozenblium ([257]), E. Taroco y R. A. Feijóo ([275], [276], [277], [279]) , L. T. Vicat ([295]).

Capítulo 6
Materiales que Experimentan Plasticidad

6.1 Introducción

Este capítulo trata de cuerpos deformables constituídos de material elasto-plástico. El término *plasticidad* se refiere a procesos inelásticos independientes del tiempo, excluyendo así los fenómenos de deformación viscosa (creep, relajación, etc.).

Se divide la presentación en dos partes. Primero se describen los modelos matemáticos que caracterizan la relación constitutiva tensión/deformación para materiales elasto-plásticos, luego se desarrollan los principios variacionales asociados, los cuales también permiten el análisis computacional para los principales problemas en plasticidad que son el *análisis límite* y el *análisis de evolución de tensiones y deformaciones*.

6.2 Materiales Elasto-Plásticos

Primero vamos a analizar algunos elementos característicos de los ensayos de tracción pura para identificar los fenómenos que deben ser representados por un modelo matemático de comportamiento del material.

La Figura 6.1 muestra los resultados típicos, obtenidos, por ejemplo, con una barra de aleación de alumínio, en varios ensayos de carga axial monótonamente creciente y con velocidad de deformación controlada $\dot{\varepsilon} =$ constante. Las diversas curvas presentes en esa figura se caracterizan por una parte *lineal*, o proporcional entre la carga aplicada y la deformación de la barra, y una parte no lineal con menores inclinaciones. La inclinación en esta segunda parte es siempre positiva en un ensayo de velocidad de deformación controlada.

Las deformaciones de rotura son típicamente 10 a 100 veces la máxima deformación proporcional. La propiedad de admitir estas deformaciones considerablemente grandes antes de la ruptura es llamada *ductilidad*.

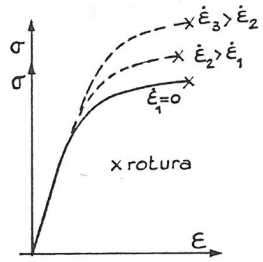


Fig. 6.1 Ensayo de tracción. Curva típica de una barra de aleación de aluminio.

La modificación de la curva σ-ε con $\dot{\varepsilon}$ es una manifestación del comportamiento viscoso, consecuentemente dependiente del tiempo. Para $\dot{\varepsilon}$ pequeño se tiene el *proceso de carga estático*, que será utilizado para definir la relación tensión-deformación en la teoría de plasticidad independiente del tiempo. Los fenómenos de creep y relajación son otras manifestaciones del comportamiento elasto-plástico-viscoso de los materiales reales que no serán representadas en esta teoría restricta de plasticidad.

Si se realiza una serie de ensayos de carga monótona hasta un valor cualquiera σ^*, seguida de una descarga también monótona hasta anular la carga aplicada, los resultados obtenidos serán de los dos tipos mostrados en la Figura 6.2 dependiendo del valor de σ^*.

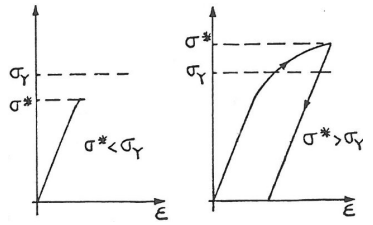


Fig. 6.2 Ensayo de tracción de carga y descarga.

El valor de tensión σ^* que distingue los dos comportamientos es la *tensión de plastificación inicial* o *límite de elasticidad* y es representada por σ_Y. Es decir, cualquier ensayo de carga y descarga con $\sigma^* < \sigma_Y$ produce un diagrama de tensión–deformación reversible.

El comportamiento plástico se distingue del elástico porque produce deformaciones permanentes, es decir *irreversibles*, y no por la falta de linealidad entre tensión y deformación. Los valores de tensión límite de elasticidad y límite de proporcionalidad son bastantes próximos para el acero y otros materiales de amplia aplicación en la ingeniería. Esto ha conducido a veces a confundir estos dos conceptos diferentes de linealidad y elasticidad. Para efectos de medida se considera

que σ_Y es la menor tensión que produce deformaciones permanentes detectables por los instrumentos disponibles.

En los ensayos de carga y descarga que producen deformación permanente la plastificación sólo ocurre durante el aumento de tensión. Apenas comienza una disminución de tensión los incrementos (negativos) de deformación son elásticos (reversibles o recuperables), prácticamente proporcionales a los incrementos de tensión y con el mismo módulo de proporcionalidad ($I\!E$).

Una descripción cuidadosa del comportamiento en carga y descarga, seguidas de nueva carga, presenta un lazo de *histéresis* y una curva de ligación suave en la segunda carga como mostrado en la Figura 6.3. Estos detalles son eliminados (no son considerados) en una descripción simple de plasticidad.

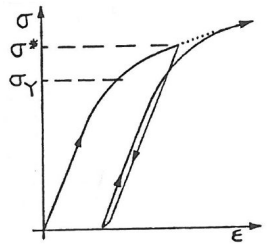


Fig. 6.3 Ensayo de carga, descarga y nueva carga.

Una observación importante en relación a esta experiencia consiste en identificar que la tensión final del primer proceso de carga, σ^*, pasa a ser el nuevo límite elástico en la carga que sigue al proceso de descarga elástica. En otras palabras, el proceso de deformación plástica modifica la tensión de plastificación inicial, aumentando el rango de comportamiento elástico en tracción. Esto es el fenómeno de *endurecimiento por deformación* (en inglés: *work hardening* o *strain hardening*).

Otra experiencia ilustrativa del comportamiento de algunos materiales elastoplásticos consiste en una solicitación de tracción con plastificación seguida de una descarga que produce plastificación en compresión. En la Figura 6.4 queda en evidencia que la *resistencia elástica* en compresión es reducida por el proceso plástico de tracción. Es decir, la deformación plástica en tracción reduce la tensión de plastificación en compresión mientras que la de tracción es aumentada por el mismo motivo. Este fenómeno, llamado *efecto Bauschinger*, implica en el aparecimiento de anisotropía en el material virgen isotrópico (en el sentido $\sigma^o_{Y+} = -\sigma^o_{Y-}$) producida por el proceso plástico.

La descripción fenomenológica hecha hasta aquí muestra que el comportamiento plástico es dependiente del programa de carga mediante el cual se alcanza determinado nivel de carga. En otras palabras, la deformación presente en el material no es sólo una función de la tensión actual, sino que depende también de la *historia de carga* a la que el material fue sometido.

Por ejemplo, en la Figura 6.5, los puntos 1, 2 y 3 corresponden a la misma tensión, sin embargo para diferentes deformaciones debido a las diferentes histo-

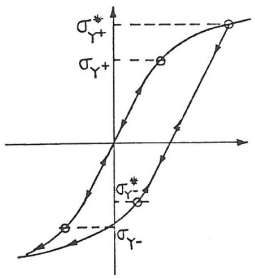


Fig. 6.4 Efecto Bauschinger.

rias de carga mediante las cuales se alcanzó el estado de tensión. Análogamente, los puntos 2 y 4 tienen igual deformación pero asociada a tensiones diferentes.

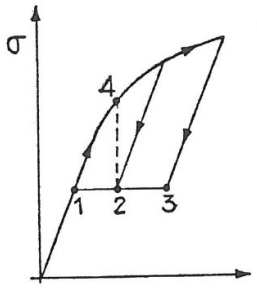


Fig. 6.5 Correspondencia múltiple de tensiones y deformaciones.

En particular, observamos que el material no *recuerda* la parte de la historia del proceso constituida de variaciones de tensión y deformación puramente elásticas. Se dice entonces que la deformación es función de la *historia recordada* o *gravada* que debe poder ser representada por los valores actuales de algunos parámetros de estado como, por ejemplo, la propia deformación, la deformación permanente, el trabajo (plástico) disipado, entre otros. El comportamiento del material depende así de la historia en el sentido que el valor de estos parámetros sólo es conocido cuando se tiene la historia del proceso como dato.

Desde el punto de vista puramente mecánico, es decir sin utilizar conceptos termodinámicos, no es posible medir deformaciones absolutas, sino relativas a un estado de referencia. En efecto, considere la experiencia realizada por un observador que recibe un material que ya fue plastificado anteriormente, ver Figura 6.6. Para este observador, el límite de plastificación inicial sería diferente del que obtendría un segundo observador ensayando la pieza recién fundida (material virgen sin historia). En este sentido, si las variables de estado termodinámicas son incluidas, se podría definir un *estado virgen* para el material.

Otras aleaciones de aluminio presentan un comportamiento diferente en algunos aspectos a los descriptos hasta aquí. El comportamiento mostrado en la Figura 6.7

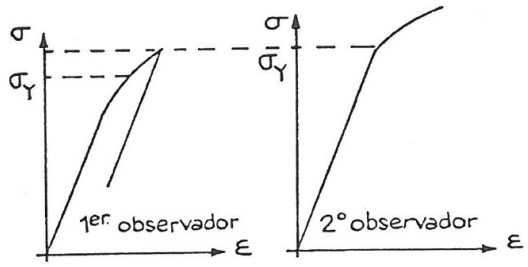


Fig. 6.6 Ensayo de tracción de una barra anteriormente plastificada.

correspondiente a la parte del proceso en que la tensión permanece constante es llamado *flujo* o *escurrimiento plástico*. En cierto sentido esta fase es análoga al escurrimiento de un fluido, aunque en el fenómeno plástico la tasa de deformación no es una función de la tensión como en los fluidos. Veremos más adelante que existen en plasticidad relaciones análogas a las ecuaciones $\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\mu}\sigma$ o $\dot{\gamma} = \frac{1}{\mu}\tau$ (ver Capítulo 11) similares a los fluidos Newtonianos pero con el parámetro μ dependiente del propio proceso plástico, y no apenas del material como en el caso de la viscosidad. Este material que presenta flujo plástico tiene una tensión de plastificación σ_Y independiente del proceso plástico anterior y, por lo tanto, independiente de la historia recordada. En consecuencia, no presenta endurecimiento por deformación ni efecto Bauschinger. Este comportamiento conduce al *modelo de plasticidad ideal* o *perfecta* en contraposición al *modelo de plasticidad con endurecimiento* que vimos anteriormente.

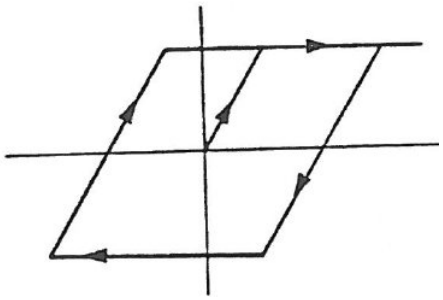


Fig. 6.7 Material perfectamente plástico.

El análisis de las experiencias mostradas nos permite formalizar *modelos de material elasto-plástico* utilizando las siguientes hipótesis restrictivas de comportamiento

1. **Independencia en relación al tiempo.** Se admite que la deformación resultante de un programa de carga (o tensón) no depende de la velocidad con que este proceso se desarrolla. Es importante notar que, según este concepto, el compor-

tamiento puramente plástico es independiente del tiempo, pues es independiente del propio programa de carga.
El comportamiento plástico resultante de esta restricción es, pues, dependiente de la historia recordada de las tensiones, representada por valores de parámetros que llamaremos h.
Por otro lado, y como consecuencia de esta hipótesis restrictiva, los fenómenos viscosos de dependencia de la curva tensión-deformación con las tasas $\dot{\varepsilon}$ o $\dot{\sigma}$, de creep y de relajación quedan excluidos de este modelo.
En este modelo el *tiempo* entra en las ecuaciones apenas como un parámetro capaz de definir la *secuencia de eventos*. Así, si un determinado *tiempo* es utilizado, entonces cualquier otro relacionado con éste vía una función monótona creciente es igualmente apropiado. Como consecuencia de esto, las ecuaciones son entonces indiferentes a un cambio de escala en el tiempo. El único tipo de flujo posible en estas condiciones es el flujo plástico (no viscoso) característico de los materiales idealmente plásticos. En efecto, una relación de tipo flujo viscoso Newtoniano para un material idealmente plástico

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\mu}\sigma, \tag{6.1}$$

puede ser integrada si μ es independiente del tiempo, resultando en

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(0) + \frac{1}{\mu}\sigma t, \tag{6.2}$$

resultado que determina una relación que obviamente no es indiferente a la escala de tiempo. En el modelo que vamos a desarrollar la tensión sólo determina si es posible que ocurran tasas de deformaciones (independientes de la tensión).

2. **Ductilidad ilimitada.** Las ecuaciones del modelo matemático de comportamiento elasto-plástico en consideración no contienen información que ponga en evidencia fractura (rotura) del material.
3. **Temperatura homogénea.** No serán considerados gradientes de temperatura en el cuerpo elasto-plástico (proceso isotérmico) ni la influencia de la temperatura en la propia relación constitutiva del material.

Finalmente, vamos a enfatizar nuevamente las características que distinguen la plasticidad de la elasticidad. En particular, la dependencia de la tensión con el proceso plástico anterior (y no sólo con la deformación), así como la irreversibilidad de la plastificación que se pone en evidencia en el fenómeno observado de que variaciones infinitesimales de tensión positivas (carga con plastificación) o negativas (descarga elástica local) deben ser relacionadas con las variaciones infinitesimales de deformción mediante módulos tangentes diferentes. Así, concluímos que una teoría de plasticidad no puede ser una teoría que asocia tensión a deformación, pues esto sólo puede representar materiales elásticos, y sí una teoría formulada en términos de tasas *temporales*.

6.3 Modelo Elasto-Plástico Unidimensional

El análisis fenomenológico de piezas sometidas a tracción-compresión pura permite introducir de forma simple las ecuaciones de un modelo elasto-plástico. El comportamiento elasto-plástico es descripto en general especificando los cuatro elementos básicos enunciados a continuación:

1. relación tensión-deformación elástica;
2. criterio inicial de plastificación o límite de comportamiento puramente elástico;
3. ley de endurecimiento que determine la modificación del criterio de plastificación durante el proceso plástico;
4. ley del flujo plástico que define la tasa de deformación plástica para un nivel de tensión que verifica el criterio de plastificación.

En lo que sigue se desarrollan cada uno de estos aspectos del modelo matemático de plasticidad.

6.3.1 Relación Tensión-Deformación Elástica

Para simplificar vamos a excluir el comportamiento elástico no lineal. De esta forma la relación elástica considerada es

$$\varepsilon^e = \frac{1}{I\!E}\sigma, \tag{6.3}$$

donde $I\!E$ es el módulo de elasticidad de Young del material. Para el material virgen, y en el comienzo del proceso de carga, las deformaciones elásticas son las únicas que existen. Entonces $\varepsilon = \varepsilon^e$, pero, una vez producida alguna plastificación esto no ocurre, pasando a ser $\varepsilon \neq \varepsilon^e$ y, en esta situación, definimos la deformación plástica por la relación

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \varepsilon^e, \tag{6.4}$$

o sea

$$\varepsilon^p = \varepsilon - \frac{1}{I\!E}\sigma. \tag{6.5}$$

Observe que la expresión anterior nos dice que, cuando la tensión es totalmente removida, es decir $\sigma = 0$, la deformación coincide con la deformación permanente, es decir $\varepsilon = \varepsilon^p$, como se ve en la Figura 6.8. En la mayoría de los casos esto ocurre pero existen otros en los que lo anterior no se verifica.

Consideremos ahora la relación elástica para variaciones de tensión y deformación. De la Figura 6.9, los procesos del tipo $0 \to 1$, puramente elásticos o de descarga local, verifican

$$d\varepsilon^e = \frac{1}{I\!E}d\sigma, \quad d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p, \quad d\varepsilon^p = 0. \tag{6.6}$$

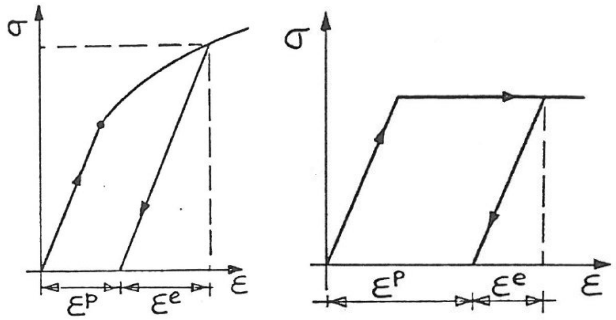


Fig. 6.8 Deformación elástica y deformación permanente o plástica. (a) Material con endurecimiento. (b) Material perfectamente plástico.

Para los procesos de plastificación de tipo $0 \to 2$, ver Figura 6.9 y Figura 6.10, definimos análogamete la componente elástica del incremento de deformación mediante $d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{I\!E}$, obteniendo así

$$d\varepsilon^e = \frac{1}{I\!E} d\sigma, \quad d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p, \quad d\varepsilon^p \cdot \operatorname{sgn}(\sigma) > 0, \tag{6.7}$$

con $d\sigma$ y $d\varepsilon^e$ nulos en el caso de plasticidad perfecta, y donde $\operatorname{sgn}(\cdot)$ representa la función signo de $(\cdot)$.

En general, definimos las tasas de deformación elástica y plástica mediante las ecuaciones

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{1}{I\!E} \dot{\sigma}, \quad \dot{\varepsilon}^p = \dot{\varepsilon} - \frac{1}{I\!E} \dot{\sigma}, \tag{6.8}$$

resultando obviamente

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p. \tag{6.9}$$

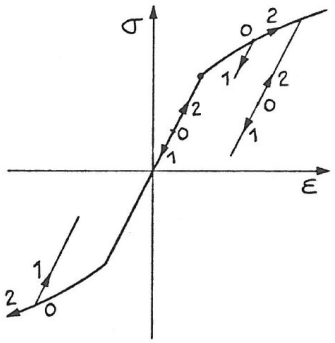


Fig. 6.9 Procesos incrementales.

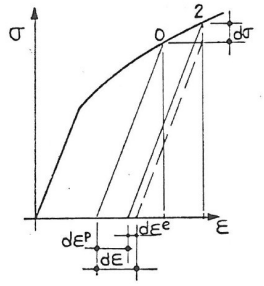


Fig. 6.10 Relación entre incrementos de tensión y deformación.

6.3.2 Criterio de Plastificación Inicial

Para materiales con o sin endurecimiento, se tiene que las *tensiones plásticamente admisibles*, o sea aquellas que son posibles para el material, se encuentran necesariamente contenidas en un segmento del eje de las tensiones en el diagrama σ-ε, ver Figura 6.11. Introduciendo ahora una nomenclatura cuya validad trasciende el caso uniaxial que estamos considerando, decimos que existe un conjunto o región inicial $\mathfrak{a}^o$ en el espacio de tensiones que define los estados de tensiones admisibles para el material. En este caso tenemos

$$\mathfrak{a}^o = \{\sigma; -\sigma^o_{Y-} \leq \sigma \leq \sigma^o_{Y+}\}, \tag{6.10}$$

donde σ^o_{Y-} y σ^o_{Y+} son, respectivamente, las tensiones de plastificación o de límite de elasticidad en compresión y en tensión. Es importante resaltar que estamos utilizando un parámetro σ^o_{Y-} positivo para representar el límite de compresión.

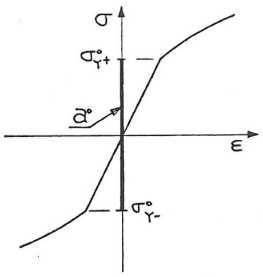


Fig. 6.11 Región inicial de tensiones admisibles para el material.

Para estados de tensiones estrictamente interiores a esta región admisible solamente pueden ser iniciados procesos (infinitesimales) puramente elásticos. Por esta razón decimos que el interior de $\mathfrak{a}^o$ es la *región elástica*.

Por otro lado, para estados de tensión en la frontera de la región admisible pueden ser iniciados procesos (infinitesimales) plásticos si son de carga efectiva, o sea de tensión creciente en el caso de material con endurecimiento o de tensón constante en material perfectamente plástico. Para estos estados en la frontera de $\mathfrak{a}^o$ también es posible iniciar procesos (infinitesimales) puramente elásticos mediante descarga. Por estos motivos, la frontera de la región admisible la llamaremos *superficie de plastificación*.

Tensiones exteriores al conjunto $\mathfrak{a}^o$ son inadmisibles en el estado inicial del material y son siempre inaccesibles en el caso de plasticidad ideal.

La región admisible $\mathfrak{a}^o$ es convenientemente definida por una función de plasticidad inicial $f^o(\sigma)$ tal que la condición $f^o(\sigma) < 0$ caracteriza la región elástica y la condición $f^o(\sigma) = 0$ la superficie de plastificación. Si el *modo* de plastificación en tracción es diferente del de compresión serán necesarias dos funciones de plastificación, una para cada modo. En el ejemplo unidimensional que estamos tratando estas funciones serían

$$f_1^o(\sigma) = \sigma - \sigma_{Y^+}^o, \qquad f_2^o(\sigma) = -\sigma - \sigma_{Y^-}^o. \tag{6.11}$$

Podemos generalizar la definición de $\mathfrak{a}^o$ entendiéndola como una función de valor vectorial con componentes f_1^o y f_2^o, o sea

$$\mathsf{f}^o(\sigma) = (f_1^o(\sigma), f_2^o(\sigma)). \tag{6.12}$$

De esta forma, la región admisible queda definida por la condición

$$\mathsf{f}^o(\sigma) \leq 0, \tag{6.13}$$

donde la condición anterior debe ser entendida componente a componente, como indicado por la (6.11). De la misma manera, la región elástica queda determinada mediante la condición

$$\mathsf{f}^o(\sigma) < 0. \tag{6.14}$$

Por otro lado, la superficie de plastificación está constituida por tensiones que verifican una de las condiciones

$$f_1^o(\sigma) = 0 \quad \text{y} \quad f_2^o(\sigma) \leq 0, \tag{6.15}$$

o

$$f_1^o(\sigma) \leq 0 \quad \text{y} \quad f_2^o(\sigma) = 0. \tag{6.16}$$

6.3.3 Ley de Endurecimiento

Como vimos, la región de tensiones plásticamente admisibles se modifica durante un proceso plástico y, en consecuencia, también la región elástica y la superficie de plastificación son alteradas.

Una ley de endurecimiento establace la forma en que se produce la modificación del límite de plastificación, y puede ser convenientemente definida a través de una *función de plasticidad* $\mathsf{F}(\sigma,\varepsilon^p)$ que describa la dependencia de la región elástica $\mathsf{f}(\sigma)<0$ respecto a ε^p mediante (ver Figura 6.12)

$$\mathsf{f}(\sigma)=\mathsf{F}(\sigma,\varepsilon^p)|_{\varepsilon^p=\text{cte}}. \tag{6.17}$$

Tenemos así una única función $\mathsf{F}(\sigma,\varepsilon^p)$ e infinitas funciones $\mathsf{f}(\sigma)$, una para cada valor de ε^p. Luego, para una determinada historia de carga que produjo una deformación plástica acumulada $\varepsilon^p=\varepsilon-\frac{\sigma}{I\!E}$, todas las tensiones que verifican $\mathsf{f}(\sigma)<0$ son elásticas en el sentido de que sólo procesos puramente elásticos pueden comenzar a partir de ese estado. De esta manera, cuando la tensión cumple

$$f_i(\sigma)=0 \quad \text{y} \quad f_j(\sigma)\leq 0, \quad i\neq j, \quad i,j=1,2, \tag{6.18}$$

donde $f_1(\sigma)=0$ es el límite de plastificación en tracción y $f_2(\sigma)=0$ en compresión, entonces ocurrirán eventualmente deformaciones plásticas en el proceso siguiente, caso el proceso no sea de descarga, y simultáneamente la función f será modificada a lo largo del proceso plástico en la forma determinada por $\mathsf{F}(\sigma,\varepsilon^p)$. En particular, el criterio inicial de plastificación está relacionado con $\mathsf{F}(\sigma,\varepsilon^p)$ por

$$\mathsf{f}^o(\sigma)=\mathsf{F}(\sigma,\varepsilon^p)|_{\varepsilon^p=0}. \tag{6.19}$$

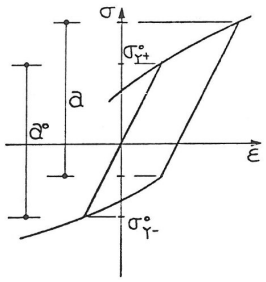


Fig. 6.12 Modificación de la región admisible.

Ahora bien, un material perfectamente plástico tiene límite de plastificación independiente de ε^p. Luego, para este material, las funciones F, f y f^o coinciden y son independientes de ε^p.

En el presente modelo unidimensional podemos definir F de la siguiente manera

$$\mathsf{F}(\sigma,\varepsilon^p)=(F_1(\sigma,\varepsilon^p),F_2(\sigma,\varepsilon^p)), \tag{6.20}$$

con los modos de tracción y compresión definidos por

$$F_1(\sigma, \varepsilon^p) = \sigma - k_1(\varepsilon^p), \tag{6.21}$$
$$F_2(\sigma, \varepsilon^p) = -\sigma - k_2(\varepsilon^p). \tag{6.22}$$

Una tensión en el límite de plastificación en tracción verifica

$$f_1(\sigma) = F_1(\sigma, \varepsilon^p) = 0, \tag{6.23}$$

o sea

$$\sigma = k_1(\varepsilon^p). \tag{6.24}$$

De lo anterior se sigue que la función $k_1(\varepsilon^p)$ se puede calcular a partir del diagrama σ_{Y^+} en función de ε obtenido durante el ensayo de tracción y dado por las siguientes relaciones

$$k_1(\varepsilon^p) = \sigma_{Y^+}\left(\varepsilon^p + \frac{1}{I\!E}\sigma\right), \tag{6.25}$$
$$k_1(0) = \sigma^o_{Y^+} = \sigma_{Y^+}\left(\frac{1}{I\!E}\sigma^o_{Y^+}\right). \tag{6.26}$$

Y, análogamente

$$k_2(\varepsilon^p) = \sigma_{Y^-}\left(\varepsilon^p + \frac{1}{I\!E}\sigma\right), \tag{6.27}$$
$$k_2(0) = \sigma^o_{Y^-} = \sigma_{Y^-}\left(\frac{1}{I\!E}\sigma^o_{Y^-}\right). \tag{6.28}$$

6.3.4 Ley de Flujo Plástico

De acuerdo con la definición de tasa de deformación elástica adoptada, el módulo de elasticidad puede ser interpretado como

$$I\!E = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^e} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}^e = \frac{1}{I\!E}\dot{\sigma}. \tag{6.29}$$

Análogamente, para un proceso plástico como el de tracción mostrado en la Figura 6.10 definimos el *módulo tangente* por

$$I\!E_t = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon} = \frac{1}{I\!E_t}\dot{\sigma}, \tag{6.30}$$

y el *módulo de endurecimiento* por

$$I\!E_p = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad \Rightarrow \quad \dot{\varepsilon}^p = \frac{1}{I\!E_p}\dot{\sigma}. \tag{6.31}$$

Para materiales *standard* o *estables*, es decir cuya curva σ-ε es monótona creciente, el módulo de endurecimiento $\mathbb{E}_p$ es una función positiva.

Substitutyendo las ecuaciones anteriores en la igualdad $d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$ resulta

$$\frac{1}{\mathbb{E}_t} = \frac{1}{\mathbb{E}} + \frac{1}{\mathbb{E}_p}. \tag{6.32}$$

Evidentemente, para materiales idealmente plásticos $\mathbb{E}_t$ y $\mathbb{E}_p$ son nulos y, por lo tanto, la expresión anterior pierde sentido.

Por su parte, vimos que durante el proceso plástico en tracción se verifica (algo similar para el proceso plástico en compresión)

$$F(\sigma, \varepsilon^p) = \sigma - k(\varepsilon^p) = 0. \tag{6.33}$$

Esta relación derivada con respecto a ε^p resulta

$$\mathbb{E}_p = \frac{dk}{d\varepsilon^p}. \tag{6.34}$$

La descripción fenomenológica del comportamiento elasto-plástico muestra que la ley constitutiva debe ser necesariamente incremental (en tasas) y no lineal debido a la irreversibilidad. La ecuación constitutiva debe ser una relación entre $\dot{\sigma}$, $\dot{\varepsilon}$ o $\dot{\varepsilon}^p$ apenas, pues la componente elástica ya fue relacionada por $\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{\sigma}}{\mathbb{E}}$, y que depende del valor presente de la tensión y de los parámetros de historia recordada que, en el caso unidimensional pueden ser substituidos por la propia deformación plástica acumulada ($\mathrm{h} \equiv \varepsilon^p$). Es decir, la relación constitutiva es de la forma

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}(\dot{\sigma}, \sigma, \varepsilon^p) = \frac{1}{\mathbb{E}}\dot{\sigma} + \dot{\varepsilon}^p(\dot{\sigma}, \sigma, \varepsilon^p). \tag{6.35}$$

A continuación explicitamos esta relación admitiendo por simplicidad que el material sólo plastifica en tracción y no en compresión.

- **Material con endurecimiento**

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} 0 & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) < 0 & \text{tensión en la región elástica, o} \\ f(\sigma) = 0 & \text{tensión en el límite de plasticidad, y} \\ \dot{\sigma} \leq 0 & \text{proceso de descarga elástica local,} \end{cases} \\ \frac{1}{\mathbb{E}_p}\dot{\sigma} & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) = 0 & \text{tensión en el límite de plasticidad, y} \\ \dot{\sigma} > 0 & \text{proceso de carga local,} \end{cases} \end{cases} \tag{6.36}$$

  donde f y $\mathbb{E}_p$ dependen de la historia recordada, por ejemplo

$$f(\sigma) = \sigma - k(\varepsilon^p), \tag{6.37}$$

$$\mathbb{E}_p = \frac{dk}{d\varepsilon^p}(\varepsilon^p). \tag{6.38}$$

- **Material idealmente plástico**

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} 0 & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) < 0 & \text{tensión en la región elástica, o} \\ f(\sigma) = 0 & \text{tensión en el límite de plasticidad, y} \\ \dot{\sigma} < 0 & \text{proceso de descarga elástica local,} \end{cases} \\ \dot{\lambda} \geq 0 & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) = 0 & \text{tensión en el límite de plasticidad, y} \\ \dot{\sigma} = 0 & \text{proceso de flujo local,} \end{cases} \end{cases} \tag{6.39}$$

donde f es una función independiente de la historia. A su vez, en la plasticidad ideal fue introducido el *parámetro de plasticidad* $\dot{\lambda}$, positivo e indeterminado, para imponer la condición de que, durante el flujo plástico en tracción, sólo puede ocurrir deformación de estiramiento y cuya intensidad no es proporcional a la variación de tensión que es nula en este caso. La tasa de deformación plástica resulta así indeterminada en este caso en el sentido de que cualquier deformación es admisible con respecto a la relación constitutiva, lo cual no impide que, cuando se considera la pieza sometida a las restricciones cinemáticas y de equilibrio del problema, esta indeterminación resulta eliminada.
La simple observación del diagrama σ-ε para el caso idealmente plástico muestra que si bien $\dot{\varepsilon}$ no está determinado por $\dot{\sigma}$, la correspondencia inversa está bien determinada. Es decir, dado $\dot{\varepsilon}$ es posible determinar $\dot{\sigma}$. Como consecuencia de esto, la forma inversa de la ecuación constitutiva no presenta indeterminación y puede ser escrita para materiales con y sin endurecimiento mediante

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}(\dot{\varepsilon}, \sigma, \varepsilon^p) = I\!E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p(\dot{\varepsilon}, \sigma, \varepsilon^p)), \tag{6.40}$$

donde

$$\dot{\varepsilon}^p = \begin{cases} 0 & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) < 0 & \text{tensión en la región elástica, o} \\ f(\sigma) = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación, y} \\ \dot{\varepsilon} \leq 0 & \text{proceso de descarga elástica local,} \end{cases} \\ \dfrac{I\!E}{I\!E + I\!E_p}\dot{\varepsilon} & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación, y} \\ \dot{\varepsilon} > 0 & \text{proceso de carga local.} \end{cases} \end{cases} \tag{6.41}$$

Esta relación representa la plasticidad ideal si $I\!E_p = 0$ y f es independiente de la historia. En general, se tiene

$$f(\sigma) = \sigma - k(\varepsilon^p) \quad \Rightarrow \quad I\!E_p = \frac{dk}{d\varepsilon^p}. \tag{6.42}$$

Esta relación constitutiva también puede ser escrita como

$$\dot{\sigma} = \begin{cases} I\!E\dot{\varepsilon} & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) < 0 & \text{o} \\ f(\sigma) = 0 & \text{y } \dot{\varepsilon} \leq 0, \end{cases} \\ I\!E_t\dot{\varepsilon} & \text{para} \begin{cases} f(\sigma) = 0 \text{ y } \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \end{cases} \tag{6.43}$$

con $I\!E_t = \frac{I\!E I\!E_p}{I\!E + I\!E_p}$ nulo en plasticidad perfecta.

Como ejemplo vamos a establecer las ecuaciones correspondientes a un material con endurecimiento lineal. Luego, en este caso tenemos

$$k(\varepsilon^p) = a + b\varepsilon^p. \tag{6.44}$$

Los coeficientes a y b son determinados considerando las condiciones $k(0) = \sigma_Y^o$, que implica en $a = \sigma_Y^o$, y $I\!E_p = \frac{dk}{d\varepsilon^p}$ que conduce a $b = I\!E_p$. De esta forma

$$\mathsf{F}(\sigma, \varepsilon^p) = (\sigma - (\sigma_{Y^+}^o + I\!E_{p^+}\varepsilon^p), -\sigma - (\sigma_{Y^-}^o - I\!E_{p^-}\varepsilon^p)). \tag{6.45}$$

La Figura 6.13 muestra el caso particular en que $I\!E_{p^+} = I\!E_{p^-}$, en el cual la región admisible solamente se traslada durante el proceso de plastificación, manteniendo su forma original. Este es el llamado *endurecimiento cinemático* propuesto por Prager. Además, el efecto Bauschinger está automáticamente incluído en este modelo.

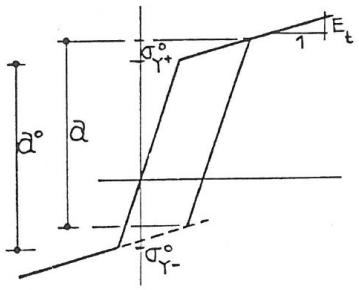


Fig. 6.13 Ley de endurecimiento lineal.

6.4 Modelo Elasto-Plástico Multiaxial

En esta sección vamos a generalizar los conceptos desarrollados para el caso unidimensional. Para ello, consideremos un volumen infinitesial en torno de un punto de un continuo tridimensional sometido a un estado de tensión **T** y de deformación **E**.

De acuerdo a la argumentación presentada en la sección anterior, debemos explicitar los cuatro elementos básicos del modelo de elasto-plásticidad, los cuales son: (i) la relación elástica, (ii) el criterio inicial de plasticidad, (iii) la ley de endurecimiento, y (iv) la ley de flujo plástico.

6.4.1 Relación Elástica

Para esta presentación, asumimos una relación elástica lineal o sea

$$\mathbf{T} = \mathbb{D}\mathbf{E}^e, \quad \text{o su inversa} \quad \mathbf{E}^e = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}, \tag{6.46}$$

donde $\mathbf{E}^e$ es la parte elástica de la deformación $\mathbf{E}$, y donde $\mathbb{D}$ es el tensor de elasticidad con las propiedades de

- ser simétrico $\mathbb{D} = \mathbb{D}^T$,
- ser positivo definido $\mathbb{D}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} > 0$, $\forall \mathbf{E} \in Sym$, $\mathbf{E} \neq \mathbf{O}$ y $\mathbb{D}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} = 0$ si y sólo si $\mathbf{E} = \mathbf{O}$,
- ser invertible, es decir, existe $\mathbb{D}^{-1}$ tal que $\mathbb{D}^{-1}\mathbb{D} = \mathbb{I}$.

En el caso isotrópico vimos que este tensor puede ser explicitado en función de dos parámetros. Por ejemplo, en función del Módulo de elasticidad de Young $I\!E$ y del Módulo de Poisson ν, ó, alternativamente, en función de los parámetros de Lamé $\bar{\lambda}$ y μ (la barra introducida en el parámetro λ es para evitar confusión con el factor de plasticidad λ introducido anteriormente en este capítulo). En efecto, en este caso, $\mathbb{D}$ en función de los parámetros de Lamé toma la forma

$$\mathbb{D} = 2\mu\mathbb{I} + \bar{\lambda}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}), \tag{6.47}$$

o su equivalente en función de los parámetros de Young e Poisson

$$\mathbb{D} = \frac{I\!E}{(1+\nu)}\mathbb{I} + \frac{\nu I\!E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}). \tag{6.48}$$

Los parámetros de elasticidad están relacionados por

$$\mu = \frac{I\!E}{2(1+\nu)} \qquad \bar{\lambda} = \frac{\nu I\!E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \tag{6.49}$$

$$I\!E = \frac{\mu(3\bar{\lambda}+2\mu)}{\bar{\lambda}+\mu} \qquad \nu = \frac{\bar{\lambda}}{2(\bar{\lambda}+\mu)}. \tag{6.50}$$

Por otro lado, el tensor inverso está dado por

$$\mathbb{D}^{-1} = \frac{1}{2\mu}\mathbb{I} - \frac{\bar{\lambda}}{2\mu(3\bar{\lambda}+2\mu)}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}), \tag{6.51}$$

o su equivalente en función de los parámetros de Young e Poisson

$$\mathbb{D}^{-1} = \frac{1+\nu}{I\!E}\mathbb{I} - \frac{\nu}{I\!E}(\mathbf{I}\otimes\mathbf{I}). \tag{6.52}$$

Con estos elementos tenemos que la relación elástica está dada por

$$\mathbf{T} = \mathbb{D}\mathbf{E}^e = 2\mu\mathbf{E}^e + \bar{\lambda}(\mathrm{tr}\,\mathbf{E}^e)\mathbf{I} = \frac{I\!E}{(1+\nu)}\mathbf{E}^e + \frac{\nu I\!E}{(1+\nu)(1-2\nu)}(\mathrm{tr}\,\mathbf{E}^e)\mathbf{I}, \tag{6.53}$$

y la relación inversa está dada por

$$\mathbf{E}^e = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T} = \frac{1}{2\mu}\mathbf{T} - \frac{\bar{\lambda}}{2\mu(3\bar{\lambda}+2\mu)}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\mathbf{I} = \frac{1+\nu}{I\!E}\mathbf{T} - \frac{\nu}{I\!E}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\mathbf{I}. \tag{6.54}$$

A continuación se desarrolla una interpretación de estas relaciones elásticas que resulta útil cuando se realiza una comparación de estas ecuaciones con las relaciones entre deformación plástica y tensión. Para ello, aplicando la operación trazo en las relaciones tensoriales elásticas resulta

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{E}^e = \frac{1}{K}T_m, \tag{6.55}$$

donde K es el *módulo de contracción volumétrica* dado por

$$K = \bar{\lambda} + \frac{2}{3}\mu = \frac{I\!E}{3(1-2\nu)}, \tag{6.56}$$

y donde T_m es la *presión hidrostática* (negativa) dada por

$$T_m = \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T}). \tag{6.57}$$

Por otro lado, recordando la definición del desviador de un tensor de segundo orden $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{A})\mathbf{I}$) y llamando $\mathbf{S}$ al desviador de $\mathbf{T}$ tenemos

$$(\mathbf{E}^e)^D = \frac{1}{2\mu}\mathbf{S} = \frac{1+\nu}{I\!E}\mathbf{S}. \tag{6.58}$$

Una interpretación energética de la relación elástica puede ser dada como mostramos a continuación. Para ello vamos a introducir la siguiente notación para los invariantes del tensor de tensiones

$$I_1 = \mathrm{tr}\,\mathbf{T} = 3T_m \quad I_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} - (\mathrm{tr}\,\mathbf{T})^2] \quad I_3 = \det\mathbf{T}, \tag{6.59}$$

recordando que $\mathrm{tr}(\mathbf{T}^2) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{T}$. De la misma manera, para su desviador $\mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{T})\mathbf{I}$, tenemos

$$J_1 = 0 \quad J_2 = \frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S} \quad J_3 = \det\mathbf{S}. \tag{6.60}$$

Analogamente para el tensor de deformación $\mathbf{E}^e$ tenemos

$$\mathscr{I}_1 = \mathrm{tr}\,\mathbf{E}^e \quad \mathscr{I}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{E}^e\cdot\mathbf{E}^e - (\mathrm{tr}\,\mathbf{E}^e)^2] \quad \mathscr{I}_3 = \det\mathbf{E}^e, \tag{6.61}$$

y para su desviador $(\mathbf{E}^e)^D = \mathbf{E}^e - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}\,\mathbf{E}^e)\mathbf{I}$ resulta

$$\mathscr{J}_1 = 0 \quad \mathscr{J}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{E}^e)^D\cdot(\mathbf{E}^e)^D \quad \mathscr{J}_3 = \det(\mathbf{E}^e)^D. \tag{6.62}$$

En elasticidad lineal la energía elástica de deformación y la energía complementaria por unidade de volumen coinciden (ver Capítulo 4), y verifican

$$U = \frac{1}{2}\mathbf{T}\cdot\mathbf{E}^e. \tag{6.63}$$

Substituyendo en esta expresión las relaciones elásticas, se obtiene la energía en función de la deformación elástica

$$U = \frac{K}{2}\mathscr{I}_1^2 + 2\mu\,\mathscr{J}_2, \tag{6.64}$$

o en función de la tensión

$$U = \frac{1}{18K}I_1^2 + \frac{1}{2\mu}J_2. \tag{6.65}$$

Resumiendo, un estado de tensiones $\mathbf{T}$, caracterizado por una tensión hidrostática T_m y un desviador $\mathbf{S}$, produce una variación volumétrica proporcional a la tensión hidrostática y una distorsión (deformación de cizallamiento dada por $\mathbf{E}^D$) proporcional a la tensión desviadora $\mathbf{S}$. Por otro lado, la energia elástica acumulada por deformación elástica está constituida por sumandos respectivamente proporcionales al cuadrado de la tensión hidrostática (I_1) y desviadora (J_2).

Finalmente, llevando en cuenta que $\mathbf{E} = \mathbf{E}^e + \mathbf{E}^p$ obtenemos

$$\mathbf{E}^p = \mathbf{E} - \mathbf{E}^e = \mathbf{E} - \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}, \tag{6.66}$$

y en función de la tasa de deformación, donde $\mathbf{D} = \dot{\mathbf{E}} = \dot{\mathbf{E}}^e + \dot{\mathbf{E}}^p = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p$, se tiene

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D} - \mathbf{D}^e = \mathbf{D} - \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}}. \tag{6.67}$$

6.4.2 Criterios de Plasticidad y de Endurecimiento

Vamos a admitir que existe una función característica del material que llamaremos *función de plasticidad* y que tiene la siguiente forma

$$\mathsf{F} = \mathsf{F}(\mathbf{T}, \mathsf{h}), \tag{6.68}$$

cuyo segundo argumento, h, escalar o vectorial, representa un conjunto de parámetros utilizados para describir la historia recordada. Vimos, en el caso unidimensional, que la propia deformación plástica acumulada puede ser utilizada para este fin.

Para un determinado valor de h, la función de plasticidad permite conocer el comportamiento que el material debe presentar en un proceso iniciado por un estado en que la tensión $\mathbf{T}$ verifica una de las siguientes condiciones

- $\mathsf{F}(\mathbf{T}, \mathsf{h}) < 0$, que nos dice que $\mathbf{T}$ pertenece a la región elástica,
- $\mathsf{F}(\mathbf{T}, \mathsf{h}) = 0$, que nos dice que $\mathbf{T}$ está en el límite elástico, es decir, sobre la superficie de plastificación.

La expresión *región elástica* se refiere a un conjunto en el espacio de las tensiones asociado a una historia h, y la *superficie de plastificación* se refiere a la frontera de este conjunto. La región definida por $\mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h}) > 0$ es inaccesible para las tensiones.

Con esto en mente, podemos definir que una tensión es *plásticamente admisible* si se verifica $\mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h}) \leq 0$. Como consecuencia de esto, definimos la región admisible, que depende de la historia recordada h, como el conjunto $\mathfrak{a}$ en el espacio de tensiones caracterizado por

$$\mathfrak{a} = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W}'; \mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h}) \leq 0\}. \tag{6.69}$$

El interior de $\mathfrak{a}$ es la región elástica y su frontera es la superficie de plastificación.

De la misma manera a lo realizado en el caso unidimensional, puede resultar conveniente utilizar las funciones $\mathsf{f}(\mathbf{T})$ definidas para cada valor de h como sigue

$$\mathsf{f}(\mathbf{T}) = \mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h})|_{\bar{\mathsf{h}}}. \tag{6.70}$$

Luego la función f depende de la historia y caracteriza el comportamiento del material por las condiciones

- $\mathsf{f}(\mathbf{T}) < 0$, región elástica,
- $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$, superficie de plastificación.

Aquí es importante resaltar que es posible que en $\mathbf{T}$, f tenga valor negativo o nulo, y exista $\mathbf{T}^*$ del proceso en que f resulte positivo. Sin embargo, esto sólo es posible si $\mathbf{T}$ precede a $\mathbf{T}^*$, y entre estos dos estados de tensión ocurre plastificación que modifica la propia f en una nueva función f^* que verifica $\mathsf{f}^*(\mathbf{T}^*) \leq 0$. En cambio, la función F es siempre negativa o nula para cualquier par $(\mathbf{T},\mathsf{h})$ del proceso.

Ahora bien, un *proceso de descarga elástica local* iniciado, para una historia caracterizada por $\bar{\mathsf{h}}$, en un estado de tensiones $\mathbf{T}$ sobre la superficie de plastificación no modifica el valor $\bar{\mathsf{h}}$ y, por lo tanto, tampoco modifica f. Para un proceso infinitesimal de descarga elástica el estado final es elástico, verificando

$$\begin{cases} \mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0, & \text{o sea } \mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h})|_{\bar{\mathsf{h}}} = 0, \text{ y} \\ \mathsf{f}(\mathbf{T}+d\mathbf{T}) < 0, & \text{o sea } \mathsf{F}(\mathbf{T}+d\mathbf{T},\mathsf{h})|_{\bar{\mathsf{h}}} < 0, \end{cases} \tag{6.71}$$

de donde se deducen las condiciones que identifican la descarga elástica local

$$d\mathsf{f} < 0 \quad \text{o sea} \quad d\mathsf{F}|_{\bar{\mathsf{h}}} < 0. \tag{6.72}$$

Si f es diferenciable se tiene

$$d\mathsf{f} = \dot{\mathsf{f}}dt = \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}}dt, \tag{6.73}$$

donde $\mathsf{f}_{\mathbf{T}} = \nabla_{\mathbf{T}}\mathsf{f}(\mathbf{T})$, y la condición de descarga elástica local resulta

$$\dot{\mathsf{f}} = \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} < 0, \tag{6.74}$$

ya que dt es positivo.

Veamos ahora esta misma expresión pero en función de F. Para ello observemos que

$$\dot{\mathsf{F}} = \mathsf{F}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathsf{F}_{\mathsf{h}} \cdot \dot{\mathsf{h}} = \dot{\mathsf{f}} + \mathsf{F}_{\mathsf{h}} \cdot \dot{\mathsf{h}}, \tag{6.75}$$

donde dejamos sobrentendido que en la derivación con respecto a $\mathbf{T}$ (o h) estamos manteniendo fija la variable h (o $\mathbf{T}$).

Ahora bien, en la descarga elástica local no hay modificación de la historia, es decir $\dot{\mathsf{h}} = 0$. Luego, la condición que caracteriza la descarga elástica local está dada por

$$\mathsf{F}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} < 0. \tag{6.76}$$

Consideremos ahora un *proceso de carga* iniciado en un estado en el límite de plastificación, es decir iniciado en

$$\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0 \quad \text{o sea} \quad \mathsf{F}(\mathbf{T}, \mathsf{h}) = 0. \tag{6.77}$$

A lo largo de este proceso, tanto la historia h como la función f se modifican. En particular, después de una variación infinitesimal de tensión y de historia, el estado resultante se encuentra también en el límite de plasticidad. En otras palabras (ver Figura 6.14), se tiene

$$\mathsf{f}^*(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) = 0 \quad \text{o su equivalente} \quad \mathsf{F}(\mathbf{T} + d\mathbf{T}, \mathsf{h} + d\mathsf{h}) = 0. \tag{6.78}$$

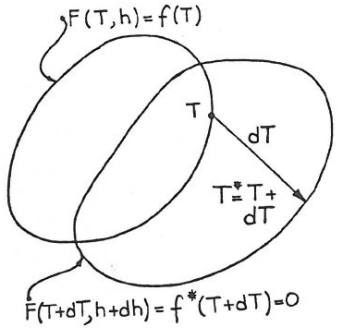


Fig. 6.14 Regiones admisibles en el espacio de tensiones.

De la expresión anterior deducimos la condición que caracteriza el proceso de carga a partir de un estado en el límite de plastificación

$$d\mathsf{F} = 0. \tag{6.79}$$

En el caso diferenciable, la anterior corresponde a

$$\dot{\mathsf{F}} = \mathsf{F}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} + \mathsf{F}_{\mathsf{h}} \cdot \dot{\mathsf{h}} = 0. \tag{6.80}$$

Vamos a analizar esta última condición, pero expresada en términos de la función $\mathsf{f}(\mathbf{T})$ correspondiente al estado inicial de este proceso de carga. En el instante inicial tenemos $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$, y el estado final no es elástico en relación a esta función, pues si lo fuera, habría ocurrido descarga elástica, luego

$$\mathsf{f}(\mathbf{T} + d\mathbf{T}) \geq 0, \tag{6.81}$$

y la condición que caracteriza este proceso de carga a partir de un estado sobre el límite de plastificación resulta dada por

$$d\mathsf{f} \geq 0 \quad \text{o sea} \quad \dot{\mathsf{f}} = \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \geq 0. \tag{6.82}$$

Veamos por separado los dos casos posibles en la desigualdad anterior

- $\dot{\mathsf{f}} > 0$ caracteriza un proceso plástico de *carga efectiva*,
- $\dot{\mathsf{f}} = 0$ caracteriza un proceso plástico de *carga neutro*.

Es importante observar que el *proceso de carga neutro* es propio de estados multiaxiales de tensión ya que no puede existir en un estado uniaxial, excepto en plasticidad ideal.

En un estado multiaxial de tensiones, un material perfectamente plástico está caracterizado por una función de plasticidad F independiente de los parámetros de historia, h, que coincide con f (también independiente de h). En este material, el único proceso plástico psosible es el proceso neutro pues

$$\dot{\mathsf{f}} = \dot{\mathsf{F}} \leq 0 \quad \text{para } \mathbf{T} \text{ tal que } \mathsf{F}(\mathbf{T}) = 0. \tag{6.83}$$

Ahora bien, todo proceso plástico se realiza con $\dot{\mathsf{F}} = \dot{\mathsf{f}} + \mathsf{F}_{\mathsf{h}} \cdot \dot{\mathsf{h}} = 0$, luego

$$\mathsf{F}_{\mathsf{h}} \cdot \dot{\mathsf{h}} = 0, \tag{6.84}$$

es la condición que necesariamente debe ser satisfecha cuando el proceso es neutro. Esta condición es trivial en plasticidad perfecta ya que $\mathsf{F}_{\mathsf{h}} = 0$. Ahora, si un material con endurecimiento realiza un proceso neutro sin deformación plástica, es decir $\mathbf{D}^p = \mathbf{O}$, este proceso no modifica el parámetro de historia h y, consecuentemente, la condición anterior se verifica. O sea

$$\dot{\mathsf{f}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{D}^p = \mathbf{O}, \tag{6.85}$$

es una condición que garantiza que una relación constitutiva para material con endurecimiento del tipo $\mathbf{D}^p = \mathbf{D}^p(\dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \mathsf{h})$ sea *consistente con respecto a los procesos neutros*.

6.4.3 Ley de Flujo Plástico Potencial

Consideremos la relación constitutiva

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{D}^p(\dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \mathsf{h}), \tag{6.86}$$

para la situación en que estas deformaciones (tasas) plásticas puedan ocurrir, o sea para $\mathbf{T}$ tal que

- $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$ y $\dot{\mathsf{f}}(\mathbf{T}) = \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} > 0$, en materiales con endurecimiento,
- $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$ y $\dot{\mathsf{f}}(\mathbf{T}) = \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} = 0$, en materiales perfectamente plásticos,

ó, su equivalente en función de F

- $\mathsf{F}(\mathbf{T}, \mathsf{h}) = 0$ y $\mathsf{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}, \mathsf{h}) \cdot \dot{\mathbf{T}} > 0$, en materiales con endurecimiento,
- $\mathsf{F}(\mathbf{T}, \mathsf{h}) = 0$ y $\mathsf{F}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) \cdot \dot{\mathbf{T}} = 0$, en materiales perfectamente plásticos.

Los modelos de comportamiento plástico mas comúnmente usados adoptan la *hipótesis de existencia de un potencial de tasa deformación plástica* $\mathsf{G}(\mathbf{T}, \mathsf{h})$ o $\mathsf{g}(\mathbf{T}) = \mathsf{G}(\mathbf{T}, \mathsf{h})|_{\bar{\mathsf{h}}}$ cuyo gradiente en relación a $\mathbf{T}$ define la dirección del tensor tasa de deformación plástica, es decir

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\, \mathsf{G}_{\mathbf{T}} \quad \text{o también} \quad \mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\, \mathsf{g}_{\mathbf{T}}. \tag{6.87}$$

El coeficiente de plasticidad $\dot{\lambda}$ debe ser una tasa temporal para que la expresión anterior sea independiente del tiempo. Este multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ es dependiente del proceso pero no de la velocidad con que ese proceso se realiza. En otras palabras, no es una característica del material y sí del proceso.

Para materiales idealmente plásticos $\dot{\lambda}$ es indeterminado en el contexto de la relación constitutiva, pero queda bien determinado cuando se considera el problema completo, es decir, cuando se estudia el equilibrio del cuerpo elasto-plástico sometido a un proceso de carga conocido y durante el cual no es alcanzado el *colapso plástico*.

Para el material con endurecimiento por deformación plástica podemos restringir un poco más la ecuación constitutiva si procuramos garantizar la validad de la condición de consistencia a procesos neutros discutida en la sección anterior. En efecto, para esto es suficiente imponer que

$$\mathbf{D}^p = \mathbf{O} \quad \text{si} \quad \dot{\mathsf{f}} = 0. \tag{6.88}$$

Una manera simple de satisfacer esta condición es adoptar $\mathbf{D}^p$ proporcional a $\dot{\mathsf{f}}$ y, por lo tanto, proporcional a $\dot{\mathbf{T}}$ lo que en la ley potencial se consigue haciendo

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H}\dot{\mathsf{f}}, \tag{6.89}$$

donde $H(\mathbf{T}, \mathsf{h})$ es una función de valor escalar que define el endurecimiento por deformación. De este modo, la ley del flujo plástico potencial resulta

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{H}\dot{\mathsf{f}}\mathsf{g}_{\mathbf{T}}, \tag{6.90}$$

y recordando que $\dot{\mathsf{f}} = \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}}$ tenemos

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{H}(\mathsf{g}_{\mathbf{T}} \otimes \mathsf{f}_{\mathbf{T}})\dot{\mathbf{T}}. \tag{6.91}$$

El material está entonces caracterizado por la función de plasticidad F (o f), el potencial plástico G (o g) y la función de endurecimiento H. En particular, cuando el potencial plástico G coincide con la función de plasticidad F se tiene lo que es conocido como *ley constitutiva asociativa* que satisface la *ley de la normalidad* $\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\,\mathsf{f}_{\mathbf{T}}$ que impone que la tasa de deformación plástica sea normal a la superficie de plastificación $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$ en el punto determinado por la tensión $\mathbf{T}$ presente en el comienzo del proceso que produce esa tasa de deformación $\mathbf{D}^p$, ver Figura 6.15.

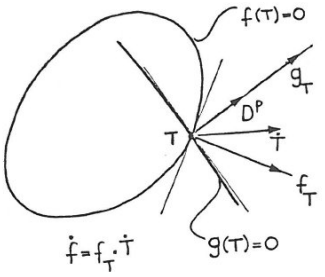


Fig. 6.15 Función de plasticidad y potencial plástico.

Resumiendo, con los resultados obtenidos hasta aquí tenemos que la forma de la ecuación constitutiva elasto-plástica potencial debe ser

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \mathsf{h}) = \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} + \dot{\lambda}\,\mathsf{g}_{\mathbf{T}}, \tag{6.92}$$

donde $\dot{\lambda}\,(\dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \mathsf{h})$ se calcula en función de f y $\dot{\mathsf{f}} = \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}}$ mediante las siguientes reglas

- **Material idealmente plástico**

$$\dot{\lambda} \begin{cases} = 0 \quad \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} < 0 & \text{tensión elástica, o} \\ \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plasticidad, y} \\ \dot{\mathsf{f}} < 0 & \text{descarga elástica local,} \end{cases} \\ \geq 0 \quad \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} = 0 \text{ y } \dot{\mathsf{f}} = 0 & \text{proceso plástico de carga (neutro),} \end{cases} \end{cases} \tag{6.93}$$

  donde $\dot{\lambda}$ en el caso de ser diferente de cero está indeterminado. La situación $\mathsf{f} = 0$ y $\dot{\mathsf{f}} > 0$ no es factible en materiales idealmente plásticos.
- **Material con endurecimiento**

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} < 0 & \text{tensión elástica, o} \\ \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación, y} \\ \dot{\mathsf{f}} < 0 & \text{descarga elástica local,} \end{cases} \\ \dfrac{1}{H}\dot{\mathsf{f}} & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación, y} \\ \dot{\mathsf{f}} \geq 0 & \text{proceso plástico de carga.} \end{cases} \end{cases} \tag{6.94}$$

Podemos dar una forma compacta a estas expresiones utilizando la función de Heaviside

$$\mathscr{H}(c) = \begin{cases} 0 & \text{si } c < 0, \\ 1 & \text{si } c \geq 0, \end{cases} \tag{6.95}$$

y la notación $(\cdot)^+$ con el significado

$$(c)^+ = \max\{0, c\}.$$

De esta forma, las reglas constitutivas anteriores se describen por $\mathbf{D} = \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{D}^p$ con $\mathbf{D}^p$ definido de acuerdo al tipo de comportamiento del material plástico

- **Material idealmente plástico**

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\mathscr{H}(\mathsf{f})\mathscr{H}(\dot{\mathsf{f}})\mathsf{g}_{\mathbf{T}}, \tag{6.96}$$

  con $\dot{\lambda} \geq 0$ indeterminado.
- **Material con endurecimiento**

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{H}\mathscr{H}(\mathsf{f})(\dot{\mathsf{f}})^+\mathsf{g}_{\mathbf{T}}, \tag{6.97}$$

  o equivalentemente

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\mathscr{H}(\mathsf{f})\mathsf{g}_{\mathbf{T}} \quad \text{con} \quad \dot{\lambda} = \frac{(\dot{\mathsf{f}})^+}{H}. \tag{6.98}$$

La relación constitutiva $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathsf{h})$, inversa a la anterior será formalizada mas adelante, después que sean introducidos nuevos principios en la teoría que, por un lado, justifican la ley potencial y, por otro lado, también muestran que la función de endurecimiento H y el factor $\dot{\lambda}$ en plasticidad ideal son positivos o nulos.

Vamos a analizar ahora las restricciones sobre el potencial plástico g impuestas por las restricciones adicionales de que el material es isotrópico y presenta deformaciones iso-volumétricas.

Para materiales isotrópicos, la combinación del principio de independencia del observador con esta propiedad de indiferencia respecto a las direcciones conduce a la relación

$$\mathsf{g}(\mathbf{T}) = \mathsf{g}(\mathbf{R}\mathbf{T}\mathbf{R}^T) \quad \forall \mathbf{R} \in \mathit{Rot}. \tag{6.99}$$

Recuerde (ver Capítulo 1) que *Rot* es el conjunto de tensores tales que $\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$, y $\det\mathbf{R} = 1$. Se puede mostrar que las únicas funciones con esta propiedad son

las llamadas *funciones isotrópicas* que dependen solamente de los invariantes del argumento. Luego

$$\mathrm{g} = \mathrm{g}(\mathbf{T}) = \mathrm{g}(I_1, I_2, I_3). \tag{6.100}$$

De (6.59) y (6.60) no resulta difícil mostrar que los invariantes de $\mathbf{T}$ (I_i, $i = 1,2,3$) están relacionados con los invariantes de su desviador $\mathbf{S}$ (J_i, $i = 2,3$) de la siguiente forma

$$I_2 = J_2 - \frac{1}{3} I_1^2, \tag{6.101}$$

$$I_3 = J_3 + \frac{1}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 J_2, \tag{6.102}$$

las cuales, utilizadas en (6.100), conducen a

$$\mathrm{g} = \mathrm{g}(\mathbf{T}) = \mathrm{g}(I_1, J_2, J_3). \tag{6.103}$$

Como consecuencia de lo anterior resulta

$$\mathrm{g}_{\mathbf{T}} = \mathrm{g}_{I_1}(I_1)_{\mathbf{T}} + \mathrm{g}_{J_2}(J_2)_{\mathbf{T}} + \mathrm{g}_{J_3}(J_3)_{\mathbf{T}}, \tag{6.104}$$

y las derivadas de los invariantes verifican

$$(I_1)_{\mathbf{T}} = \mathbf{I}, \tag{6.105}$$

$$(J_2)_{\mathbf{T}} = \mathbf{S}, \tag{6.106}$$

$$(J_3)_{\mathbf{T}} = \mathbf{SS} - \frac{1}{3} J_2 \mathbf{I}. \tag{6.107}$$

Substituyendo estas derivadas en la expresión anterior y tomando el trazo de $\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\,\mathrm{g}_{\mathbf{T}}$ obtenemos

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{D}^p = 3\dot{\lambda}\,\mathrm{g}_{I_1}. \tag{6.108}$$

Este resultado general muestra claramente que un material potencial presenta deformaciones iso-volumétricas si y sólo si su potencial no depende del invariante I_1, es decir de la tensión media $T_m = \frac{1}{3} I_1$. O sea, si y sólo si g es una función de la forma

$$\mathrm{g} = \mathrm{g}(J_2, J_3). \tag{6.109}$$

Para este material la relación constitutiva toma la forma

$$\mathbf{D}^p = \frac{1}{H} \mathrm{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} \left[\mathrm{g}_{J_2} \mathbf{S} + \mathrm{g}_{J_3} \left(\mathbf{SS} - \frac{1}{3} J_2 \mathbf{I} \right) \right]. \tag{6.110}$$

Este tipo de expresión ha sido extendida también para algunos materiales sin potencial, substituyendo para ello g_{J_2} por $\mathrm{g}_2(J_2, J_3)$ y g_{J_3} por $\mathrm{g}_3(J_2, J_3)$, siendo que estas funciones definen o modelan el comportamiento de tales materiales no potenciales.

6.5 Postulados de Drucker y de Hill

La observación del diagrama σ-ε, ver Figura 6.16, para materiales *estables*, es decir materiales que presentan una correspondencia biunívoca entre tensión y deformación para procesos de carga monótona, muestra que los incrementos de tensión producen trabajo positivo, o sea $d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} > 0$, mientras que en los materiales *inestables* se verifica $d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{\varepsilon} < 0$. Esta condición generalizada para estados multiaxiales puede ser adoptada como *postulado* adicional de la teoría de comportamiento elasto-plástico. Los materiales inestables existen, sin embargo, la teoría no pierde en generalidad al ignorarlos (no incluirlos).

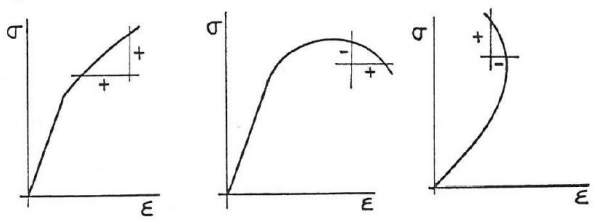


Fig. 6.16 Materiales estables e inestables.

Surge así el postulado de Drucker (también conocido como postulado de Drucker-Prager) que establece lo siguiente.

Postulado de Drucker-Prager

i) Durante los procesos de carga los incrementos de tensión realizan trabajo positivo.
ii) Para un ciclo, consistente en la aplicación y remoción de incrementos de tensión, estos incrementos realizan trabajo positivo o nulo si ocurren deformaciones plásticas. Para materiales con endurecimiento, este trabajo sólo es nulo si el ciclo es puramente elástico.

Es importante resaltar que, en los ciclos de que se trata aquí, solamente las tensiones inicial y final son iguales, no ocurriendo lo mismo con las deformaciones.

Consideremos ahora el ciclo cerrado ABCA mostrado en la Figura 6.17. En este ciclo, el proceso plástico sólo ocurre en una parte infinitesimal correspondiente al trecho BC, donde el *incremento* (no tasa) de deformación tiene la dirección (aproximada) de $\mathbf{D}^p$ en el estado $\mathbf{T}$. En este ciclo ABCA la segunda parte del postulado enunciado antes asegura que

$$\oint (\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \cdot d\mathbf{E} > 0, \tag{6.111}$$

para el caso del material con endurecimiento. Por otro lado

$$\oint (\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \cdot d\mathbf{E}^e = 0, \tag{6.112}$$

ya que el integrando es la diferencial exacta de $\frac{1}{2}\mathbb{D}^{-1}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \cdot (\mathbf{T} - \mathbf{T}^*)$. Como consecuencia de estos dos resultados obtenemos

$$\oint (\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \cdot d\mathbf{E}^p > 0. \tag{6.113}$$

Sin embargo, la deformación plástica sólo ocurre en el intervalo BC donde $d\mathbf{E}^p = \mathbf{D}^p dt$, luego

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \cdot \mathbf{D}^p > 0. \tag{6.114}$$

Esta importante desigualdad es válida para

- materiales con endurecimiento;
- $\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}^p \neq 0$ vinculados por la relación constitutiva;
- cualquier $\mathbf{T}^*$ que sea interior a la región elástica, es decir $\mathsf{f}(\mathbf{T}^*) < 0$.

Observamos también que, para un $\mathbf{T}^*$ admisible, es decir $\mathsf{f}(\mathbf{T}^*) \leq 0$, la desigualdad anterior debe incluir la posibilidad de igualdad (nulo).

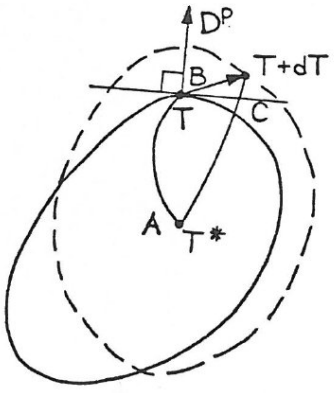


Fig. 6.17 Ciclo de tensiones

La desigualdad (6.114) es conocida como *Principio de Potencia Máxima* (PPM) o también *Principio Maximal de Hill*. En efecto, la misma establece que, para una determinada tasa de deformación plástica $\mathbf{D}^p$, la potencia disipada en el proceso real, $\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p$, es siempre mayor que toda potencia virtual $\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^p$ asociada a la tasa de deformación plástica real y cualquier tensión virtual $\mathbf{T}^*$ de la región elástica (que cumple $\mathsf{f}(\mathbf{T}^*) < 0$). Tenemos así

Principio de la Potencia Máxima – PPM

i) Si $\mathbf{T}$ es un estado de tensiones en la superficie de plastificación, o sea $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$, para el cual ocurre una tasa de deformación plástica no nula $\mathbf{D}^p$ entonces se verifica que

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \cdot \mathbf{D}^p > 0 \quad \forall \mathbf{T}^* \text{ tal que } \mathsf{f}(\mathbf{T}^*) < 0. \tag{6.115}$$

ii) Si $\mathbf{T}$ es un estado de tensiones plásticamente admisible, o sea $\mathsf{f}(\mathbf{T}) \leq 0$, para el cual ocurre una tasa de deformación plástica $\mathbf{D}^p$ eventualmente nula, entonces

$$(\mathbf{T} - \mathbf{T}^*) \cdot \mathbf{D}^p \geq 0 \quad \forall \mathbf{T}^* \text{ tal que } \mathsf{f}(\mathbf{T}^*) \leq 0. \tag{6.116}$$

En el segundo item del PPM se ha incluido la situación en que $\mathbf{T}$ es un estado en la región elástica, ya que $\mathbf{D}^p$ es necesariamente nula y, por lo tanto, la desigualdad anterior se verifica trivialmente.

Ambas afirmaciones del PPM son válidas en materiales con endurecimiento, mientras que en plasticidad ideal sólo se aplica la segunda afirmación.

Vamos a considerar nuevamente el ciclo presentado en la Figura 6.17. Para el proceso de carga BC, el postulado de Drucker, (item i)), asegura que $d\mathbf{T} \cdot d\mathbf{E} > 0$, luego

$$\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} > 0. \tag{6.117}$$

Considerando ahora el ciclo BCB, el item ii) conduce a $d\mathbf{T} \cdot d\mathbf{E}^p \geq 0$ ya que las deformaciones elásticas no producen trabajo neto en un ciclo cerrado, entonces

$$\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}^p \geq 0. \tag{6.118}$$

Esta condición, llamada *condición de unicidad*, vincula tasas de tensión y de deformación plástica reales, y es válida para materiales con o sin endurecimiento y para procesos plásticos o puramente elásticos.

En particular, para un material perfectamente plástico, $\mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}}dt$ debe ser una tensión plásticamente admisible. Así, la aplicación del PPM para $\mathbf{T}^* = \mathbf{T} + \dot{\mathbf{T}}dt$ conduce a

$$\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}^p \leq 0, \tag{6.119}$$

que combinada con la anterior resulta en

$$\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}^p = 0, \tag{6.120}$$

que es válida para un material perfectamente plástico en cualquier proceso sea este plástico o perfectamente elástico.

6.6 Convexidad, Normalidad y Potencial Plástico

El Principio de la Potencia Máxima (PPM) de Hill, que hemos deducido del postulado de Drucker, implica en restricciones sobre la función de plasticidad f que define el límite de plastificación y, también, en restricciones sobre la ley de flujo plástico que vincula la tasa de deformación con la tensión y su tasa. A continuación describimos algunas de las consecuencias del PPM

6.6.1 Ley de la Normalidad y Justificación de la Ley Potencial

El PPM tiene una interpretación geométrica clara que establece que el tensor $\mathbf{T}-\mathbf{T}^*$ forma un ángulo agudo con $\mathbf{D}^p$. Esto implica que la región admisible debe estar enteramente contenida en el semiespacio cuya normal es $\mathbf{D}^p$. Si la superficie de plastificación es regular en $\mathbf{T}$, la única manera de que esto suceda es que $\mathbf{D}^p$ sea normal a la superficie en el punto $\mathbf{T}$ y, por lo tanto, paralela a $\mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T})$ y orientada hacia el exterior de la región admisible, como se ve en la Figura 6.18. O sea

$$\mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}) \quad \text{con} \quad \dot{\lambda} \geq 0. \tag{6.121}$$

En otras palabras, el PPM implica que la ley de flujo plástico tiene que ser del tipo potencial (existe un potencial para $\mathbf{D}^p$), asociativa (el potencial coincide con f) y que el multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ debe ser siempre positivo o nulo. Por otro lado, la positividad de $\dot{\lambda}$ conduce a concluir que la función de endurecimiento H también debe ser positiva ya que $\dot{\lambda} = \frac{1}{H}\dot{\mathsf{f}}$ y $\dot{\mathsf{f}}$ es positivo o nulo en los procesos plásticos.

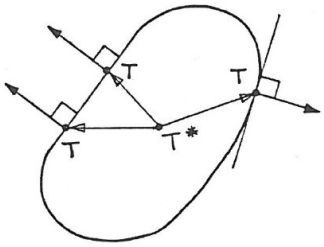


Fig. 6.18 Consecuencias del PPM para un punto regular.

En el caso en que la superficie de plastificación presenta puntos singulares, es decir puntos donde el plano tangente no está determinado, se puede utilizar alternativamente una única función límite de plasticidad f no diferenciable en esos puntos singulares o, en cambio, podemos usar una función de valor vectorial cuyas m componentes son funciones regulares representando los diferentes *modos* de plastificación que el material puede sufrir. La condición de admisibilidad plástica per-

manece así inalterada

$$\mathsf{f}(\mathbf{T}) \leq 0, \tag{6.122}$$

pero, ahora, entendida por componentes. De esta manera el modo i se dice está *activo* si $[\mathsf{f}(\mathbf{T})]_i = 0$ (en lo que sigue y para simplificar, usaremos la notación $\mathsf{f}_i(\mathbf{T})$). A su vez, en los puntos regulares de la superficie de plastificación sólo un modo de plastificación estará activo mientras que, en los puntos singulares, por lo menos dos modos estarán activados. En estos puntos singulares la dirección de $\mathbf{D}^p$ no queda determinada unívocamente. No obstante eso, el PPM condiciona esta dirección a que esté contenida en el *cono convexo* (positivo) definido por las normales a los modos concurrentes en el punto singular, como se nota en la Figura 6.19. Esta condición se expresa analíticamente por

$$\mathbf{D}^p = \sum_{i=1}^{m} \dot{\lambda}_i \mathsf{f}_{i\mathbf{T}}(\mathbf{T}) \quad \dot{\lambda}_i \geq 0 \quad \dot{\lambda}_i \mathsf{f}_i(\mathbf{T}) = 0 \quad i = 1, \ldots, m. \tag{6.123}$$

De la expresión anterior vemos que $\mathbf{D}^p$ es una combinación lineal convexa de los gradientes de los modos f_i activos en $\mathbf{T}$ ($\mathsf{f}_i(\mathbf{T}) = 0$) dado que los inactivos ($\mathsf{f}_i(\mathbf{T}) < 0$) tienen coeficientes $\dot{\lambda}_i$ nulos.

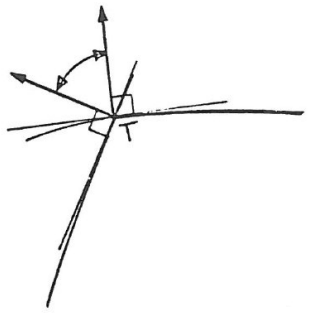


Fig. 6.19 Consecuencias del PPM en un punto singular.

La expresión anterior la podemos escribir de manera compacta de la siguiente forma

$$\mathbf{D}^p = \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T})\dot{\lambda} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} \cdot \mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0, \tag{6.124}$$

donde ahora $\dot{\lambda}$ es un vector de m componentes. La condición $\dot{\lambda} \cdot \mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$, cuando es impuesta en adición a las restricciones $\dot{\lambda} \geq 0$ y $\mathsf{f}(\mathbf{T}) \leq 0$, garantiza que los modos inactivos no contribuyan en la definición de $\mathbf{D}^p$. Al final de este capítulo vamos a discutir como se puede presentar la teoría de manera compacta empleando el concepto de subdiferencial de una función.

6.6.2 Convexidad de la Región Admisible

Otra consecuencia geométricamente evidente de la ley de la normalidad impuesta por el PPM, es la convexidad de la región admisible. En efecto, de la ley de la normalidad vemos que, para cada estado $\mathbf{T}$ tal que $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$, la región admisible $\mathsf{f}(\mathbf{T}) \leq 0$ solamente puede estar de un lado del plano tangente (en el caso de un punto regular) o contenida en el cono formado por los planos tangentes activos en el punto singular, como visto en la Figura 6.20. Esto solo puede ser satisfecho si la región admisible es convexa, es decir satisface

$$\mathsf{f}((1-\theta)\mathbf{T}_1 + \theta\mathbf{T}_2) \leq (1-\theta)\mathsf{f}(\mathbf{T}_1) + \theta\mathsf{f}(\mathbf{T}_2) \quad \forall\theta \in [0,1], \tag{6.125}$$

siendo que $\mathsf{f}(\mathbf{T}_1) \leq 0$ y $\mathsf{f}(\mathbf{T}_2) \leq 0$.

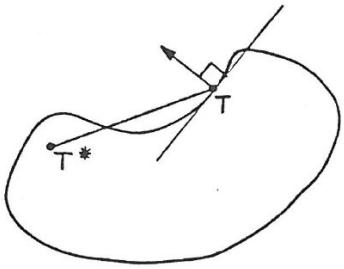


Fig. 6.20 Violación del PPM en una región no convexa.

6.7 Ley del Flujo Plástico

En esta sección vamos a desarrollar la forma de la relación constitutiva $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathsf{h})$, inversa de la ley potencial vista en las secciones anteriores y, finalmente, vamos a resumir los resultados conseguidos. En lo que sigue, y para simplificar la presentación (notación), vamos a limitar la misma para el caso en que la región admisible está caracterizada por una función (de valor escalar) regular.

La función de endurecimiento fue introducida en el modelo mediante la relación $\dot{\lambda} = \frac{\dot{\mathsf{f}}}{H}$ que pierde sentido cuando $H = 0$. Sin embargo, podemos generalizar la validad de la expresión

$$\dot{\mathsf{f}} = H\dot{\lambda}, \tag{6.126}$$

para plasticidad ideal, donde $\dot{\mathsf{f}} = 0$ para $\dot{\lambda} > 0$, si identificamos un material idealmente plástico con $H = 0$.

Otra relación válida para material con o sin endurecimiento es la ley potencial

$$\mathbf{D} = \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} + \dot{\lambda}\,\mathsf{g}_{\mathbf{T}}. \tag{6.127}$$

Aplicando $\mathbb{D}$ a ambos miembros, y realizando el producto escalar por $\mathsf{f}_{\mathbf{T}}$, obtenemos

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}}{H + \mathbb{D}\mathsf{g}_{\mathbf{T}}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}}. \tag{6.128}$$

Si el material satisface el PPM, tenemos $\mathsf{g} = \mathsf{f}$, y la expresión anterior toma la forma

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}}{H + \mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}}. \tag{6.129}$$

Luego, el denominar es positivo, pues $H \geq 0$, $\mathsf{f}_{\mathbf{T}} \neq 0$ y $\mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}$ resulta estrictamente positivo ya que $\mathbb{D}$ es positivo definido. Luego, la expresión anterior muestra que $\dot{\lambda}$ está definido para toda tasa de deformación, tanto para el caso de material con endurecimiento ($H > 0$) como también para el caso de material idealmente plástico. Esta situación difiere de la encontrada cuando se conoce la tasa de tensiones en lugar de la tasa de deformación, lo que ya fue enfatizado anteriormente.

La condición de carga efectiva, que en función de $\dot{\mathbf{T}}$ está dada por $\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\dot{\mathbf{T}} > 0$, la podemos expresar en función de $\mathbf{D}$ observando para ello que ahora $\dot{\lambda}$ está expresa en función de $\mathbf{D}$, como definido por la (6.129). Luego, tanto para plasticidad ideal como para material con endurecimiento, $\dot{\lambda}$ es positivo si

$$\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}} > 0. \tag{6.130}$$

La expresión anterior resulta así en la condición de carga plástica, ahora expresada en función de $\mathbf{D}$ (y $\mathbf{T}$). La descarga elástica queda así caracterizada por

$$\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}} < 0. \tag{6.131}$$

Haciendo uso de las expresiones (6.127) y (6.129) podemos obtener la siguiente forma para la ecuación constitutiva que estamos buscando

$$\dot{\mathbf{T}} = \mathbb{D}^{ep}\mathbf{D}, \tag{6.132}$$

donde

$$\mathbb{D}^{ep} = \mathbb{D} - \frac{c}{H + \mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}}\mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\otimes\mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}, \tag{6.133}$$

siendo que

$$c = \mathscr{H}(\mathsf{f})\mathscr{H}(\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}), \tag{6.134}$$

se anula para estados de tensiones en la región elástica o para procesos de descarga elástica local.

El tensor $\mathbb{D}^{ep}$ sólo puede invertirse en el caso de material con endurecimiento. En este caso tenemos

$$\mathbf{D} = (\mathbb{D}^{ep})^{-1}\dot{\mathbf{T}}, \tag{6.135}$$

donde

$$(\mathbb{D}^{ep})^{-1} = \mathbb{D}^{-1} + \frac{c}{H}\mathsf{f}_{\mathbf{T}} \otimes \mathsf{f}_{\mathbf{T}}, \tag{6.136}$$

con c ahora definido por

$$c = \mathscr{H}(\mathsf{f})\mathscr{H}(\dot{\mathsf{f}}) = \mathscr{H}(\mathsf{f})\mathscr{H}(\mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}}). \tag{6.137}$$

A continuación resumimos las ecuaciones constitutivas obtenidas para materiales elasto-plásticos que verifican el PPM.

- $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{D}, \mathbf{T}, \mathsf{h}) = \mathbb{D}(\mathbf{D} - \mathbf{D}^{ep}) = \mathbb{D}(\mathbf{D} - \dot{\lambda}\mathsf{f}_{\mathbf{T}})$ donde

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} < 0 & \text{tensión elástica, o} \\ \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación, y} \\ \mathbb{D}\mathbf{D} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}} < 0 & \text{descarga elástica local,} \end{cases} \\ \dfrac{\mathbb{D}\mathbf{D} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}}}{H + \mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}}} & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación,} \\ \mathbb{D}\mathbf{D} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}} \geq 0 & \text{proceso plástico de carga,} \end{cases} \end{cases} \tag{6.138}$$

  o en forma compacta

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathscr{H}(\mathsf{f})(\mathbb{D}\mathbf{D} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}})^{+}}{H + \mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}}}. \tag{6.139}$$

- $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\dot{\mathbf{T}}, \mathbf{T}, \mathsf{h}) = \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} + \dot{\lambda}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}$, donde
  - **Material idealmente plástico**

$$\dot{\lambda} \begin{cases} = 0 & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} < 0 & \text{tensión elástica, o} \\ \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plasticidad, y} \\ \dot{\mathsf{f}} < 0 & \text{descarga elástica local,} \end{cases} \\ \geq 0 & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} = 0 \text{ y } \dot{\mathsf{f}} = 0 & \text{proceso plástico de carga (neutro),} \end{cases} \end{cases} \tag{6.140}$$

    donde recuerde que $\dot{\lambda}$ está indeterminado.
  - **Material con endurecimiento**

$$\dot{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} < 0 & \text{tensión elástica, o} \\ \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación, y} \\ \dot{\mathsf{f}} < 0 & \text{descarga elástica local,} \end{cases} \\ \dfrac{1}{H}\dot{\mathsf{f}} & \text{para} \begin{cases} \mathsf{f} = 0 & \text{tensión en el límite de plastificación, y} \\ \dot{\mathsf{f}} \geq 0 & \text{proceso plástico de carga.} \end{cases} \end{cases} \tag{6.141}$$

6.8 Disipación Interna

En esta sección vamos a introducir el concepto de función de disipación plástica interna de gran importancia en la teoría de plasticidad.

La potencia específica (por unidad de volumen) de disipación plástica interna es el campo escalar dado por

$$\Psi = \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p. \tag{6.142}$$

En la hipótesis de que los postulados de estabilidad son válidos, se deduce del PPM que Ψ resulta una función definida por

- **Material con endurecimiento**

$$\Psi = \Psi(\mathbf{D}^p, \mathsf{h}) = \max_{\mathbf{T}^* \in \mathfrak{a}(\mathsf{h})} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^p = \max_{\mathbf{T}^*} \{\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^p, \mathsf{F}(\mathbf{T}^*, \mathsf{h}) \leq 0\}, \tag{6.143}$$

  donde $\mathsf{F}(\mathbf{T}^*, \mathsf{h}) \leq 0$ fue colocada en evidencia como condición subsidiaria.
- **Material idealmente plástico**

$$\Psi = \Psi(\mathbf{D}^p) = \max_{\mathbf{T}^* \in \mathfrak{a}} \mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^p = \max_{\mathbf{T}^*} \{\mathbf{T}^* \cdot \mathbf{D}^p, \mathsf{F}(\mathbf{T}^*) \leq 0\}. \tag{6.144}$$

Veamos algunas propiedades de esta función Ψ.

- La disipación Ψ está unívocamente asociada con la tasa de deformación $\mathbf{D}^p$ (no nula), y se calcula con el estado de tensiones $\mathbf{T}$ localizado sobre la superficie de plastificación ($\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$) asociado con $\mathbf{D}^p$ por la ley de la normalidad. O sea

$$\Psi = \mathbf{T}(\mathbf{D}^p) \cdot \mathbf{D}^p, \tag{6.145}$$

  con $\mathbf{T}(\mathbf{D}^p)$ tal que $\mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0$ y $\mathbf{D}^p = \dot{\lambda} \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T})$. Por su vez, la unicidad del valor es satisfecha aun cuando existan varios estados $\mathbf{T}(\mathbf{D}^p)$ asociados por la normalidad a esa tasa de deformación, ya que el producto $\mathbf{T}(\mathbf{D}^p) \cdot \mathbf{D}^p$ es igual para todos ellos. Tampoco es necesaria la hipótesis de diferenciabilidad de f para garantizar esta propiedad. La Figura 6.21 presenta una representación gráfica de esta propiedad.

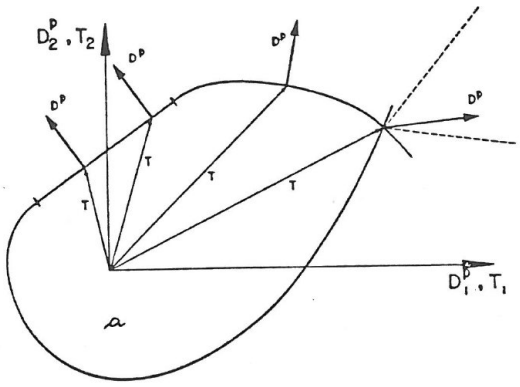


Fig. 6.21 Determinación de $\mathbf{T}$ y de Ψ a partir de $\mathbf{D}^p$.

- Dependiendo de la forma de la función f, puede ocurrir que no todos las $\mathbf{D}^p$ representen una tasa de deformación compatible con la ley de la normalidad. Por ejemplo, vimos que materiales cuya función de plasticidad es independiente de la tensión media tienen $\mathbf{D}^p$ de trazo nulo. Es decir, toda tasa $\mathbf{D}$ cuyo trazo sea diferente de cero no podrá representar una tasa de deformación plástica. En ese caso, y si se considera la función Ψ como definida anteriormente pero extendida a todo el espacio de tasas de deformaciones, la operación de máximo (en este caso supremo) puede dar valor infinito para Ψ. Este problema no existe si la región de plastificación $\mathfrak{a}$ es limitada en el sentido que existe un número c tal que $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} < c^2$ para todo $\mathbf{T}\in\mathfrak{a}$.
- La función Ψ es positiva definida y homogénea de primer grado en la variable $\mathbf{D}^p$. En efecto, la multiplicación de $\mathbf{D}^p$ por un escalar $c>0$ no modifica su dirección y, por lo tanto, no modifica el estado $\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{D}^p)$ correspondiente por la ley de la normalidad. De esta forma, tenemos para $c>0$ arbitrario que

$$\Psi(c\mathbf{D}^p)=\mathbf{T}(c\mathbf{D}^p)\cdot c\mathbf{D}^p = c\mathbf{T}(\mathbf{D}^p)\cdot\mathbf{D}^p = c\Psi(\mathbf{D}^p). \tag{6.146}$$

Por otro lado, aplicando el teorema fundamental de las funciones homogéneas de primer grado tenemos

$$\Psi(\mathbf{D}^p)=\Psi_{\mathbf{D}^p}\cdot\mathbf{D}^p, \tag{6.147}$$

que comparada con $\Psi(\mathbf{D}^p)=\mathbf{T}(\mathbf{D}^p)\cdot\mathbf{D}^p$ obtenemos

$$\mathbf{T}=\mathbf{T}(\mathbf{D}^p)=\Psi_{\mathbf{D}^p} \quad\Leftrightarrow\quad \mathsf{f}(\mathbf{T})=0 \quad \text{y} \quad \mathbf{D}^p=\dot{\lambda}\,\mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}), \tag{6.148}$$

que por su vez nos dice que Ψ debe ser una función potencial de las tensiones definidas por la ley del flujo plástico inversa.

6.9 Funciones de Plasticidad Frecuentemente Usadas

En esta sección vamos a presentar algunas formas conocidas de la función de plasticidad $\mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h})$. En primer lugar, consideraremos la función $\mathsf{f}(\mathbf{T})$, límite de plasticidad para una dada historia de deformación plástica y, posteriormente, trataremos de su modificación presentando algunas funciones de endurecimiento.

Vimos que si el material es isotrópico la función f debe ser isotrópica y, por lo tanto, función de los invariantes del estado de tensiones $\mathbf{T}$

$$\mathsf{f}(\mathbf{T})=\mathsf{f}(I_1,I_2,I_3)=\mathsf{f}(I_1,J_2,J_3). \tag{6.149}$$

Para los metales, los ensayos muestran que la superposición de presión hidrostática sobre cualquier estado de tensión nunca produce plastificación. En consecuencia, para los metales se verifica $\mathsf{f}(\mathbf{T})=\mathsf{f}(J_2,J_3)$.

Si el material obedece los postulados de estabilidad, su límite de plastificación es también un potencial plástico y, según resultado ya visto, se tiene

$$\operatorname{tr}\mathbf{D}^p = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{D}^p = \dot{\lambda}\left[\mathsf{f}_{J_2}\mathbf{S} + \mathsf{f}_{J_3}\left(\mathbf{SS} - \frac{2}{3}J_2\mathbf{I}\right)\right]. \tag{6.150}$$

La relación $\mathsf{f}(J_2, J_3) = 0$ corresponde a la ecuación de un cilindro recto con base en el plano octaédrico, y cuyas generatrices son paralelas a la dirección $\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{I}$ donde son medidas las tensiones medias $T_m = \frac{1}{3}\operatorname{tr}\mathbf{T}$, como se ve en la Figura 6.22.

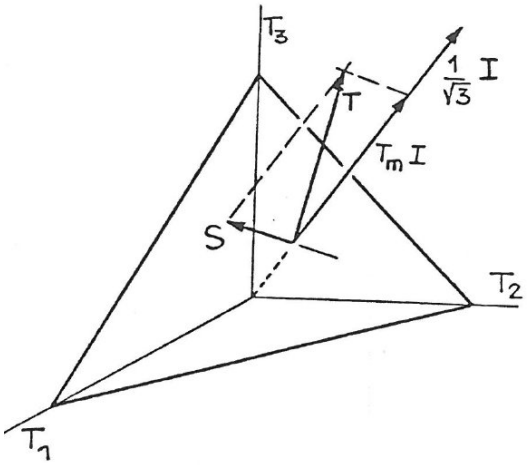


Fig. 6.22 Representación de las tensiones utilizando los autovalores de **T** como coordenadas.

La base de este cilindro es llamada *lugar de plastificación* (en inglés *yield locus*) y puede ser representada en un plano tomando como coordenadas las tensiones principales (T_1, T_2 y T_3). Este lugar de plastificación está dado por una curva simétrica en relación a los ejes para un material isotrópico.

6.9.1 Criterio de Von Mises

En 1913 Von Mises propone el siguiente criterio de plastificación

$$\mathsf{f}(\mathbf{T}) = \sqrt{J_2} - k \leq 0, \tag{6.151}$$

que puede ser escrito, entre muchas otras formas, como

$$\begin{aligned}\mathsf{f}(\mathbf{T}) &= \sqrt{\frac{1}{2}\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}} - k \\ &= \sqrt{\frac{1}{6}[(T_{11}-T_{22})^2+(T_{11}-T_{33})^2+(T_{22}-T_{33})^2+(T_{12}^2+T_{13}^2+T_{23}^2)]} - k \\ &\leq 0. \quad (6.152)\end{aligned}$$

El parámetro k puede ser interpretado considerando que

- en el ensayo de tracción pura, cuando en $T_{11} = \sigma_Y$ comienza la plastificación, tenemos

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{f}(\mathbf{T}) = \frac{1}{\sqrt{3}}T_{11} - k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_Y, \quad (6.153)$$

- en el ensayo de corte puro, cuando en $T_{12} = \tau_{YMises}$ comienza la plastificación tenemos

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & 0 \\ T_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathsf{f}(\mathbf{T}) = T_{12} - k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \tau_{YMises}. \quad (6.154)$$

  Veamos algunos argumentos que justifican este criterio.

- Mises consideraba este criterio como una aproximación del criterio de Tresca y así lo justificó. Actualmente, se admite que el criterio de Mises representa mejor las experiencias realizadas en la mayoría de los metales.
- Utilizando la siguiente descomposición de la energia elástica de deformación

$$U = \frac{1}{18}I_1^2 + \frac{1}{2\mu}J_2, \quad (6.155)$$

  Hencky propuso en 1924 interpretar el criterio de Von Mises como una condición que determina que la plastificación comience cuando la energía de distorción elástica alcance un valor crítico

$$U_{Y\text{distorsión}} = \frac{k^2}{2\mu} = \frac{\sigma_Y^2}{6\mu}. \quad (6.156)$$

  Esta idea había sido anticipada por Maxwell en 1856, Beltrami en 1885 y Huber en 1904.
- Nadai en 1937 plantea este mismo criterio en la forma: la plastificación se produce cuando la tensión de cizallamiento en el plano que forma iguales ángulos con las tensiones principales alcanza un valor crítico. En efecto, la tensión cizallante en este plano es

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}J_2}. \quad (6.157)$$

- Vimos que para los metales en general el criterio debía tener la forma $\mathsf{f}(J_2,J_3)=0$. Observando que J_2 y J_3 son, respectivamente, de grado 2 y 3 de las tensiones, resulta que la elección más simple y de menor grado sería tomar $\mathsf{f}(J_2)=0$, que es exactamente el criterio de Von Mises.
- Finalmente, cuando se consideran los posibles lugares de plastificación en el plano octaédrico que definen el critério $\mathsf{f}(J_2,J_3)=0$, la ecuación más simple es una circunferencia que conduce nuevamente al criterio de Von Mises.

Veamos ahora la ley de flujo plástico cuando se usa este criterio. Para ello calculemos

$$\mathsf{f}_{\mathbf{T}}=\frac{1}{2\sqrt{J_2}}(J_2)_{\mathbf{T}}=\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\mathbf{S}, \tag{6.158}$$

y recordando que este gradiente es utilizado en el límite de plastificación en que $\sqrt{J_2}=k$, tenemos

$$\mathsf{f}_{\mathbf{T}}=\frac{1}{2k}\mathbf{S}. \tag{6.159}$$

Por otro lado

$$\dot{\mathsf{f}}=\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\dot{\mathbf{T}}=\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{T}}=\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\mathbf{S}\cdot(\dot{\mathbf{S}}+\dot{T}_m\mathbf{I})=\frac{1}{2\sqrt{J_2}}\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{S}}, \tag{6.160}$$

de donde $\dot{\mathsf{f}}>0$ equivale a $\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{S}}>0$. Finalmente, escribiendo $\mathsf{f}=0$ en la forma $\mathbf{S}\cdot\mathbf{S}=2k^2$, la ley de flujo plástico resulta

- **Material idealmente plástico**

$$\begin{cases}\mathbf{D}^p=\dfrac{\dot{\lambda}}{2k}\mathbf{S} & \text{con } \dot{\lambda}\geq 0 \text{ indeterminado, } \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}=2k^2 \text{ y } \mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{S}}=0,\\ \mathbf{D}^p=0 & \text{en los otros casos.}\end{cases} \tag{6.161}$$

- **Material con endurecimiento**

$$\begin{cases}\mathbf{D}^p=\dfrac{1}{H}\dfrac{\mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{S}}}{4k^2}\mathbf{S} & \text{para } H=H(\mathbf{T},\mathsf{h}),\ k=k(\mathsf{h}),\ \mathbf{S}\cdot\mathbf{S}=2k^2 \text{ y } \mathbf{S}\cdot\dot{\mathbf{S}}\geq 0,\\ \mathbf{D}^p=0 & \text{en los otros casos.}\end{cases} \tag{6.162}$$

Por otro lado, la función de disipación puede ser calculada utilizando la expresión $\Psi=\mathbf{T}(\mathbf{D}^p)\cdot\mathbf{D}^p$ y las igualdades anteriores, con lo que obtenemos

- **Material idealmente plástico**

$$\Psi=k\sqrt{2\mathbf{D}^p\cdot\mathbf{D}^p}. \tag{6.163}$$

- **Material con endurecimiento**

$$\Psi=k(\mathsf{h})\sqrt{2\mathbf{D}^p\cdot\mathbf{D}^p}. \tag{6.164}$$

6.9.2 Criterio de Tresca

En 1864 Tresca propone el siguiente criterio de plastificación

$$\mathsf{f}(\mathbf{T}) = \max_{i,j=1,2,3} |T_i - T_j| - 2k \leq 0, \tag{6.165}$$

donde T_i son las tensiones principales. Este criterio establece que el material presenta comportamiento plástico cuando la tensión cizallante máxima alcanza un valor crítico. Esta función, que es isotrópica, puede ser escrita en función de las tensiones principales del estado desviador de tensiones $\mathbf{S}$ (autovalores de $\mathbf{S}$) que están dadas por $S_i = T_i - T_m$. De esta forma, la función de Tresca puede ser reescrita como sigue

$$\mathsf{f}(\mathbf{S}) = \max_{i,j=1,2,3} |S_i - S_j| - 2k \leq 0, \tag{6.166}$$

lo que muestra que f es independiente de T_m (o I_1). Luego, corresponde a un material independiente de la tensión media y, por lo tanto, presenta deformaciones plásticas iso-volumétricas. Para este criterio, el valor de k se interpreta como sigue

- en el ensayo de tracción pura, donde el material plastifica para $T_{11} = \sigma_Y$, tenemos

$$\mathsf{f} = |T_{11}| - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{2}\sigma_Y, \tag{6.167}$$

- en el ensayo de corte puro, el material plastifica para $T_{12} = \tau_{YTresca}$, de donde

$$\mathsf{f} = 2|T_{12}| - 2k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \tau_{YTresca}. \tag{6.168}$$

La función de plasticidad que define el criterio de Tresca es no diferenciable, y puede ser substituida por la función vectorial de 6 componentes (modos de plastificación) dada por

$$\mathsf{f}_{ij} = T_i - T_j - 2k \leq 0 \quad i \neq j \quad i,j = 1,2,3, \tag{6.169}$$

las cuales son diferenciables. Éstas, definen los seis planos f_{ij} que determinan un prisma recto hexagonal de base regular, y cuyas aristas pertenecen al cilindro circular de Mises. La ley de la normalidad establece que, para estos casos, la deformación plástica es una combinación lineal de las normales a aquellas faces del prisma hexagonal que están activas en la tensión considerada. O sea

- si el modo (i,j) es el único activo y r es un índice diferente al i y al j ($r \neq i,j$), tenemos

$$\frac{\partial \mathsf{f}_{ij}}{\partial T_i} = 1 \quad \frac{\partial \mathsf{f}_{ij}}{\partial T_j} = -1 \quad \frac{\partial \mathsf{f}_{ij}}{\partial T_r} = 0, \tag{6.170}$$

  luego, los autovalores D_i^p de $\mathbf{D}^p$ son

$$D_i^p = \dot{\lambda}_{ij} \quad D_j^p = -\dot{\lambda}_{ij} \quad D_r^p = 0, \tag{6.171}$$

- si los modos (i,j) e (i,r) son los dos activos en la arista correspondiente a la tensión $\mathbf{T}$ resulta

$$D_i^p = \dot{\lambda}_{ij} + \dot{\lambda}_{ir} \quad D_j^p = -\dot{\lambda}_{ij} \quad D_r^p = -\dot{\lambda}_{ir}. \tag{6.172}$$

Todas estas expresiones pueden ser escritas de manera unificada

$$D_i^p = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (\dot{\lambda}_{ij} - \dot{\lambda}_{ji}) \quad i = 1,2,3, \tag{6.173}$$

donde para un material idealmente plástico es

$$\dot{\lambda}_{ij} \begin{cases} \geq 0 & \text{indeterminado para } T_i - T_j = 2k \text{ y } \dot{T}_i = \dot{T}_j, \\ = 0 & \text{en los otros casos,} \end{cases} \tag{6.174}$$

y para un material con endurecimiento es

$$\dot{\lambda}_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{H}(\dot{T}_i - \dot{T}_j) & \text{para } T_i - T_j = 2k \text{ y } \dot{T}_i - \dot{T}_j \geq 0, \\ 0 & \text{en los otros casos.} \end{cases} \tag{6.175}$$

Nuevamente, los resultados anteriores pueden ser colocados en forma compacta

$$D_i^p = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (\dot{\lambda}_{ij} - \dot{\lambda}_{ji}) \mathscr{H}(\dot{T}_i - \dot{T}_j) \mathscr{H}(T_i - T_j - 2k) \quad i = 1,2,3, \tag{6.176}$$

para plasticidad ideal o

$$D_i^p = \frac{1}{H} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{3} (T_i - T_j)^+ \mathscr{H}(T_i - T_j - 2k) \quad i = 1,2,3, \tag{6.177}$$

para plasticidad con endurecimiento.

Para encontrar la función de disipación correspondiente a este criterio de Tresca es necesario resolver el problema de optimización lineal

$$\Psi = \max_{T_1^*, T_2^*, T_3^*} \{(T_1^* D_1^p + T_2^* D_2^p + T_3^* D_3^p),\, T_i^* - T_j^* \leq \sigma_Y,\, i,j = 1,2,3,\, i \neq j\}. \tag{6.178}$$

La solución de este problema verifica

$$\Psi = \sigma_Y \max_{i=1,2,3} |D_i^p| = \frac{1}{2}\sigma_Y (|D_1^p| + |D_2^p| + |D_3^p|). \tag{6.179}$$

6.10 Criterios de Endurecimiento Frecuentemente Usados

Varias medidas han sido propuestas para definir el parámetro h que evalúa la historia recordada. A continuación describimos algunas de estas alternativas

- **Criterio energético**. En este caso se adopta el valor del trabajo plástico disipado como parámetro escalar de endurecimiento

$$\mathsf{h} = \int_0^t \mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p dt. \tag{6.180}$$

  Para los materiales que desarrollan deformaciones plásticas iso-volumétricas se tiene en particular

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p = (\mathbf{S} + T_m \mathbf{I}) \cdot \mathbf{D}^p = \mathbf{S} \cdot \mathbf{D}^p. \tag{6.181}$$

  El postulado de Drucker garantiza que h es positivo y monótonamente creciente ($\dot{\mathsf{h}} \geq 0$).
- **Criterio de Odqvist**. En este caso la historia recordada es representada por la intensidad de la deformación plástica acumulada

$$\mathsf{h} = \int_0^t \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{D}^p \cdot \mathbf{D}^p} dt. \tag{6.182}$$

  En el caso de deformaciones plásticas iso-volumétricas resulta $\mathrm{tr}\mathbf{D}^p = 0$ y, consecuentemente, el parámetro h representa la intensidad de las deformaciones cizallantes.
- **Criterio de la deformación plástica acumulada**. Para el caso de pequeñas deformaciones, la deformación plástica acumulada está dada por

$$\mathbf{E}^p = \int_0^t \mathbf{D}^p dt = \mathbf{E} - \mathbb{D}^{-1} \mathbf{T}. \tag{6.183}$$

  Como podemos apreciar, es un parámetro de valor tensorial adecuado para cuantificar la historia plástica anterior, pues se modifica solamente en los procesos plásticos.
  Una definición útil para el parámetro h y con un significado físico similar al anterior está dada por

$$\mathsf{h} = \lambda = \int_0^t \dot{\lambda} dt. \tag{6.184}$$

  que resulta un vector de tantas componentes como modos de plastificación presentes en la definición del criterio de admisibilidad plástica para las tensiones.

Ahora bien, una vez definido el criterio inicial de platificación $\mathsf{f}^0(\mathbf{T}) \leq 0$ y la medida del endurecimiento h, el criterio general de plastificación puede ser derivado del inicial estableciendo una ley de endurecimiento. En efecto, sea

$$\mathsf{f}^0(\mathbf{T}) = \Psi(\mathbf{T}) - k^0 \quad \text{con} \quad \Psi(\mathbf{O}) = 0, \tag{6.185}$$

luego los criterios más usuales de endurecimiento son los siguientes.

- **Endurecimiento isotrópico**. Este endurecimiento fue propuesto por Taylor y Quinney en 1931 y está definido de la siguiente forma

$$\mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h}) = \Psi(\mathbf{T}) - k(\mathsf{h}), \tag{6.186}$$

  donde $k(\mathsf{h})$ es una función tal que $k(0) = k^0$. Esto implica que la superficie de plastificación se expande uniformemente (de allí su nombre) según el valor de k.
- **Endurecimiento cinemático**. Este endurecimiento fue propuestopor Prager en 1958 y establece que

$$\mathsf{F}(\mathbf{T},\mathsf{h}) = \Psi(\mathbf{T} - \mathbf{T}^0(\mathsf{h})) - k^0, \tag{6.187}$$

  donde $\mathbf{T}^0(\mathsf{h})$ es una función de valor tensorial tal que $\mathbf{T}^0(0) = \mathbf{O}$, que representa la traslación de la superficie de plastificación en el espacio de tensiones.

6.11 Principios Variacionales para Análisis Incremental

En esta sección vamos a presentar el cálculo de la evolución de tensiones y desplazamientos de un cuerpo $\mathscr{B}$ de material elasto-plástico perfecto a medida que progresa un programa de cargas externas conocido. El problema consiste así en determinar el campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ y de tensiones $\mathbf{T}$ para un programa de carga $f(t)$ conocido. Con este objetivo, consideremos que en un cierto instante de tiempo, t_0, el cuerpo se encuentra en equilibrio y, para ese instante, las cargas sufren un incremento definido por su tasa $\dot{f}$. Luego, tenemos que determinar el campo de velocidades $\dot{\mathbf{u}}_0$, las tasas de tensiones $\dot{\mathbf{T}}_0$ relacionadas con el campo $\mathscr{D}(\dot{\mathbf{u}}_0)$ a través de las ecuaciones constitutivas elasto-plásticas tales que equilibren esa tasa de carga $\dot{f}$. Este problema esta caracterizado por el Principio de la Potencia Virtual, y es tal que

$$(\dot{\mathbf{T}}_0, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \langle \dot{f}, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{6.188}$$

donde $\mathscr{D}$ es el operador de deformación infinitesimal, y

$$\langle \dot{f}, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}} \dot{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial \mathscr{B}_a} \dot{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS. \tag{6.189}$$

Como veremos, este problema es equivalente a un principio de mínimo en variables cinemáticas, así como también a un principio de mínimo en las variables duales, es decir, las tensiones.

6.11.1 Principio de Mínimo para Velocidades

A continuación, enunciaremos el problema anterior como un problema de minimización en término de las velocidades. Este principio es conocido como Principio de Greenberg.

Principio de Mínimo para Velocidades
(Principio de Greenberg)

La solución $\dot{\mathbf{u}}_0 \in \text{Kin}_v$ del problema elasto-plástico ideal minimiza el siguiente funcional

$$\Pi_1(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{D},\mathbf{T}_0)\cdot\mathbf{D}dV - \langle \dot{f},\mathbf{v}\rangle, \tag{6.190}$$

donde $\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}$, y la notación $\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{D},\mathbf{T}_0)$ indica la relación constitutiva. Utilizando la expresión $\dot{\mathbf{T}} = \mathbb{D}(\mathbf{D} - \dot{\lambda}\mathsf{f}_{\mathbf{T}})$, podemos reescribir el funcional $\Pi_1(\mathbf{v})$ como sigue

$$\Pi_1(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} (\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} - \mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\dot{\lambda})dV - \langle \dot{f},\mathbf{v}\rangle, \tag{6.191}$$

con $\dot{\lambda}$ definido como sigue

- si $\mathsf{f}(\mathbf{T}^0) = 0$ entonces $\dot{\lambda} \geq 0, \dot{\mathsf{f}} \leq 0, \dot{\lambda}\cdot\dot{\mathsf{f}} = 0$,
- si $\mathsf{f}(\mathbf{T}^0) < 0$ entonces $\dot{\lambda} = 0$,

para $\dot{\mathsf{f}} = \mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\dot{\mathbf{T}}$ calculado en función de $\mathbf{D}$ de la siguiente forma

$$\dot{\mathsf{f}} = \mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0) - \dot{\lambda}\mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0)\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0). \tag{6.192}$$

En lo que sigue vamos a demostrar que $\dot{\mathbf{u}}_0, \mathbf{D}_0$ y $\dot{\mathbf{T}}_0$, solución del problema variacional definido en (6.188), minimiza el funcional de Greenberg. Consideremos la diferencia

$$\Delta = \Pi_1(\mathbf{v}) - \Pi_1(\dot{\mathbf{u}}_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} (\dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D} - \dot{\mathbf{T}}_0\cdot\mathbf{D}_0)dV - \langle \dot{f},\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}}_0\rangle, \tag{6.193}$$

para $\mathbf{v} \in \text{Kin}_v$, $\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}$ y $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{D},\mathbf{T}_0)$. Ahora bien, el campo $\mathbf{v} - \dot{\mathbf{u}}_0 \in \text{Var}_v$ y $\dot{\mathbf{T}}_0$ está equilibrado con $\dot{f}$, luego

$$\langle \dot{f},\mathbf{v}-\dot{\mathbf{u}}_0\rangle = \int_{\mathscr{B}} \dot{\mathbf{T}}_0\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{D}_0)dV, \tag{6.194}$$

con lo que obtenemos finalmente

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} (\dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D} + \dot{\mathbf{T}}_0\cdot\mathbf{D}_0 - 2\dot{\mathbf{T}}_0\cdot\mathbf{D})dV. \tag{6.195}$$

Esta diferencia puede ser escrita de una manera más conveniente empleando para ello las relaciones constitutivas

$$\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}^p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} = \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}}, \tag{6.196}$$

$$\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \mathbf{D}_0^p = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \mathbf{D}_0 = \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \dot{\mathbf{T}}_0, \tag{6.197}$$

luego, resulta

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} [\mathbb{D}^{-1}(\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0) \cdot (\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0) - 2\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot (\mathbf{D} - \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}})] dV. \tag{6.198}$$

Como podemos apreciar, el primer término del integrando es estrictamente positivo si $\dot{\mathbf{T}} \neq \dot{\mathbf{T}}_0$. El segundo témino puede ser reescrito de la siguiente forma

$$-2\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \mathbf{D}^p = -2\dot{\lambda}\,[\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0)]. \tag{6.199}$$

Si $\mathbf{T}_0$ es un estado elástico, es decir $\mathsf{f}(\mathbf{T}_0) < 0$, entonces $\dot{\lambda} = 0$ y el segundo término resulta nulo. Por otro lado, si $\mathsf{f}(\mathbf{T}_0) = 0$, la tasa $\dot{\mathbf{T}}_0$ será plásticamente admisible si $\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0) \leq 0$ por ser el material idealmente plástico y, a su vez, $\dot{\lambda} \geq 0$. Luego, el segundo término resulta también positivo o nulo. Como consecuencia de esto vemos que $\Pi_1(\mathbf{v})$ siempre será mayor, o a lo sumo igual, a $\Pi_1(\dot{\mathbf{u}}_0)$, siendo que la igualdad ocurre si y sólo si $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}_0$. Queda así demostrado que la solución minimiza el funcional.

Es facil ver que, no obstante el problema tenga unicidad en la tasa de tensión, lo mismo no ocurre con la velocidad. En efecto, si $\dot{\mathbf{u}}_0$ es solución, entonces $\dot{\mathbf{u}}_0 + \mathbf{v}^*$, para toda $\mathbf{v}^*$ asociada a una deformación puramente plástica, también minimiza el funcional. El caso más frecuente de falta de unicidad en las velocidades la tenemos en el *colapso plástico*, que es un fenómeno de deformación puramente plástica ilimitada bajo carga constante. En el ejemplo mostrado en la Figura 6.23 el colapso ocurre cuando las barras "1" y "2" alcanzan la tensión límite.

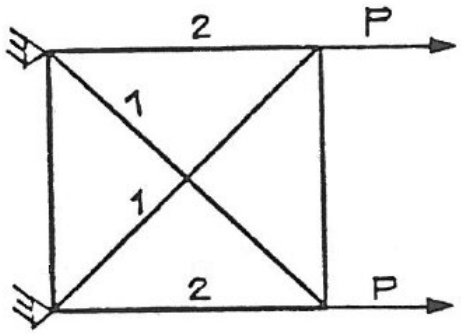


Fig. 6.23 Estructura de barras que alcanza el colapso plástico cuando las barras 1 y 2 alcanzan el estado límite de tensión.

6.11.2 Principio de Mínimo para Tasas de Tensión

A continuación vamos a presentar el principio *dual* al Principio de Greenberg esto es, el principio de mínimo en tasas de tensión, conocido como principio de Prager.

Principio de Mínimo para Tasas de Tensión
(Principio de Prager)

La solución $\dot{\mathbf{T}}_0 \in \text{Est}_{\dot{T}}$ del problema elasto-plástico ideal es también solución del siguiente problema de optimización con restricciones

$$\min_{\dot{\mathbf{T}} \in \text{Est}_{\dot{T}}} \{\Pi_2(\dot{\mathbf{T}}), \dot{\mathbf{T}} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\dot{\mathbf{T}}_0) \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B} \text{ en que } \mathsf{f}(\mathbf{T}) = 0\}, \tag{6.200}$$

donde

$$\Pi_2(\dot{\mathbf{T}}) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} dV - \int_{\partial \mathscr{B}_u} \dot{\mathbf{T}}\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS. \tag{6.201}$$

Esta formulación plantea un problema de minimización de un funcional cuadrático diferenciable (corresponde a la energia de deformación elástica complementaria) con restricciones lineales de igualdad, $\dot{\mathbf{T}} \in \text{Est}_{\dot{T}}$, y de desigualdad, $\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\dot{\mathbf{T}}_0) \leq 0$. A continuación, vamos a mostrar que $\dot{\mathbf{u}}_0$, $\mathbf{D}_0$ y $\dot{\mathbf{T}}_0$ minimizan el funcional propuesto. Para ello procedemos de manera similar a la realizada anteriormente para el funcional de Greenberg. Consideremos así la diferencia

$$\Delta = \Pi_2(\dot{\mathbf{T}}) - \Pi_2(\dot{\mathbf{T}}_0) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} (\mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \dot{\mathbf{T}}_0) dV - \int_{\partial \mathscr{B}_u} (\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0)\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS. \tag{6.202}$$

Como $\dot{\mathbf{T}}$ y $\dot{\mathbf{T}}_0$ pertenecen a $\text{Est}_{\dot{\mathbf{T}}}$, tenemos que $\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0$ es un estado autoequilibrado. Como a su vez $\mathbf{D}_0$ es cinemáticamente admisible, del PPVC (ver Capítulo 3) obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}} (\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0) \cdot \mathbf{D}_0 dV = \int_{\partial \mathscr{B}_u} (\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0)\mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{u}} dS. \tag{6.203}$$

Recordando que $\mathbf{D}_0 = \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_0 + \mathbf{D}^p{}_0$, y substituyendo estos resultados en la expresión (6.202) obtenemos

$$\Delta = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} [\mathbb{D}^{-1}(\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0) \cdot (\dot{\mathbf{T}} - \dot{\mathbf{T}}_0) + \mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \dot{\mathbf{T}}_0 + 2\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \mathbf{D}_0^p - 2\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}_0^p] dV. \tag{6.204}$$

Analicemos cada uno de los términos que forman parte del integrando del segundo miembro. Los dos primeros son estrictamente positivos, y el primero es nulo si y sólo si $\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}_0$. El tercer término es siempre nulo ya que $\mathbf{D}_0^p$ está asociado con $\dot{\mathbf{T}}_0$ por la ecuación constitutiva de materiales idealmente plásticos, garantizando $\dot{\mathbf{T}}_0 \cdot \mathbf{D}_0^p = 0$. Nos queda así el último término que lo podemos escribir de la siguiente forma

$$-2\dot{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}_0^p = -2\dot{\lambda}(\dot{\mathbf{T}}_0,\mathbf{T}_0)[\dot{\mathbf{T}}\cdot \mathrm{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0)], \tag{6.205}$$

que siempre es positivo o nulo. En efecto, Si $\mathrm{f}(\mathbf{T}_0) < 0$ luego $\dot{\lambda}(\dot{\mathbf{T}}_0,\mathbf{T}_0) = 0$. A su vez, si $\mathrm{f}(\mathbf{T}_0) = 0$, la restricción impuesta a las tasas virtuales $\dot{\mathbf{T}}$ asegura que el producto $\dot{\mathbf{T}}\cdot \mathrm{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T}_0) \leq 0$, resultando en ese caso $\dot{\lambda} \geq 0$.

La demostración queda así finalizada y, una vez más, obtenemos la unicidad de la tasa de tensión.

6.11.3 Unicidad de las Tensiones

En las secciones anteriores se mostró que el campo de tasas de tensión solución del problema (en tasas) de la elasto-plasticidad es único. Como consecuencia de esto, la distribución de tensiones también será única si la historia completa de carga es especificada desde el estado virgen (con cargas nulas) hasta el nivel actual de cargas. Esta es una de las diferencias con elasticidad, donde, para conocer la distribución de tensiones en un problema no dinámico, sólo es necesario conocer el estado actual de las cargas y los desplazamientos en la frontera.

Ahora bien, aun para un material plástico, la unicidad de las tensiones es asegurada si, además de las cargas y los desplazamientos en la frontera, las deformaciones plásticas son prescriptas. Esta formulación del teorema de unicidad de las tensiones puede ser transformado en un enunciado equivalente utilizando el concepto de *tensiones residuales*. El campo de tensiones residuales es la diferencia de las tensiones reales menos las tensiones perfectamente elásticas que se obtiene de un cuerpo idéntico al considerado, con iguales constantes elásticas, pero ilimitadamente elástico. Las tensiones residuales están así equilibradas con la carga nula. La unicidad de las tensiones se enuncia de esta forma estableciendo que el campo de tensiones residuales, autoequilibrado, esta unívocamente determinado por el campo de deformaciones plásticas.

6.11.4 Inecuación Variacional Evolutiva en Tensiones

En esta sección vamos a presentar una nueva caracterización variacional para el problema que consiste en una *inecuación variacional* que vincula el campo tensorial $\mathbf{T}(t)$ y su tasa temporal.

Inecuación Variacional Evolutiva

La evolución de las tensiones en un cuerpo elasto-plástico ideal es descripta por un campo función del tiempo $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x},t)$ que cumple con las condiciones iniciales para las tensiones y, **en cada instante** t, es tal que $\mathbf{T} \in \mathscr{K}$ y que satisface

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}^{-1}(\mathbf{T}-\mathbf{T}^*)\cdot\dot{\mathbf{T}}dV - \int_{\partial\mathscr{B}_u}(\mathbf{T}-\mathbf{T}^*)\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}}dS \leq 0 \quad \forall \mathbf{T}^* \in \mathscr{K}, \quad (6.206)$$

donde $\mathscr{K}$ es el conjunto de campos estáticamente admisibles, o sea equilibrados con la carga f en el instante t, y plásticamente admisibles, es decir tales que $\mathsf{f}(\mathbf{T}^*) \leq 0$ en todo punto $\mathbf{x}$ del cuerpo $\mathscr{B}$ en ese instante t. El conjunto $\mathscr{K}$ está así formalmente definido por

$$\mathscr{K} = \mathrm{Est}_T \cap \mathscr{P}, \quad (6.207)$$

donde

$$\mathscr{P} = \{\mathbf{T};\, \mathsf{f}(\mathbf{T}) \leq 0 \;\forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}\}. \quad (6.208)$$

Esta inecuación variacional puede ser obtenida de la siguiente forma empleando el PPVC. Observe que para todo campo virtual $\mathbf{T}^*$, equilibrado con la carga f en el instante t, su diferencia con el estado real de tensiones $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}-\mathbf{T}^*$ es autoequilibrada. Por otro lado, la tasa de deformación real $\mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{D}^p$ es cinemáticamente compatible. Luego, el PPVC establece que

$$\int_{\mathscr{B}}(\mathbf{T}-\mathbf{T}^*)\cdot(\mathbb{D}^{-1}\dot{\mathbf{T}}+\mathbf{D}^p)dV = \int_{\partial\mathscr{B}_u}(\mathbf{T}-\mathbf{T}^*)\mathbf{n}\cdot\dot{\mathbf{u}}dS \quad \forall \mathbf{T}^* \in \mathrm{Est}_T. \quad (6.209)$$

Aplicando ahora el Principio de la Potencia Máxima (PPM) para $\mathbf{T}$ y $\mathbf{D}^p$, que se corresponden a través de la ecuación constitutiva, obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}}(\mathbf{T}-\mathbf{T}^*)\cdot\mathbf{D}^p dV \geq 0 \quad \forall \mathbf{T}^* \in \mathscr{P}. \quad (6.210)$$

Basta ahora combinar estas dos relaciones para todo $\mathbf{T}^* \in \mathscr{K} = \mathrm{Est}_T \cap \mathscr{P}$ para obtener así la inecuación variacional propuesta.

6.11.5 Principio de Mínimo Cinemático en dos Campos

El principio de mínimo en velocidades (Principio de Greenberg dado por la minimización del funcional (6.191)) presenta una componente no diferenciable que está dada por el término

$$\Pi_1^{nd}(\mathbf{v}) = -\frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}}\mathbb{D}^{-1}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\dot{\lambda}dV, \quad (6.211)$$

donde $\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}$ y $\dot{\lambda}$ es la función de $\mathbf{v}$ no diferenciable correspondiente a la ecuación constitutiva elasto-plástica ideal dada por

$$\dot{\lambda} = \frac{\mathscr{H}(\mathsf{f})(\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}})^{+}}{\mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}}. \tag{6.212}$$

Una técnica conocida para evitar este inconveniente es substituir este término por otro funcional, ahora de dos campos $\mathbf{v}$ y $\dot{\lambda}$, independientes entre sí. En este sentido, el funcional

$$\Psi(\mathbf{D},\dot{\lambda}) = \int_{\mathscr{B}} \left(\frac{1}{2}\mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\dot{\lambda}^2 - \mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\dot{\lambda}\right) dV, \tag{6.213}$$

es apropiado para este fin, ya que

$$\min_{\dot{\lambda}\in\dot{\Lambda}} \Psi(\mathscr{D}\mathbf{v}^*,\dot{\lambda}) = \Pi_1^{nd}(\mathbf{v}^*), \tag{6.214}$$

donde (recordando que $\mathsf{f}(\mathbf{T}_0) = 0\ \forall \mathbf{x}\in\mathscr{B}$)

$$\dot{\Lambda} = \{\dot{\lambda};\ \dot{\lambda}\geq 0,\ \dot{\lambda}\cdot\mathsf{f}(\mathbf{T}_0) = 0\ \forall \mathbf{x}\in\mathscr{B}\}. \tag{6.215}$$

El resultado indicado en (6.214), cuya demostración dejamos como ejercicio para el lector (ver [303]), permite enunciar el principio propuesto por Capurso.

Principio de Mínimo Cinemático en dos Campos
(Principio de Capurso)

Todos los pares $(\dot{\mathbf{u}}_0,\dot{\lambda}_0)$ solución del problema elasto-plástico en tasas (por lo tanto $\dot{\mathbf{u}}_0$ es un extremo del funcional de Greenberg y $\dot{\lambda}_0$ asociado con $\dot{\mathbf{u}}_0$ vía ecuación constitutiva), forman el conjunto de soluciones (extremales) del siguiente problema de mínimo de dos campos

$$\min_{\mathbf{v}\in\mathrm{Kin}_v}\ \min_{\dot{\lambda}\in\dot{\Lambda}} \Pi_3(\mathbf{v},\dot{\lambda}), \tag{6.216}$$

donde

$$\Pi_3(\mathbf{v},\dot{\lambda}) = \Pi_1^d(\mathbf{v}) + \Psi(\mathbf{D},\dot{\lambda}) = \int_{\mathscr{B}} \left[\frac{1}{2}\mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{2}\mathbb{D}\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\dot{\lambda}^2 - \mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathsf{f}_{\mathbf{T}}\dot{\lambda}\right] dV - \langle f,\mathbf{v}\rangle, \tag{6.217}$$

y $\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v}$.
Aquí hemos utilizado la notación $\Pi_1^d(\mathbf{v})$ para referirnos a la parte diferenciable del funcional de Greenberg (6.191) y que corresponde al término

$$\Pi_1^d(\mathbf{v}) = \int_{\mathscr{B}} \mathbb{D}\mathbf{D}\cdot\mathbf{D}dV - \langle \dot{f},\mathbf{v}\rangle. \tag{6.218}$$

6.12 Relaciones Constitutivas Potenciales en Incrementos

A lo largo de este capítulo hemos presentado el comportamiento elasto-plástico empleando un punto de vista fenomenológico que ha conducido a la derivación de ecuaciones constitutivas en términos de tasas de desplazamientos, tasas de deformaciones, tasas de deformaciones plásticas y tasas de tensiones que satisfacen los criterios de admisibilidad plástica, permitiendo para cada instante de tiempo procesos de carga (que pueden o no inducir tasas de deformaciones plásticas) y procesos de descarga (que inducen un comportamiento puramente elástico). Empleando estas ecuaciones constitutivas fenomenológicas en término de tasas, mostramos también la derivación de funcionales cuya minimización proporcionaba la determinación de estas tasas en cada instante de tiempo y que, además de satisfacer las ecuaciones elasto-plásticas, eran capaces de equilibrar, para ese instante de tiempo, la variación de las cargas, $\dot{f}$.

Ahora bien, si usamos estos resultados (que son exactos en términos de tasas) para avanzar en el tiempo a través de incrementos finitos de tamaño Δt, será necesario incorporar procedimientos a posteriori de manera a corregir posibles violaciones de la admisibilidad plástica o existencia de procesos locales de descarga elástica que puedan ocurrir en ese incremento finito de tiempo.

Surge así la necesidad de desarrollar una formulación elasto-plástica en términos de incrementos (finitos) en desplazamientos, deformaciones, deformaciones plásticas y tensiones, que sea capaz de satisfacer, de la misma manera que ocurría con la formulación en tasas, todas las restricciones impuestas por el comportamiento elasto-plástico y el proceso de carga.

Motivados por los comentarios anteriores, el objetivo de esta sección es la derivación de estas ecuaciones constitutivas *incrementales* así como la derivación de principios variacionales que permitan el cálculo de estos incrementos incorporando la descripción total del fenómeno elasto-plástico incluyendo equilibrio, compatibilidad y admisibilidad de las deformaciones plásticas, así como procesos locales de descarga elástica. De esta manera, estos principios son particularmente apropiados para establecer métodos numéricos que eliminan todo tipo de procedimiento a posteriori como los que observamos anteriormente.

Con el objetivo de hacer una presentación compacta, vamos a recurrir a un abordaje diferente al usado hasta aquí, el cual consistirá en la derivación de potenciales generalizados para incrementos de tensiones y deformaciones fundados en conceptos termodinámicos y donde la no diferenciabilidad será atendida empleando el concepto de subdiferencial.

6.12.1 Ecuaciones Constitutivas en Tasas

En esta sección vamos a rever las ecuaciones constitutivas elasto-plásticas presentadas en las secciones anteriores pero ahora vistas dentro de este nuevo abordaje de potenciales generalizados fundados en conceptos termodinámicos. Para ello, en lo

que sigue, y como ya venimos admitiendo desde el comienzo de este capítulo, vamos a limitar la presentación dentro del rango de pequeñas deformaciones, y vamos a admitir la existencia de un potencial termodinámico dado por el funcional de energía libre $\Psi = \Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p, \alpha)$ dependiente de la deformación total, $\mathbf{E}$, de la variable interna dada por la deformación plástica total (acumulada), $\mathbf{E}^p$, y de la variable interna asociada al endurecimiento del material, α, que puede ser de carácter escalar, vectorial o tensorial de acuerdo con el mecanismo de endurecimiento que se desea representar ([134]). En particular, vamos a asumir que este funcional de energía libre es diferenciable y que está dado por la suma de dos funcionales convexos, uno, Ψ^e, dependiente de la diferencia $\mathbf{E} - \mathbf{E}^p$ (es decir dependiente de la deformación puramente elástica en el instante considerado) y el otro, Ψ^h, responsable por la parte de endurecimiento del material. Luego

$$\Psi(\mathbf{E}, \mathbf{E}^p, \alpha) = \Psi^e(\mathbf{E} - \mathbf{E}^e) + \Psi^h(\alpha). \tag{6.219}$$

Como consecuencia de los principos clásicos de la termodinámica aplicada al comportamiento de los materiales, tenemos que las *fuerzas internas termodinámicas generalizadas*, caracterizadas por el estado de tensiones $\mathbf{T}$ y el esfuerzo interno generalizado A asociado al endurecimiento, están dadas por

$$\mathbf{T} = \nabla\Psi^e(\mathbf{E} - \mathbf{E}^p), \tag{6.220}$$

$$A = \nabla\Psi^h(\alpha), \tag{6.221}$$

donde la operación ∇ se entiende como el gradiente del funcional respecto a su variable. Esto es, respecto a la deformación elástica $\mathbf{E}^e = \mathbf{E} - \mathbf{E}^p$ y a la variable interna α, respectivamente, para Ψ^e y Ψ^h. De esto, se sigue que A podrá ser caracterizado por un campo escalar, vectorial o tensorial dependiendo de la naturaleza de la variable interna α asociada al endurecimiento.

Como asumimos que estos funcionales son convexos, podemos determinar los potenciales conjugados (complementares) a través de la transformación de Legendre (o Fenchel-Legendre). Es decir

$$\Psi_c^e(\mathbf{T}) = \sup_{\mathbf{E}^e \in \mathscr{W}} \{\mathbf{T} \cdot \mathbf{E}^e - \Psi^e(\mathbf{E}^e)\} \quad \Psi_c^h(A) = \sup_{\alpha^* \in \mathfrak{H}} \{A \cdot \alpha^* - \Psi^h(\alpha^*)\}, \tag{6.222}$$

donde $\mathscr{W}$ es el espacio de las deformaciones y $\mathfrak{H}$ es el espacio de las variables internas de endurecimiento. Estos funcionales complementares permiten obtener las expresiones inversas a las presentadas en (6.220)-(6.221) dadas por

$$\mathbf{E} - \mathbf{E}^p = \nabla\Psi_c^e(\mathbf{T}), \tag{6.223}$$

$$\alpha = \nabla\Psi_c^h(A). \tag{6.224}$$

Por otro lado, la segunda ley de la termodinámica implica la siguiente restricción para estas ecuaciones constitutivas

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p - A \cdot \dot{\alpha} \leq 0. \tag{6.225}$$

La condición suficiente para que el material satisfaga la segunda ley de la termodinámica es satisfacer el Principio de Máxima Disipación (ver el Principio de Potencia Máxima enunciado en secciones anteriores). Como consecuencia de esto, existe un *Potencial de Disipación*, que llamaremos $\mathfrak{D} = \mathfrak{D}(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha})$, para las fuerzas termodinámicas $(\mathbf{T}, A)$ que es un funcional convexo no diferenciable de las tasas de las variables internas $(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha})$ y que depende también del estado actual de $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^p$ y α. Luego las ecuaciones constitutivas (6.220)-(6.221) y (6.223)-(6.224) se completan con la siguiente *condición de normalidad*

$$(\mathbf{T}, A) \in \partial\mathfrak{D}(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha}), \tag{6.226}$$

donde la notación $\partial\mathfrak{D}(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha})$ denota el *subdiferencial* de $\mathfrak{D}$ en el punto $(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha})$, es decir, el *conjunto* de todos los *subgradientes* $(\mathbf{T}, A)$ que satisfacen la siguiente condición variacional ([77])

$$\mathfrak{D}(\mathbf{D}^{p*}, -\dot{\alpha}^*) - \mathfrak{D}(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha}) \geq \mathbf{T} \cdot (\mathbf{D}^{p*} - \mathbf{D}^p) - A \cdot (\dot{\alpha}^* - \dot{\alpha}) \qquad \forall (\mathbf{D}^{p*}, \dot{\alpha}^*) \in \mathscr{W} \times \dot{\mathfrak{H}}, \tag{6.227}$$

donde $\dot{\mathfrak{H}}$ es el espacio de las tasas de las variables internas de endurecimiento. Por lo tanto, es suficiente que $\mathfrak{D}$ tenga un mínimo en $(\mathbf{O}, 0)$ para satisfacer la segunda ley de la termodinámica (6.225). De hecho, y bajo estas hipótesis, podemos tomar $(\mathbf{D}^{p*}, -\dot{\alpha}^*) = (\mathbf{O}, 0)$ en (6.227) para obtener (6.225).

Para obtener la expresión inversa de la condición de normalidad (6.226) procedemos primero a calcular el potencial de disipación complementar $\mathfrak{D}_c(\mathbf{T}, A)$ empleando la transformación de Fenchel-Legendre

$$\mathfrak{D}_c(\mathbf{T}, A) = \sup_{(\mathbf{D}^{p*}, -\alpha^*) \in \mathscr{W} \times \mathfrak{H}} \{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^{p*} - A \cdot \dot{\alpha}^* - \mathfrak{D}(\mathbf{D}^{p*}, -\dot{\alpha}^*)\}. \tag{6.228}$$

Luego, la expresión inversa a la relación (6.226) puede ser escrita como

$$(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha}) \in \partial\mathfrak{D}_c(\mathbf{T}, A). \tag{6.229}$$

En particular, el potencial de disipación que caracteriza un material plástico estándar está dado por la función soporte del conjunto $\mathscr{P}$[1] que contiene todas las fuerzas internas termodinámicamente admisibles $(\mathbf{T}, A)$ y que, evidentemente, incluye el origen $(\mathbf{O}, 0)$. Luego, en este caso tenemos

$$\mathfrak{D}(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha}) = \sup_{(\mathbf{T}, A) \in \mathscr{P}} \{\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}^p - A \cdot \dot{\alpha}\}. \tag{6.230}$$

Es importante notar que $\mathfrak{D}$ es positivamente homogénea, de primer grado y no estrictamente convexa con mínimo en $(\mathbf{O}, 0)$. A su vez, es al menos no diferenciable

[1] Dado el conjunto convexo $C = \{u, u \in \mathscr{U}\}$ la función $S_C : \mathscr{U}' \to \mathbb{R}$ definida por $S_C(d) = \sup_{u \in C} \langle d, u \rangle$, donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto de dualidad entre los espacios $\mathscr{U}$ y su dual $\mathscr{U}'$, es llamada *función soporte del conjunto C*

en el origen y $\partial\mathfrak{D}(\mathbf{O},0) = \mathscr{P}$. Por otro lado, dado $(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha})$ el supremo en (6.230) es alcanzado para $(\mathbf{T},A)$ tal que

$$(\mathbf{T}^* - \mathbf{T}) \cdot \mathbf{D}^p - (A^* - A) \cdot \dot{\alpha} \leq 0 \quad \forall (\mathbf{T}^*, A^*) \in \mathscr{P}. \tag{6.231}$$

Como vimos en las secciones anteriores, por razones prácticas, es común definir $\mathscr{P}$ a través de m superficies regulares $\mathsf{f}_i(\mathbf{T},A)$ llamadas *modos de plastificación* (ver [174]). Luego, definiendo como antes a f siendo el vector cuyas componentes son estos modos de plastificación, el conjunto $\mathscr{P}$ queda definido como sigue

$$\mathscr{P} = \{(\mathbf{T},A); \mathsf{f}(\mathbf{T},A) \leq 0\}. \tag{6.232}$$

Si la trasformación indicada en (6.228) la aplicamos a la definición del potencial de disipación $\mathfrak{D}$ dada por la (6.230), obtenemos

$$\mathfrak{D}_c(\mathbf{T},A) = \mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T},A) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\mathbf{T},A) \in \mathscr{P}, \\ +\infty & \text{si } (\mathbf{T},A) \notin \mathscr{P}, \end{cases} \tag{6.233}$$

donde $\mathscr{I}_{\mathscr{P}}$ es la función indicatriz del conjunto $\mathscr{P}$. Observamos aquí que la restricción $(\mathbf{T},A) \in \mathscr{P}$ está impuesta implícitamente por (6.229) dado que $\partial\mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T},A)$ es un conjunto vacío si $(\mathbf{T},A) \notin \mathscr{P}$. Con esto, la regla del flujo plástico (6.229) puede ser interpretada geométricamente imponiendo que las tasas plásticas $(\mathbf{D}^p, -\dot{\alpha})$ pertenezcan al cono de las normales a $\mathscr{P}$ en $(\mathbf{T},A)$ caracterizado por (6.231). En función de los modos de plastificación esto queda caracterizado por

$$\mathbf{D}^p = \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T},A)\dot{\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \nabla_{\mathbf{T}} \mathsf{f}_i(\mathbf{T},A)\dot{\lambda}_i, \tag{6.234}$$

$$-\alpha = \mathsf{f}_A(\mathbf{T},A) \cdot \dot{\lambda} = \sum_{i=1}^{m} \nabla_A \mathsf{f}_i(\mathbf{T},A)\dot{\lambda}_i, \tag{6.235}$$

donde el (campo vectorial) factor de plasticidad $\dot{\lambda}$ está restringido por las siguientes relaciones de complementariedad lineal

$$\mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T},A)\dot{\lambda} = 0 \quad \mathsf{f}_{\mathbf{T}}(\mathbf{T},A) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0. \tag{6.236}$$

Finalmente, y como consecuencia de (6.231) la siguiente *condición de consistencia plástica* es obtenida

$$\dot{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D}^p - \dot{A} \cdot \dot{\alpha} = 0. \tag{6.237}$$

6.12.2 Modelo en Incrementos de Deformación y Tensión

Las relaciones deducidas en la sección anterior representan el comportamiento constitutivo exacto dentro de la estructura de lo que es llamado *material elasto-plástico*

estándar. No obstante esto, estas expresiones no son suficientes cuando procuramos avanzar en el tiempo a través de incrementos finitos de tensiones y deformaciones, ya que tales incrementos no pueden ser simplemente obtenidos empleando sus respectivas tasas debido a que, usando tal procedimiento, existiría la posibilidad de violar este comportamiento. Así, esta sección tiene por objetivo deducir estas ecuaciones constitutivas incrementales de forma que puedan ser usadas sin recurrir a artificios numéricos a posteriori para satisfacer procesos de descarga elástica y admisibilidad plástica eventualmente violentados el final del incremento. Evidentemente, las ecuaciones que vamos a presentar son por naturaleza *aproximadas*, ya que no existen formulaciones exactas en términos de incrementos finitos para fenómenos dependiente del *camino* es decir, que requieren conocer toda la historia del proceso de carga a que el material está siendo sometido.

Con estas consideraciones presentes, supongamos que en el instante t conocemos el estado de las variables del problema, es decir, conocemos $\mathbf{E}$, $\mathbf{E}^p$, $\mathbf{E}^e = \mathbf{E} - \mathbf{E}^p$, para las deformaciones totales, elásticas y plásticas. Conocemos también el estado α correspondiente a la variable relacionada con el endurecimiento y las fuerzas internas termodinámicas $(\mathbf{T}, A)$. Los incrementos (finitos) en estas variables, cuando pasamos de t para $t + \Delta t$, serán representados por estas mismas variables pero ahora precedidas por el símbolo Δ.

En lo que sigue vamos a proponer la siguiente versión *incremental* del conjunto de expresiones dadas por la ecuación de flujo plástico (6.229), y la relación potencial entre las variables α y A dada en (6.221)

$$(\Delta \mathbf{E}^p, -\Delta \alpha) \in \partial \mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}, A + \Delta A), \tag{6.238}$$

con

$$\Delta \alpha = \nabla J_c^h(\Delta A), \tag{6.239}$$

donde

$$J_c^h(\Delta A) = \Psi_c^h(A + \Delta A) - [\Psi_c^h(A) + \nabla \Psi_c^h(A) \cdot \Delta A]. \tag{6.240}$$

Las siguientes ponderaciones justifican esta propuesta de aproximación.

- Modificaciones en las deformaciones plásticas $\mathbf{E}^p$ y α como establecidas por estas expresiones incrementales se están suponiendo relacionadas con el valor de las fuerzas termodinámicas al final del incremento. Esta es una buena aproximación para los casos de procesos elásticos y procesos locales de descarga elástica que ocurran en el comienzo del incremento y para el caso de procesos plásticos (desde que no exista una descarga elástica durante el incremento).
- La admisibilidad plástica de los esfuerzos internos al final del incremento $(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}, A + \Delta A)$ es impuesta por la ecuación (6.239) ya que, caso contrario, $\partial \mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}, A + \Delta A)$ sería un conjunto vacío.
- La ecuación (6.239) es la versión incremental de la ecuación (6.221), no envolviendo ninguna aproximación. Por otro lado, J_c^h es convexa y diferenciable porque así lo es Ψ_c^h.

Antes de continuar vamos a provar un resultado que será fundamental para nuestra presentación. Sea

$$j(s) = \inf_a \{h(a),\ (s,a) \in G\} = \inf_a \gamma(s,a)$$

donde

$$\gamma(s,a) = h(a) + \mathscr{I}_G(s,a),$$

con las siguientes hipótesis

i) La función h es diferenciable y estrictamente convexa.
ii) El conjunto G es cerrado y (no estrictamente) convexo y contiene el origen es decir ($s = 0$, $a = 0$)

Luego los siguientes Lemas son verdaderos ([77]).

Lema 6.1 *$j(s)$ es una función continua y convexa definida en*

$$Dom(j) = \{s; \exists a \text{ tal que } (s,a) \in G\}.$$

Lema 6.2 *Si, adicionalmente, $h(a) \geq h(0)\ \forall a$, luego, para todo s tal que $(s,0) \in G$ resulta $j(s) = 0$.*

Con estos resultados podemos plantear la siguiente proposición.

Proposición 6.1. *Dado $s \in Dom(j)$, con j como definido anteriormente. Luego, las siguientes relaciones son equivalentes*

- $p \in \partial j(s)$,
- *para algún a resulta $(p, -\nabla h(a)) \in \partial \mathscr{I}_G(s,a)$.*

Para demostrar la proposición anterior el lector puede recurrir a los resultados del análisis convexo expuestos en [77]

Aplicando ahora esta proposición, las ecuaciones (6.238) y (6.239) son equivalentes a

$$\Delta E^p \in \partial J_c^p(\Delta \mathbf{T}), \tag{6.241}$$

donde

$$J_c^p(\Delta \mathbf{T}) = \inf_{\Delta A^*} \{J_c^h(\Delta A^*),\ (\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}, A + \Delta A^*) \in \mathscr{P}\}, \tag{6.242}$$

o equivalentemente

$$J_c^p(\Delta \mathbf{T}) = \inf_{\Delta A^*} \{J_c^h(\Delta A^*) + \mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}, A + \Delta A^*)\}. \tag{6.243}$$

Es importante observar que este funcional en plasticidad ideal se reduce a $\mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T})$.

El pseudo potencial (6.241) correspondiente al flujo plástico es la base para la derivación formal de las relaciones incrementales elasto-plásticas. Para ello reescribamos (6.220) en su forma equivalente exacta en términos de incrementos

$$\Delta \mathbf{E} = \Delta \mathbf{E}^e + \Delta \mathbf{E}^p, \tag{6.244}$$

$$\Delta \mathbf{E}^e = \nabla J_c^e(\Delta \mathbf{T}), \tag{6.245}$$

donde

$$J_c^e(\Delta\mathbf{T}) = \Psi_c^e(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}) - [\Psi_c^e(\mathbf{T}) + \Delta\mathbf{T}\cdot\nabla\Psi_c^e(\mathbf{T})]. \tag{6.246}$$

Ahora combinando (6.244), (6.245) y (6.241), obtenemos

$$\Delta\mathbf{E} \in \partial J_c^{ep}(\Delta\mathbf{T}), \tag{6.247}$$

donde

$$\begin{aligned} J_c^{ep}(\Delta\mathbf{T}) = J_c^e(\Delta\mathbf{T}) + J_c^p(\Delta\mathbf{T}) = \\ \inf_{\Delta A^*}\{J_c^e(\Delta\mathbf{T}) + J_c^h(\Delta A^*),\ (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}, A+\Delta A^*) \in \mathscr{P}\} = \\ \inf_{\Delta A^*}[J_c^e(\Delta\mathbf{T}) + J_c^h(\Delta A^*) + \mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}, A+\Delta A^*) \in \mathscr{P}\}. \end{aligned} \tag{6.248}$$

Este funcional es estrictamente convexo, coercitivo y semi-continuo inferiormente en virtud de la parte elástica ser estrictamente convexa y coercitiva, y el término plástico convexo. Este potencial complementar elasto-plástico en incrementos puede ser no diferenciable toda vez que la parte J_c^p lo sea. Un ejemplo de esto lo tenemos en plasticidad ideal.

La ecuación constitutiva inversa la podemos obtener derivando el potencial J^{ep} conjugado del J_c^{ep} vía la transformada de Fenchel-Legendre

$$J^{ep}(\Delta\mathbf{E}) = \sup_{\Delta\mathbf{T}^*}\{\Delta\mathbf{T}^*\cdot\Delta\mathbf{E} - J_c^{ep}\}, \tag{6.249}$$

o introduciendo (6.248) como sigue

$$\begin{aligned} J^{ep}(\Delta\mathbf{E}) = \sup_{(\Delta\mathbf{T}^*, \Delta A^*)}\{\Delta\mathbf{T}^*\cdot\Delta\mathbf{E} - J_c^e(\Delta\mathbf{T}^*) - J_c^h(\Delta A^*),\ (\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}^*, A+\Delta A^*) \in \mathscr{P}\} = \\ \sup_{(\Delta\mathbf{T}^*, \Delta A^*)}\{\Delta\mathbf{T}^*\cdot\Delta\mathbf{E} - J_c^e(\Delta\mathbf{T}^*) - J_c^h(\Delta A^*) - \mathscr{I}_{\mathscr{P}}(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}^*, A+\Delta A^*)\}. \end{aligned} \tag{6.250}$$

Como resultado de todo esto hemos obtenido

$$\Delta\mathbf{T} \in \partial J^{ep}(\Delta\mathbf{E}) = \nabla J^{ep}(\Delta\mathbf{E}) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\mathbf{E} \in \partial J_c^{ep}(\Delta\mathbf{T}). \tag{6.251}$$

De hecho, resultados del análisis convexo (ver [77, 230]) establecen que el conjunto $\partial J^{ep}(\Delta\mathbf{E})$ coincide con el conjunto de soluciones del problema (6.249). En particular, este problema tiene una solución finita única porque J_c^{ep} es coercitivo y estrictamente convexo. Por lo tanto, el subdiferencial de J^{ep} contiene sólo el elemento $\Delta\mathbf{T}$ para cada $\Delta\mathbf{E}$. En otras palabras, J^{ep} es diferenciable.

6.12.3 Principio Variacional en Incrementos Finitos

Para simplificar la presentación, en lo que sigue vamos a suponer que las condiciones de contorno en desplazamientos no varían en el tiempo y que el estado del cuerpo es conocido en el instante t. Luego, el PPV en el instante $t+\Delta t$ establece lo siguiente

$$(\mathbf{T}+\Delta\mathbf{T}, \mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*-\Delta\mathbf{u})) = \langle f_{t+\Delta t}, \Delta\mathbf{u}^*-\Delta\mathbf{u}\rangle \quad \forall\Delta\mathbf{u}^*\in \mathrm{Var}_u, \tag{6.252}$$

donde $\Delta\mathbf{u}$ y $\Delta\mathbf{T}$ están relacionados por la ecuación constitutiva incremental elasto-plástica $\Delta\mathbf{T} = \nabla J^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}))$, y donde recuerde que $(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}dV$.

Esta ecuación constitutiva, vimos, tiene la propiedad

$$J^{ep}(\Delta\mathbf{E}^*) - J^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) \geq \Delta\mathbf{T}\cdot(\Delta\mathbf{E}^*-\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) \quad \forall\Delta\mathbf{E}^*\in\mathscr{W}. \tag{6.253}$$

En particular para los $\Delta\mathbf{E}^*$ compatibles, la expresión anterior toma la forma

$$J^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*)) - J^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) \geq \Delta\mathbf{T}\cdot\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*-\Delta\mathbf{u}) \quad \forall\Delta\mathbf{u}^*\in\mathrm{Var}_u. \tag{6.254}$$

Integrando en el dominio $\mathscr{B}$ tenemos

$$\int_{\mathscr{B}} J^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*))dV - \int_{\mathscr{B}} J^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}))dV \geq (\Delta\mathbf{T}, \mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*-\Delta\mathbf{u})) \quad \forall\Delta\mathbf{u}^*\in\mathrm{Var}_u. \tag{6.255}$$

Designando con $\mathsf{J}^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) = \int_{\mathscr{B}} J^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}))dV$ al potencial *total* elasto-plástico incremental, la expresion anterior puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\mathsf{J}^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*)) - \mathsf{J}^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) \geq (\Delta\mathbf{T}, \mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*-\Delta\mathbf{u})) \quad \forall\Delta\mathbf{u}^*\in\mathrm{Var}_u. \tag{6.256}$$

Finalmente, substituyendo este resultado en (6.252) obtenemos

$$\mathsf{J}^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*)) - \mathsf{J}^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) \geq \langle f_{t+\Delta t}, \Delta\mathbf{u}^*-\Delta\mathbf{u}\rangle - (\mathbf{T}, \mathscr{D}(\Delta\mathbf{u}^*-\Delta\mathbf{u})) \quad \forall\Delta\mathbf{u}^*\in\mathrm{Var}_u, \tag{6.257}$$

que reagrupando términos y llamando

$$\Pi^{ep}(\Delta\mathbf{u}) = \mathsf{J}^{ep}(\mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) + (\mathbf{T}, \mathscr{D}(\Delta\mathbf{u})) - \langle f_{t+\Delta t}, \Delta\mathbf{u}\rangle, \tag{6.258}$$

obtenemos finalmente el siguiente principio de mínimo: Determinar $\Delta\mathbf{u}\in\mathrm{Var}_u$ tal que

$$\Pi^{ep}(\Delta\mathbf{u}) = \inf_{\Delta\mathbf{u}^*\in\mathrm{Var}_u} \Pi^{ep}(\Delta\mathbf{u}^*). \tag{6.259}$$

Llegamos así a un problema variacional en términos de incrementos finitos cuya solución proporciona los incrementos $\Delta\mathbf{u}$, $\Delta\mathbf{E}^e$, $\Delta\mathbf{T}$, ΔA, $\Delta\alpha$, $\Delta\mathbf{E}^p$ y $\Delta\lambda$ tales que satisfacen las ecuaciones elasto-plásticas incrementales propuestas, y que garantizan

al final del incremento todas las restricciones de admisibilidad plástica y procesos de descarga elástica o procesos de carga plástica. En este sentido, el lector tiene que tener presente que por detrás del potencial J^{ep} están implícitas todas las relaciones constitutivas que permiten el cálculo de esas variables incrementales.

Finalmente, de la misma manera que trabajamos con J^{ep}, podríamos haber trabajado con J_c^{ep} pero, ahora, usando el Principio de la Potencia Virtual Complementaria, obteniendo así un principio de mínimo en incrementos de tensiones. Esto, como la derivación de otros principios variacionales mixtos envolviendo diversas variables incrementales, dejamos como ejercicio para el lector, que podrá obtener un conjunto de principios variacionales similares a los obtenidos en elasticidad (ver Capítulo 4).

6.13 Lectura Adicional

El lector interesado en aumentar los conocimientos en los temas presentados en este capítulo puede consultar las publicaciones indicadas en la bibliografía al final de este trabajo. En particular, los siguientes trabajos han sido utilizados en la preparación de este capítulo

1) **Libros**: J.B. Martin [180], R. Hill [138], L. M. Kachanov [151], W. T. Koiter [156], J. Mandel [177], M. A. Cohn e G. Maier [51], C. Johnson [148], R. A. Feijóo y E. Taroco [91].
2) **Publicaciones en general**: H. J. Greenberg [126], G. Maier [173, 174], G. Maier e J. Munzo [175], N. Zouain, R. A. Feijóo e E. Taroco [305, 304], N. Zouain e R. A. Feijóo [302, 303]

Parte III
COMPONENTES ESTRUCTURALES

A lo largo del desarrollo de la humanidad, y presionados por la necesidad de la construcción de elementos estructurales inherentes a este desarrollo, los ingenieros, arquitectos, físicos y matemáticos se vieron en la necesidad de obtener modelos mecánicos suficientemente precisos como para representar adecuadamente el comportamiento de estos elementos, pero al mismo tiempo, lo suficientemente simplificados como para obtener soluciones cerradas. Entre estos elementos estructurales, y creciendo en su complejidad, podemos citar arcos, bóvedas, vigas, placas y cáscaras. Lo anterior, conjuntamente con las ventajas que estos tipos de componentes presentan para soportar solicitaciones diversas en su vida útil, ha contribuido a que sus aplicaciones se hayan extendido a diversas áreas de la ingeniería.

Lamentablemente, es común ver en la literatura científica la presentación de los modelos mecánicos incorporando en ellos la propia complejidad del comportamiento del material. Al proceder de esta manera, muchas veces el lector queda confuso ya que en la gran mayoría de las veces los conceptos/princípios básicos, válidos para cualquier material, pasan desapercibidos frente a la propia complejidad asociada a la representación del comportamiento material.

Las razones vinculadas a este aspecto se deben fundamentalmente a cómo surgieron estas teorías/modelos que, en su mayoría, fueron por primera vez presentados usando materiales elásticos. De hecho, en los siglos XVIII-XIX hubo un período productivo en el cual fueron bien establecidos los modelos simples de componentes estructurales elásticos. En particular, el desarrollo de la teoría de vigas realizada por Euler, por diversos miembros de la familia Bernoulli y por Coulomb permanece entre los aspectos más usados de la mecánica estructural, en gran parte debido a su simplicidad y en parte a su utilidad en la ingeniería estructural, donde vigas (y columnas) juegan un papel fundamental.

Surge así la necesidad de colocar la presentación de estos modelos dentro de un enfoque totalmente general, e independiente del comportamiento del material con el cual será construido el componente. En este sentido, la *formulación variacional* y su estructura asociada *Método de la Potencia Virtual* presentada en el Capítulo 3 viene al encuentro de este objetivo al proporcionar exactamente los fundamentos mecánicos y matemáticos que gobiernan la cinemática y el equilibrio en el problema en cuestión. James Bernoulli en 1705 ya proponía que la curvatura en las vigas (elásticas) era proporcional al momento flector aplicado. Por su parte, Euler, conjuntamente con Daniel Bernoulli, en 1751 usó esta teoría para incorporar el problema de la vibración transversal, así como en 1744 Euler realizó su famoso trabajo sobre el pandeo (inestabilidad) de vigas (columnas) sujetas a cargas de compresión. También, y siguiendo la sugerencia de Daniel Bernoulli en 1742, Euler en 1744 introdujo por primera vez la idea de *energía de deformación por unidad de longitud de la viga* (elástica) como proporcional al cuadrado de su curvatura. Es más, adoptó la energía total de deformación como la cantidad que debía hacer estacionária empleando para ello los conceptos del cálculo variacional (que estaban siendo desarrollados por estos mismos investigadores), obteniendo así las ecuaciones de equilibrio y calculando los desplazamientos. Estos mismos conceptos variacionales fueron fundamentales para las contribuciones realizadas en el comienzo de 1800 por matemáticos franceses en la teoría de pequeños desplazamientos transversales

y vibraciones de *placas elásticas*. Esta teoría fue desarrollada por una mujer, Sophie Germain, y posteriormente por Simeon Denis Poisson, considerando la placa como plano elástico que resiste a curvatura. El desarrollo definitivo fue alcanzado posteriormente por Navier pocos años después, proponiendo las expresiones correctas asociadas con la energía de deformación y las ecuaciones a derivadas parciales que gobiernan el problema. Corresponde en este momento observar que surgieron ciertas dificultades asociadas con las condiciones de contorno en los bordes libres de la placa (no se pueden colocar simultáneamente prescripciones y momentos torsores y de fuerzas transversales cizallantes. Esto fue definitivamente resuelto por el físico alemán Gustav Robert Kirchhoff que, empleando una vez más, el principio del trabajo virtual (equivalente al principio de la potencia virtual) bajo la hipótesis de que fibras originalmente ortogonales al plano de la placa se mantenían ortogonales después de la deformacón. Como un primer paso en la definición de la teoría de cáscaras, en los primeros años de 1770, Euler estudió la deformación de vigas inicialmente curvas (en contraposición a las vigas rectas que se estudiaban en esa época) realizando un análisis simplificado de la vibración de campanas elásticas aproximadas por un conjunto de vigas en anillo. No obstante esto, los primeros trabajos en la teoría de cáscaras surgieron casi 100 años después de estas contribuciones de Euler. Los matemáticos ingleses Augustus Edward Hough Love, en 1888, y Horace Lamb, en 1890, fueron los primeros a desarrollar una teoría apropiada para pequeñas deformaciones en cáscaras. Las teorías que surgieron después fueron definitivamente compardas y colocadas dentro de una estructura mayor solamente en 1945 por Warner Tjardus Koiter (mecanicista holandés) y por el mecanicista ruso Valentin Valentinovich Novozhilov, siendo que toda la teoría de cáscaras de Koiter pasó desapercibida por un largo período debido a la propia Segunda Guerra Mundial. Esta teoría de cáscaras permanece de gran interés hasta nuestros días por las innúmeras aplicaciones de este tipo de componente estructural en la ingeniería civil, mecánica, aeronáutica, aeroespacial, etc.

Por último, los capítulos que integran esta parte de la monografía están escritos dentro de este objetivo. Para ello vamos a trabajar con las coordenadas intrínsecas asociadas a vigas y cáscara y sobre esta descripción vamos a mostrar la cinemática que es adoptada para cada uno de estos componentes que, conjuntamente con la dualidad y el Princípio de las Potencia Virtual, permiten definir qué tipos de cargas son admisibles (pueden actuar) en cada modelo y cuáles son las ecuaciones de equilibrio, todo esto independientemente del tipo de material que podemos usar para construir el componente. La incorporación de algún modelo constitutivo sólo será realizada en la solución de algún ejemplo particular, dejando la discución más detallada del comportamiento constitutivo para otros capítulos de esta monografía.

Capítulo 7
Modelado de Vigas

7.1 Introducción

En este capítulo vamos a presentar el modelo más simple de vigas (estudiado por los Bernoulli, Euler y otros) que se caracteriza por tener una geometría muy particular (ver Figura 7.1). Una viga es un elemento estructural tridimensional que

- tiene una de sus direcciones características, L llamada *longitud de la viga*, mucho mayor que las otras dos dimensiones características h_0 y b_0, llamadas *altura* y *ancho*, respectivamente. Es decir

$$L \gg h_0 > b_0; \tag{7.1}$$

- tiene un *plano longitudinal de simetría*. Es decir, las secciones transversales tienen simetría con respecto a este plano;
- cuando la viga es flexionada como indicado en la Figura 7.1, las fibras superiores se contraen mientras que las fibras inferiores se alargan, siendo que entre estos dos extremos, y por continuidad, tenemos fibras que mantienen su longitud, es decir, se encuentran en un *estado neutro*. El conjunto de todas estas fibras neutras forman la *superficie neutra de la viga*. Entonces, vamos a suponer que la intersección del plano longitudinal de simetría con esta superficie neutra define, en la configuración inicial (no cargada), una línea recta que llamaremos *eje longitudinal de la viga* (eje x en la Figura 7.1).

Como vimos en el Capítulo 3, para construir el modelo para este componente estructural tenemos que definir la cinemática asociada al mismo. Es decir, el espacio/conjunto de desplazamientos admisibles, el espacio de acciones virtuales de movimiento, el operador tasa de deformación $\mathscr{D}$ y el espacio de tasas de deformaciones. Solamente después de que estas definiciones han sido introducidas, a través del concepto de dualidad, tendremos condiciones de definir las fuerzas internas y externas asociadas al modelo, y con esto, via el Principio de la Potencia Virtual, el equilibrio entre estos esfuerzos. Esto será desarrollado en las siguientes secciones.

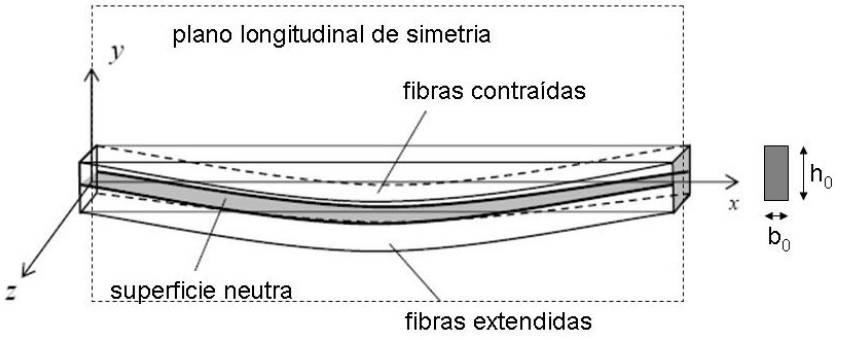


Fig. 7.1 Geometria de una viga simple.

7.2 Cinemática

Antes de definir la cinemática que vamos a adoptar para este tipo de componente vamos a trabajar con el concepto de tasa de deformación en cuerpos tridimensionales adaptado a la geometría del dominio asociado a este modelo simple de vigas. Para ello primero vamos a suponer que las acciones de movimiento que vamos a realizar sobre la viga serán tales que mantenga la simetría con respecto al plano longitudinal de simetría. Además, y debido a que el ancho de la viga es pequeño, parece aceptable suponer que las acciones de movimiento sean independientes de la dirección z (es decir constante con respecto a esa coordenada) siendo además la componente v_z nula.

Con estas suposiciones en mente, y dada la gran diferencia entre las dimensiones características del dominio, procedemos a una transformación de coordenadas como la siguiente

$$X = \frac{1}{L}x \qquad Y = \frac{1}{h}y \quad (x,y) \in [0,L] \times \left[\frac{1}{h}, -\frac{1}{h}\right], \tag{7.2}$$

y donde, por simplicidad, pero no con pérdida de generalidad en la presentación, estamos limitando la transformación para el caso de viga con sección transversal rectangular de altura $2h$ y ancho b. Con esta transformación las derivadas están relacionadas a través de las siguientes expresiones

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = \frac{1}{L}\frac{\partial(\cdot)}{\partial X} \qquad \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} = \frac{1}{h}\frac{\partial(\cdot)}{\partial Y}. \tag{7.3}$$

Finalmente vamos a suponer que estamos trabajando dentro del dominio de las deformaciones infinitesimales y que nuestras acciones de movimiento actuarán sobre la configuración rectilínea inicial (de referencia). Con estas suposiciones y recordando que en coordenadas cartesianas resulta

$$[\mathscr{D}\mathbf{v}]_{ab} = [\nabla^s \mathbf{v}]_{ab} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_a}{\partial x_b} + \frac{\partial v_b}{\partial x_a}\right] \quad a,b = x,y,z, \tag{7.4}$$

podemos evaluemos la norma $L_2(\Omega)$ de esta tasa de deformación (acción de deformación)

$$\|\mathscr{D}\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 = Lhb\int_0^1\int_{-1}^1\left[\frac{1}{L^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial X}\right)^2+\frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial Y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h}\frac{\partial v_x}{\partial Y}+\frac{1}{L}\frac{\partial v_y}{\partial X}\right)^2\right]dXdY =$$
$$\frac{bh}{L}\int_0^1\int_{-1}^1\left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial X}\right)^2+\left(\frac{L}{h}\right)^2\left(\frac{\partial v_y}{\partial Y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{L}{h}\frac{\partial v_x}{\partial Y}+\frac{\partial v_y}{\partial X}\right)^2\right]dXdY. \quad (7.5)$$

Luego, para evitar que la norma tienda a infinito para $h \to 0$ (línea elástica que soporta flexión de los Bernoulli y Euler) las siguientes expresiones deben ser satisfechas

$$\frac{\partial v_y}{\partial Y} = 0, \quad (7.6)$$
$$\frac{L}{h}\frac{\partial v_x}{\partial Y}+\frac{\partial v_y}{\partial X} = 0. \quad (7.7)$$

De donde obtenemos

$$\frac{\partial v_y}{\partial Y} = 0 \Rightarrow v_y = v_y(x), \quad (7.8)$$

es decir la acción transversal debe ser constante en la dirección de y y, por lo tanto, podemos decir que $v_y = v_y(x)$ representa la acción transversal del punto sobre el eje neutro de la viga. Por otro lado, la ecuación (7.7) implica en

$$\frac{\partial v_x}{\partial Y} = -\frac{h}{L}\frac{\partial v_y}{\partial X} \Rightarrow v_x(x,y) = \overline{v}_x(x) - \frac{h}{L}\frac{\partial v_y}{\partial X}Y = \overline{v}_x(x) - y\frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (7.9)$$

donde $\overline{v}_x(x)$ representa la acción de movimiento en el sentido longitudinal de la viga que puede variar con x pero que es constante transversalmente (no depende de y).

Luego, para esta clase de acciones de movimiento la única componente no nula del tensor tasa de deformación es

$$[\mathscr{D}\mathbf{v}]_{xx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} - y\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}. \quad (7.10)$$

Con esto hemos llegado a la versión para vigas (simple y rectilínea) del campo de acciones de movimiento conhecido como de Kirchhoff-Love na área de placas y cáscaras. Podemos así introducir la siguiente definición.

Decimos que el campo vectorial $\mathbf{v}$ definido en $\Omega = [0,L]\times[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]\times[-\frac{b}{2},\frac{b}{2}]$ es un campo de acciones de movimiento de Bernoulli-Euler si satisface las siguientes restricciones

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{v}(x,y) \qquad [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{yy} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{xy} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{xz} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{yz} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{zz} = 0, \quad (7.11)$$

para todo punto de la viga. En particular, el espacio formado por todas las acciones de movimiento de Bernoulli-Euler lo representaremos con la notación $\mathscr{V}_{BE}$. Este espacio $\mathscr{V}_{BE}$ puede caracterizarse de una manera enteramente equivalente a través del

siguiente teorema (cuya demostración la dejamos para más adelante cuando trataremos placas y cáscaras).

Teorema 7.1 Representación de los campos de Bernoulli-Euler. *Dados los vectores unitarios* $\mathbf{e}_x$*, en la dirección de la línea neutra (rectilínea), y su ortogonal* $\mathbf{e}_y$*, el campo* $\mathbf{v}$ *pertence a* $\mathscr{V}_{BE}$ *si y sólo si puede ser representado de la siguinete manera*

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{v}(x,y) = v_x(x,y)\mathbf{e}_x + v_y(x)\mathbf{e}_y, \tag{7.12}$$

donde

$$v_x(x,y) = \overline{v}_x(x) - y\frac{\partial v_y}{\partial x}(x). \tag{7.13}$$

Demostración. Ver Capítulo 9. ■

Veamos ahora el significado físico asociado a estos campos de Bernoulli-Euler (o simplemente B-E). En primer lugar, vemos que todos os planos transversales se mantienen planos después de la aplicación de una acción de movimiento de tipo B-E. Por otro lado, consideremos fibras contenidas en el plano transversal que sean ortogonales a la línea neutra (fibra p-q en la Figura 7.2). Estas fibras después de la aplicación de la acción B-E mantienen la misma longitud (fibra P-Q en la Figura 7.2). Finalmente, un punto sobre la línea neutra, por lo tanto de coordenadas $(x,0)$ antes de la accíon de movimiento, después de aplicada la acción de movimiento B-E tiene por coordenadas (x^*,y^*) dadas por

$$x^* = x + \overline{v}_x(x) \qquad y^* = v_y(x). \tag{7.14}$$

De la expresión anterior tenemos

$$dx^* = \left(1 + \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x}\right)dx \qquad dy^* = \frac{\partial v_y}{\partial x}dx, \tag{7.15}$$

por lo que la tangente a la línea neutra después de aplicada la acción de movimiento B-E forma un ángulo ϕ con el eje x dado por (Figura 7.2))

$$\tan\phi = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x}}{(1 + \frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x})}. \tag{7.16}$$

Como estamos suponiendo que $\frac{\partial \overline{v}_x}{\partial x} \ll 1$ (o en el caso de solamente llevar en cuenta acciones transversales que, en este caso, corresponde a suponer $\overline{v}_x = 0$), resulta $\phi = \frac{\partial v_y}{\partial x}$, es decir, el plano transversal, que antes de la acción es ortogonal a la línea neutra, permanece ortogonal a esta línea después de la acción B-E. En resumen, tenemos lo que proponían Bernoulli y Euler para esta teoría de viga: *los planos transversales permanecen planos y ortogonales, no existiendo deformación en ellos*.

Estamos ya en condiciones de establecer el espacio Var_v que, para el modelo de viga que estamos estudiando, toma la forma

$$\mathrm{Var}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V}_{BE}, + \text{ condiciones de contorno homogéneas}\}, \tag{7.17}$$

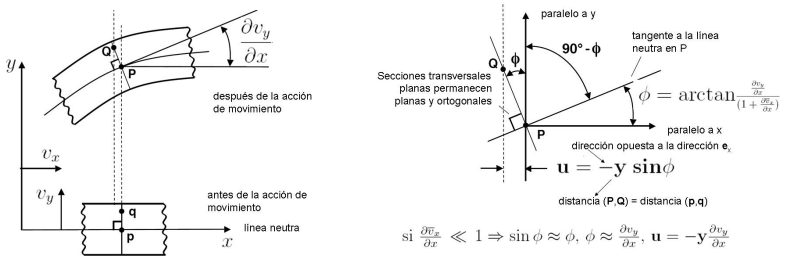


Fig. 7.2 Interpretación física de campos de Bernoulli-Euler.

o equivalentemente en términos de $\overline{v}_x$ y v_y

$$\mathrm{Var}_v = \{(\overline{v}_x, v_y) \in \mathscr{V}, + \text{ condiciones de contorno homogéneas}\}, \tag{7.18}$$

donde $\mathscr{V}$ es un espacio de funciones suficientemente regulares, y donde las *condiciones de contorno principales* son prescripciones homogéneas en un número finito de puntos del intervalo $[0,L]$ sobre parte de, o sobre todas, las variables $\overline{v}_x$, v_y y $\frac{\partial v_y}{\partial x}$. Esto será visto en detalle en la Sección 7.4. El operador de tasa de deformación se reduce al operador $\frac{\partial}{\partial x}$, y el espacio de (tasas de) deformaciones, $\mathscr{W}$, se reduce a un espacio cuyos elementos son campos escalares. Como ya vimos en el Capítulo 3, estos dos espacios junto con la dualidad juegan un papel fundamental en la caracterización de las fuerzas generalizadas internas y externas apropiadas al modelo cinemático construido. Esto será visto en detalle en la próxima sección.

7.3 Fuerzas Generalizadas

El primer paso en la caracterización de estos esfuerzos es la definición del funcional lineal (y continuo) correspondiente a la potencia interna sobre el espacio de acciones de deformación. Se adopta así la siguiente potencia interna

$$\begin{aligned} P_i = -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = -\int_0^L \int_A \sigma \frac{\partial \hat{v}_x}{\partial x} dA dx = -\int_0^L \int_A \sigma \left(\frac{\partial \hat{\overline{v}}_x}{\partial x} - y \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial x^2} \right) dA dx = \\ -\int_0^L \left(\int_A \sigma dA \right) \frac{\partial \hat{\overline{v}}_x}{\partial x} dx + \int_0^L \left(\int_A \sigma y dA \right) \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial x^2} dx = \\ -\int_0^L N \frac{\partial \hat{\overline{v}}_x}{\partial x} dx + \int_0^L M \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial x^2} dx \quad \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \end{aligned} \tag{7.19}$$

donde $A(x)$ es la sección transversal de la viga en el punto x de la línea neutra.

Vemos así que la dualidad permite caracterizar un esfuerzo interno, σ, que representa la tensión que actúa sobre las fibras longitudinales en dualidad con la acción de deformación longitudinal $[\mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}]_{xx}$, que por su parte, vía integración sobre la sección transversal, $A(x)$, da lugar a dos esfuerzos generalizados internos $(N,M) \in \mathscr{W}'$ designados, respectivamente, como *esfuerzo normal* y *momento flector* que actúan en la sección transversal correspondiente al punto x sobre el eje neutro de la viga. Estos dos esfuerzos generalizados internos están en dualidad con la acción de deformación longitudinal, $\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x}$, y con la tasa de variación de la rotación del plano transversal en x, $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x})$, respectivamente.

Es importante mencionar que si las acciones de movimiento se reducen a acciones puramente transversales (es decir $\hat{\bar{v}}_x = 0$), el único esfuerzo interno en el modelo de la viga será el momento flector M. A su vez, se puede observar que si bien la viga es un componente estructural tridimensional la potencia interna se reduce a una integral sobre el intervalo $[0,L]$, cualquiera sea la forma de la sección transversal $A(x)$ (desde que respetadas las simetrías que han sido asumidas). Es por eso que Bernoulli y Euler en 1750 consideraban una viga como *una línea con resistencia a flexión*.

Definida la potencia interna no tenemos ninguna dificultad en encontrar una representación para los esfuerzos externos en dualidad con los elementos de Var_v. Para eso, basta poner en evidencia el operador dual $\mathscr{D}'$. Así, tenemos

$$(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \int_0^L N \frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} dx - \int_0^L M \frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial x^2} dx =$$
$$N\hat{\bar{v}}_x|_0^L - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x} \hat{\bar{v}}_x dx - M \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}\bigg|_0^L + \frac{\partial M}{\partial x} \hat{v}_y \bigg|_0^L - \int_0^L \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \hat{v}_y dx = \langle \mathscr{D}'\mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}} \rangle, \quad (7.20)$$

y en consecuencia

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = F_x \hat{\bar{v}}_x|_0^L + \int_0^L q_x \hat{\bar{v}}_x dx + m \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}\bigg|_0^L + F_y \hat{v}_y|_0^L + \int_0^L q_y \hat{v}_y dx =$$
$$(F_x \hat{\bar{v}}_x + F_y \hat{v}_y)|_0^L + m \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}\bigg|_0^L + \int_0^L (q_x \hat{\bar{v}}_x + q_y \hat{v}_y) dx \quad \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \quad (7.21)$$

De esta manera, los esfuerzos generalizados externos, f, *admisibles* con el modelo cinemático de viga que estamos estudiando, están representados por las fuerzas F_x, F_y y por el momento flector m actuando en los puntos $x = 0$ y $x = L$ (o en un número finito de puntos interiores no intervalo $[0,L]$), y por una fuerza distribuida por unidad de longitud caracterizada por q_x y q_y. Evidentemente, en los puntos donde tengamos prescripciones impuestas a la acción de movimiento, la correspondiente fuerza (o momento) producirá una potencia nula, representando así una reacción de vínculo.

7.4 Equilibrio

Conocidas la potencia interna y la potencia externa asociada a las cargas admisibles al modelo, el equilibrio estará dado por el Principio de la Potencia Virtual que, para este modelo de viga, toma la siguiente forma.

Equilibrio en la teoría de viga de Bernoulli-Euler

Dado el sistema de cargas actuando sobre la viga caracterizado por fuerzas concentradas F_x^i, F_y^i, $i = 1,\dots,n$ (actuando en los puntos de coordenadas $x_i \in [0,L]$), por momentos flectores concentrados m_j, $j = 1,\dots,r$ (actuando en los puntos de coordenadas $x_j \in [0,L]$ que pueden, o no, coincidir con los puntos x_i) y por la carga distribuida q_x, q_y, el estado de esfuerzos (generalizados) internos, dado por N, y M, equilibra este sistema de cargas si

$$\int_0^L \left(N\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} - M\frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial x^2} \right) dx = \sum_{i=1}^{n} (F_x^i \hat{\bar{v}}_x(x_i) + F_x^i \hat{v}_y(x_i)) + \sum_{j=1}^{r} m_j \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}(x_j) + \int_0^L (q_x \hat{\bar{v}}_x + q_y \hat{v}_y) dx \quad \forall (\hat{\bar{v}}_x, \hat{v}_y) \in \mathrm{Var}_v. \quad (7.22)$$

La ecuación variacional (7.22) define los campos N y M que están equilibrados con el sistema de cargas caracterizados por el segundo miembro de la misma. Es fácil ver que no tenemos unicidad en el sentido de que dado un sistema de cargas solamente existe un único estado de esfuerzo interno. De hecho, si existe un estado interno en equilibrio existen infinitos todos ellos difiriendo por un estado de esfuerzos internos autoequilibrado, es decir equilibrado con un sistema de cargas externas que producen potencia nula. El conjunto de todos los estados de esfuerzos internos en equilibrio con el sistema de cargas externas dada define lo que hemos llamado (ver Capítulo 3) de Est_T, mientras que los autoequilbrados definen el subespacio Var_T. Tenemos así

$$\mathrm{Est}_T = \{(N,M), \text{ tales que satisfacen (7.22)}\}, \quad (7.23)$$

$$\mathrm{Var}_T = \left\{ (N,M), \int_0^L \left(N\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} - M\frac{\partial^2 \hat{v}_y}{\partial x^2} \right) dx = 0 \ \forall (\hat{\bar{v}}_x, \hat{v}_y) \in \mathrm{Var}_v \right\}. \quad (7.24)$$

Veamos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la ecuación variacional (7.22). Para ello, y para simplificar la presentación, vamos a suponer que solamente tenemos un punto $a \in [0,L]$ donde están aplicadas cargas y momentos, y que los integrandos son *suficientemente regulares* como para que las operaciones que realizaremos a continuación tengan sentido. Tenemos así

$$
\begin{aligned}
&-\int_{0,a}^{a,L}\left(N\frac{\partial\hat{\hat{v}}_x}{\partial x}-M\frac{\partial^2\hat{v}_y}{\partial x^2}\right)dx\\
&\qquad+F_x^a\hat{\hat{v}}_x(a)+F_y^a\hat{v}_y(a)+m_a\frac{\partial\hat{v}_y}{\partial x}(a)+\int_{0,a}^{a,L}(q_x\hat{\hat{v}}_x+q_y\hat{v}_y)dx=\\
&\quad-N\hat{\hat{v}}_x\Big|_{0,a}^{a,L}+M\frac{\partial\hat{v}_y}{\partial x}\bigg|_{0,a}^{a,L}-\frac{\partial M}{\partial x}\hat{v}_y\bigg|_{0,a}^{a,L}+\int_{0,a}^{a,L}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\hat{\hat{v}}_x+\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}\hat{v}_y\right)dx\\
&\quad+F_x^a\hat{\hat{v}}_x(a)+F_y^a\hat{v}_y(a)+m_a\frac{\partial\hat{v}_y}{\partial x}(a)+\int_{0,a}^{a,L}(q_x\hat{\hat{v}}_x+q_y\hat{v}_y)dx=0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\forall(\hat{\hat{v}}_x,\hat{v}_y)\in\mathrm{Var}_v. \qquad (7.25)
\end{aligned}
$$

Agrupando términos, la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
&+\int_{0,a}^{a,L}\left(\frac{\partial N}{\partial x}+q_x\right)\hat{\hat{v}}_x dx+\int_{0,a}^{a,L}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+q_y\right)\hat{v}_y dx\\
&\qquad\qquad-N\hat{\hat{v}}_x|_L+N\hat{\hat{v}}_x|_0-\left([\![N]\!]_a-F_x^a\right)\hat{\hat{v}}_x(a)\\
&\qquad\qquad+M\frac{\partial\hat{v}_y}{\partial x}\bigg|_L-M\frac{\partial\hat{v}_y}{\partial x}\bigg|_0+\left([\![M]\!]_a+m_a\right)\frac{\partial\hat{v}_y}{\partial x}(a)-\\
&-\frac{\partial M}{\partial x}\hat{v}_y\bigg|_L+\frac{\partial M}{\partial x}\hat{v}_y\bigg|_0-\left(\left[\!\!\left[\frac{\partial M}{\partial x}\right]\!\!\right]_a-F_y^a\right)\hat{v}_y(a)=0\quad\forall(\hat{\hat{v}}_x,\hat{v}_y)\in\mathrm{Var}_v. \qquad (7.26)
\end{aligned}
$$

donde con la notación $[\![\cdot]\!]_a$ representamos $(\cdot)(a^-)-(\cdot)(a^+)$, es decir que estamos representando el *salto* que la variable $(\cdot)$ sufre al pasar de a^- para a^+.

La ecuación (7.26) contiene toda la información que deseamos. De hecho, a través de la misma podemos conocer las condiciones de contorno cinemáticas, también conocidas como condiciones de contorno *principales*, que son apropiadas al modelo, así como también las condiciones de contorno llamadas *naturales*, las ecuaciones de Euler-Lagrange que deben ser satisfechas en todo punto del dominio $[0,L]$ de la viga y las *ecuaciones de salto* que deben ser satisfechas en todo punto a donde se espera alguna discontinuidad. En efecto, del teorema fudamental del cálculo de las variaciones obtenemos lo siguiente.

- **Condiciones de contorno principales (o naturales)**
  - En $x=0$ está prescripto el movimiento en la dirección x, por lo tanto $\hat{\hat{v}}_x(0)=0$ (o en su defecto, el movimiento en la dirección x está libre de cualquier restricción y tenemos la condición natural de contorno $N(0)=0$). Observe el papel de la dualidad entre las variables cinemáticas y las fuerzas generalizadas correspondinetes: ambas **no pueden estar restringidas simultáneamente**.
  - En $x=0$ está prescripto el movimiento en la dirección y, por lo tanto $\hat{v}_y(0)=0$ (o en su defecto, el movimiento en la dirección y está libre de cualquier restricción y tenemos la condición natural de contorno $\frac{\partial M}{\partial x}(0)=0$). Observe nuevamente el papel de la dualidad entre las variables cinemáticas y las fuerzas generalizadas correspondientes: ambas **no pueden estar prescriptas simultáneamente**.

- En $x = 0$ está prescripto el giro de la sección transversal y, por lo tanto, $\frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}(0) = 0$, (o en su defecto, el giro de la sección transversal está libre de cualquier restricción y tenemos la condición natural de contorno $M(0) = 0$). Observe una vez más el papel de la dualidad entre las variables cinemáticas y las fuerzas generalizadas correspondinetes: ambas **no pueden estar prescriptas simultáneamente**.
- Para el extremo $x = L$ tenemos condiciones de contorno principales o naturales completamente análogas a las analizadas anteriormente para el extremo $x = 0$.

- **Ecuaciones de Euler-Lagrange**
  - En los intervalos $(0,a)$ y (a,L) se deben satisfacer las siguientes ecuaciones conocidas como *ecuaciones de Euler-Lagrange* para el modelo de viga que estamos estudiando

$$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0, \tag{7.27}$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + q_y = 0. \tag{7.28}$$

- **Ecuaciones de salto**
  - En el punto $x = a \in [0,L]$ se deben satisfacer tres ecuaciones adicionales conocidas como *ecuaciones de salto* para el modelo de viga que estamos estudiando

$$[\![N]\!]_a - F_x^a = 0, \tag{7.29}$$

$$\left[\!\!\left[\frac{\partial M}{\partial x} \right]\!\!\right]_a - F_y^a = 0, \tag{7.30}$$

$$[\![M]\!]_a + m_a = 0. \tag{7.31}$$

Es importante observar que las ecuaciones de Euler-Lagrange y las de salto conjuntamente con las condiciones de contorno (principales y naturales) definen el equilibrio de la viga desde el punto de vista clásico (es decir a través de un problema de valor de contorno). Lo anterior sólo pudo obtenerse gracias a que hemos admitido la existencia de suficiente regularidad de forma que sea posible realizar las operaciones correspondientes para obtenerlas. De esta manera, si esta regularidad no está presente, estas ecuaciones no son más válidas, y el equilibrio solamente está dado por el Principio de la Potencia Virtual (ecuación (7.22)).

Otro aspecto importante que debemos resaltar es que todo lo expuesto hasta el presente momento es totalmente independiente del tipo de material con el cual está construida la viga. El comportamiento del material estará embutido en lo que se llama *ecuaciones constitutivas*, las cuales establecen la relación entre los esfuerzos generalizados y la historia de la deformación real a la que fue sometido el cuerpo. Esto, como ya fue dicho, es tratado en otros capítulos de esta monografía (ver Capítulo 5 y Capítulo 6).

7.5 Modelo de Viga de Timoshenko

En las secciones anteriores hemos estudiado la teoría de vigas de Bernoulli que se obtiene suponiendo que el componente estructural es muy esbelto, es decir $L \gg h$. Existe otra teoría, formulada en los años iniciales de 1900 por Timoshenko (de allí su nombre). En esta teoría se relaja la restricción anterior (la viga no es tan esbelta), pero se mantienen los aspectos más importantes de la teoría de Bernoulli. De hecho, en la teoría de Timoshenko se supone que

- los planos transversales se mantienen planos después de la deformación;
- los planos transversales giran pero en general no se mantienen ortogonales después de la deformación, es decir, el ángulo ϕ (ver Figura 7.3) ya no es igual al ángulo que forma con el eje x la tangente a la linea neutra deformada;
- las fibras en el plano transversal no sufren ningún tipo de deformación.

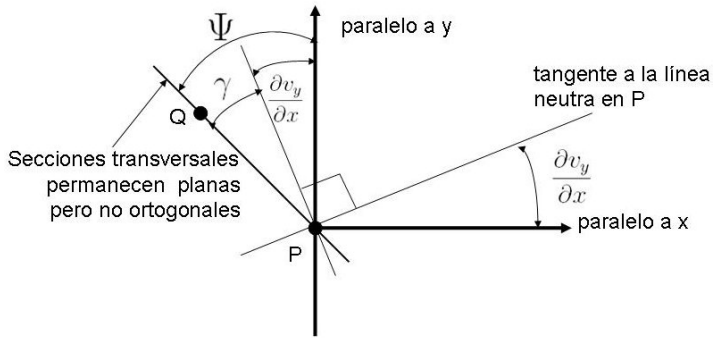


Fig. 7.3 Interpretación física de los campos de Timoshenko.

Basados en estas restricciones cinemáticas, y llevando en cuenta la caracterización de las acciones de movimiento de Bernoulli-Euler, es fácil obtener la representación de las *acciones de movimiento de Timoshenko*. En particular designaremos el espacio formado por estas acciones por $\mathscr{V}_T$.

Teorema 7.2 Representación de los campos de Timoshenko. *Dados los vectores unitarios* $\mathbf{e}_x$*, en la dirección de la línea neutra (rectilínea), y su ortogonal* $\mathbf{e}_y$*, el campo* $\mathbf{v}$ *pertenece a* $\mathscr{V}_T$ *si y sólo si puede ser representado de la siguinete manera*

$$\mathbf{v}(x,y,z) = \mathbf{v}(x,y) = v_x(x,y)\mathbf{e}_x + v_y(x)\mathbf{e}_y, \tag{7.32}$$

donde

$$v_x(x,y) = \overline{v}_x(x) - y\psi(x), \tag{7.33}$$

con ψ *siendo el campo de acción de movimiento que representa el giro de la sección transversal en el punto x.*

Demostración. Ver Capítulo 9. ■

Manteniendo el mismo operador asociado con la acción de deformación usado en la teoría de viga de Bernoulli-Euler, es decir $\mathscr{D} = \nabla^s(\cdot)$, es fácil verificar que para los elementos $\mathbf{v} \in \mathscr{V}_T$ se tiene

$$\begin{aligned}
&[D\mathbf{v}]_{xz} = [D\mathbf{v}]_{zx} = [D\mathbf{v}]_{yz} = [D\mathbf{v}]_{zy} = [D\mathbf{v}]_{zz} = [D\mathbf{v}]_{yy} = 0,\\
&[D\mathbf{v}]_{xx} = \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} - y\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)(x),\\
&[D\mathbf{v}]_{xy} = [D\mathbf{v}]_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \psi\right)(x).
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Siguiendo un análisis similar al realizado para la viga de Bernoulli-Euler, el espacio de acciones virtuales de movimiento, Var_v, será ahora caracterizado por

$$\mathrm{Var}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V}_T, + \text{ condiciones de contorno homogéneas}\}, \tag{7.35}$$

y donde las condiciones de contorno principales homogéneas están dadas sobre todas o algunas de las variables $\bar{v}_x$, v_y y ψ. Equivalentemente, podemos caracterizar Var_v como sigue

$$\mathrm{Var}_v = \{(\bar{v}_x, v_y, \psi) \in \mathscr{V}, + \text{ condiciones de contorno homogéneas}\}, \tag{7.36}$$

donde $\mathscr{V}$ es un espacio de funciones suficientemente regulares.

De la misma manera que realizado para la viga de Bernoulli-Euler, la potencia interna toma en este caso la forma

$$\begin{aligned}
P_i = -(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = -\int_0^L \int_A \sigma\left(\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} - y\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x}\right) dA dx - \int_0^L \int_A \tau \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x} - \hat{\psi}\right) dA dx =\\
= -\int_0^L \left(\int_A \sigma dA\right)\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} dx + \int_0^L \left(\int_A \sigma y dA\right)\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} dx\\
- \int_0^L \left(\int_A \frac{1}{2}\tau dA\right)\left(\frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x} - \hat{\psi}\right) dx =\\
- \int_0^L N\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} dx + \int_0^L M\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} dx - \int_0^L Q\left(\frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x} - \hat{\psi}\right) dx =\\
- \int_0^L N\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} dx + \int_0^L M\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} dx + \int_0^L Q\hat{\gamma} dx \quad \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v.
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Como podemos apreciar, además de los esfuerzos internos generalizados N y M propios de la teoría de viga de Bernoulli-Euler, surge un esfuerzo generalizado adicional, dual con la distorción $\hat{\gamma} = \hat{\psi} - \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}$ (pérdida de ortogonalidad de la sección transversal, ver Figura 7.3), conocido como esfuerzo *cortante* en el punto x de la viga. Este resultado no puede ser una sorpresa, ya que al enriquecer el espacio de acciones virtuales de movimiento (observe que $\mathscr{V}_{BE} \subset \mathscr{V}_T$ y por lo tanto lo mismo

ocurre con los espacios Var_v definidos en (7.18) y (7.36), correspondientemente) estamos enriqueciendo el espacio dual de esfuerzos internos $\mathscr{W}'$.

Conocida la expresión de la potencia interna para la viga de Timoshenko, estamos en condiciones de determinar las cargas externas generalizadas admisibles para este modelo. De hecho, y procediendo de forma similar a lo realizado con la viga de Bernoulli-Euler, obtenemos la siguiente representación para los esfuerzos externos generalizados

$$(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = N\hat{\bar{v}}_x|_0^L - \int_0^L \frac{\partial N}{\partial x}\hat{\bar{v}}_x dx - M\hat{\psi}|_0^L + \int_0^L \left(\frac{\partial M}{\partial x} - Q\right)\hat{\psi} dx \\ + Q\hat{v}_y|_0^L - \int_0^L \frac{\partial Q}{\partial x}\hat{v}_y dx = \langle \mathscr{D}'\mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}}\rangle, \quad (7.38)$$

y por lo tanto

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = (F_x\hat{\bar{v}}_x + F_y\hat{v}_y)|_0^L + m\hat{\psi}|_0^L \\ + \int_0^L (q_x\hat{\bar{v}}_x + q_y\hat{v}_y)dx + \int_0^L m_d\hat{\psi}dx \quad \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \quad (7.39)$$

Vemos así que los esfuerzos externos generalizados admisibles para la teoría de Timoshenko están caracterizados por las fuerzas, F_x y F_y, y el momento flector, m, concentrados en puntos (un número finito de puntos) de la línea neutra, y por fuerzas distribuidas, q_x y q_y, y momento flector distribuido, m_d. Comparando con los esfuerzos externos admisibles para la teoría de Bernoulli-Euler, vemos que ahora es posible someter a la viga a un momento flector distribuido, el cual no era permitido en la teoría de Bernoulli-Euler. En este sentido, es importante mencionar que existen autores que al presentar la teoría de vigas de Bernoulli-Euler permiten estos momentos distribuidos lo que, como hemos visto, no tiene ninguna sustentación matemática, y se ecuentra en total contradicción con la teoría más simplificada de Bernoulli-Euler.

Conocidas la potencia interna y la potencia externa asociadas a los esfuerzos generalizados internos y externos admisibles al modelo de Timoshenko, el equilibrio estará dado por el Principio de la Potencia Virtual que, para este modelo de viga, toma la siguiente forma.

Equilibrio en la teoría de viga de Timoshenko

Dado el sistema de cargas actuando sobre la viga caracterizado por fuerzas concentradas F_x^i, F_y^i, $i=1,\dots,n$ (actuando en los puntos de coordenadas $x_i \in [0,L]$), por momentos flectores concentrados m_j, $j=1,\dots,r$ (actuando en los puntos de coordenadas $x_j \in [0,L]$ que pueden, o no, coincidir con los puntos x_i) y y por la carga q_x, q_y y el momento flector m_d distribuidos sobre el eje neutro de la viga el estado de esfuerzos (generalizados) internos, dado por N, M y Q, equilibra este sistema de cargas si

$$\int_0^L \left[N\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} - M\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - Q\left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}\right)\right] dx = \sum_{i=1}^{n}(F_x^i \hat{\bar{v}}_x(x_i) + F_y^i \hat{v}_y(x_i)) + \sum_{j=1}^{r} m_j \hat{\psi}(x_j) + \int_0^L (q_x \hat{\bar{v}}_x + q_y \hat{v}_y)dx + \int_0^L m_d \hat{\psi} dx \quad \forall (\hat{\bar{v}}_x, \hat{v}_y, \hat{\psi}) \in \mathrm{Var}_v. \quad (7.40)$$

Veamos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la ecuación variacional (7.40). Para ello, y para simplificar la presentación, vamos a suponer que solamente tenemos un punto $a \in [0,L]$ donde están aplicadas cargas y momentos, y que los integrandos son *suficientemente regulares* como para que las operaciones de *integración por partes* que realizaremos a continuación tengan sentido. Tenemos así

$$\begin{aligned} &-\int_{0,a}^{a,L}\left(N\frac{\partial \hat{\bar{v}}_x}{\partial x} - M\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - Q\left(\hat{\psi} - \frac{\partial \hat{v}_y}{\partial x}\right)\right)dx \\ &\quad + F_x^a \hat{\bar{v}}_x(a) + F_y^a \hat{v}_y(a) + m_a \hat{\psi}(a) + \int_{0,a}^{a,L}(q_x \hat{\bar{v}}_x + q_y \hat{v}_y + m_d \hat{\psi})dx = \\ &-N\hat{\bar{v}}_x|_{0,a}^{a,L} + M\hat{\psi}|_{0,a}^{a,L} - Q\hat{v}_y|_{0,a}^{a,L} + \int_{0,a}^{a,L}\left(\frac{\partial N}{\partial x}\hat{\bar{v}}_x - \left(\frac{\partial M}{\partial x} - Q\right)\hat{\psi} + \frac{\partial Q}{\partial x}\hat{v}_y\right)dx \\ &\quad + F_x^a \hat{\bar{v}}_x(a) + F_y^a \hat{v}_y(a) + m_a \hat{\psi}(a) + \int_{0,a}^{a,L}(q_x \hat{\bar{v}}_x + q_y \hat{v}_y + m_d \hat{\psi})dx = 0 \\ &\qquad \forall (\hat{\bar{v}}_x, \hat{v}_y, \hat{\psi}) \in \mathrm{Var}_v. \quad (7.41) \end{aligned}$$

Agrupando términos, obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} &\int_{0,a}^{a,L}\left(\frac{\partial N}{\partial x} + q_x\right)\hat{\bar{v}}_x dx + \int_{0,a}^{a,L}\left(Q - \frac{\partial M}{\partial x} + m_d\right)\hat{\psi}dx + \int_{0,a}^{a,L}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} + q_y\right)\hat{v}_y dx \\ &\quad - N\hat{\bar{v}}_x|_L + N\hat{\bar{v}}_x|_0 - \left([\![N]\!]_a - F_x^a\right)\hat{\bar{v}}_x(a) \\ &\quad + M\hat{\psi}|_L - M\hat{\psi}|_0 + \left([\![M]\!]_a + m_a\right)\hat{\psi}_x(a) \\ &\quad - Q\hat{v}_y|_L + Q\hat{v}_y|_0 - \left([\![Q]\!]_a - F_y^a\right)\hat{v}_y(a) = 0 \quad \forall (\hat{\bar{v}}_x, \hat{v}_y, \hat{\psi}) \in \mathrm{Var}_v. \quad (7.42) \end{aligned}$$

De la ecuación anterior y del lema fundamental del cálculo variacional obtenemos lo siguiente.

- **Condiciones de contorno principales (o naturales)**
  - En $x = 0$ está prescripta la acción de movimiento en la dirección x, por lo tanto $\hat{\bar{v}}_x(0) = 0$ (o en su defecto, el movimiento en la dirección x está libre de cualquier restricción y tenemos la condición natural de contorno $N(0) = 0$).
  - En $x = 0$ está prescripta la acción de movimiento en la dirección y, por lo tanto $\hat{\bar{v}}_y(0) = 0$ (o en su defecto, el movimiento en la dirección y está libre de cualquier restricción y tenemos la condición natural de contorno $Q(0) = 0$).
  - En $x = 0$ está prescripta la acción de giro de la sección transversal, por lo tanto $\hat{\psi}(0) = 0$ (o en su defecto, la rotación de la sección transversal está libre de cualquier restricción y tenemos la condición natural de contorno $M(0) = 0$).
  - Para el extremo $x = L$ tenemos condiciones de contorno principales o naturales análogas a las mencionadas anteriormente.
- **Ecuaciones de Euler-Lagrange** En los intervalos $(0,a)$ y (a,L) se deben satisfacer las siguientes ecuaciones conocidas como *ecuaciones de Euler-Lagrange* para el modelo de viga de Timoshenko.

$$\frac{\partial N}{\partial x} + q_x = 0, \tag{7.43}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + q_y = 0, \tag{7.44}$$

$$Q - \frac{\partial M}{\partial x} + m_d = 0. \tag{7.45}$$

- **Ecuaciones de salto** En el punto $x = a \in [0,L]$ se deben satisfacer más tres ecuaciones conocidas como ecuaciones de salto para el modelo de viga que estamos estudiando.

$$[\![N]\!]_a - F_x^a = 0, \tag{7.46}$$

$$[\![Q]\!]_a - F_y^a = 0, \tag{7.47}$$

$$[\![M]\!]_a + m_a = 0. \tag{7.48}$$

7.6 Comentarios Finales

Como hemos podido apreciar, a lo largo de este capítulo fue posible definir, con el mínimo de hipótesis, las bases que gobiernan la teoría de viga de Bernoulli-Euler y la teoría de viga de Timoshenko. Las hipótesis cinemáticas conjuntamente con la dualidad son suficientes para definir de forma clara los esfuerzos generalizados, internos y externos, admisibles para cada modelo. Por último, el Principio de la Potencia Virtual nos proporciona el equilibrio entre los esfuerzos generalizados externos y los internos asociados a cada teoría. Es más, en ningún momento hemos

sido obligados a recurrir al comportamiento del material, el cual sólo entrará en juego cuando pongamos en evidencia la relación existente entre los esfuerzos generalizados internos y la historia de la deformación a la que fue sometida la viga.

Finalmente, corresponde realizar una observación adicional. De hecho, en toda la presentación, y para los dos modelos estudiados, hemos supuesto que en la configuración actual de la viga el eje neutro es rectilíneo. La formulación presentada no se aplica en forma directa cuando en esta configuración el eje neutro deja de ser rectilíneo y pasa a estar dado por una curva en el plano de simetría longitudinal, como muestra el ejemplo de la Figura 7.4. Las hipótesis cinemáticas son las mismas que planteamos para las vigas de eje neutro retilíneo. Es decir, las secciones transversales permanecen planas y ortogonales (teoría de Bernoulli-Euler) o no ortogonales (teoría de Timoshenko) cuando sometidas a una acción de movimiento. No obstante esto, surge una dificultad que radica en que ahora las secciones planas dejan de tener una orientación constante a lo largo de la viga. De hecho, la terna que usamos en nuestra descripcion de vigas rectas, dada por $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$, es constante para todo punto P del eje neutro. En una viga curva esa terna pasa ahora a ser la base intrínseca de la curva que representa el eje neutro dada por $(\mathbf{e}_t, \mathbf{n}, \mathbf{e}_z)$ (ver Figura 7.4) que, excepto $\mathbf{e}_z$, es función de la posición del punto P. Como el desarrollo de la teoría para vigas curvas es un caso particular del de cáscaras, las herramientas geométricas empleadas en el modelado de vigas curvas serán similares a las empleadas para el modelado de cáscaras, siendo que este tema será tratado en detalle en el Capítulo 9.

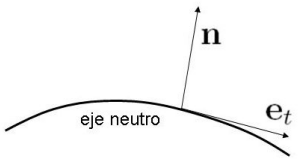


Fig. 7.4 Eje neutro en una viga curva en el plano de simetría longitudinal.

Capítulo 8
Modelado de Barras en Torsión

8.1 Introducción

En el presente capítulo vamos a tratar la teoría de torsión de barras prismáticas regulares cuando sometidas a acciones cinemáticas de Saint-Venant. Para esto haremos uso de toda la estructura variacional presentada en el Capítulo 3. En otras palabras, veremos en detalle la construcción de los espacios y conjuntos cinemáticamente admisibles, definiremos el operador de deformación (tasa de deformación) y, a partir establecer el *modelo cinemático*, obtendremos la definición/representación de los esfuerzos internos y externos compatibles con el modelo de torsión de Saint-Venant y, a través del Principio de la Potencia Virtual y del Principio de la Potencia Virtual Complementaria, la definición completa del modelo mecánico–matemático para torsión, válido para cualquier comportamiento del material. Posteriormente limitaremos la presentación a materiales elásticos dentro del rango de pequeñas deformaciones.

8.2 Cinemática

Las hipótesis asociadas al modelo de Saint-Venant que vamos a desarrollar son las siguientes (ver Figura 8.1)

- consideraremos barras prismáticas regulares, es decir que su sección transversal no varía a lo largo del eje longitudinal de la barra, de longitud L y de sección transversal Ω, limitada por su contorno Γ que suponemos regular es decir, tipo Lipschitz;
- cada sección sufre una acción de rotación rígida alrededor de su normal tal que su tasa de variación a lo largo del eje longitudinal de la barra sea constante;
- la acción de movimiento en la dirección del eje longitudinal, es constante para todas las secciones transversales; adoptando un sistema ortogonal de referencia como el indicado en la Figura 8.1 donde $\mathbf{e}_z$ está orientado en la dirección del

eje longitudinal de la barra, lo anterior implica que el campo de acción de movimiento $\mathbf{v}$ es tal que su componente en la dirección $\mathbf{e}_z$ resulta $v_z = v_z(x,y)$, siendo (x,y) las coordenadas en la sección transversal Ω.

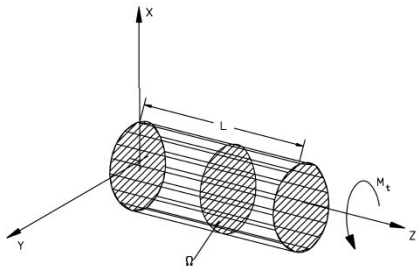


Fig. 8.1 Barra prismática sometida a torsión.

Entonces, podemos ver que el campo de acciones de movimiento $\mathbf{v} = v_a\mathbf{e}_a$, $a = x,y,z$, compatible con las hipótesis anteriores está dado por

$$v_x = -r\dot{\theta}\sin\beta = -y\dot{\theta}, \tag{8.1}$$

$$v_y = r\dot{\theta}\cos\beta = x\dot{\theta}, \tag{8.2}$$

$$v_z = v_z(x,y) = \kappa(x,y), \tag{8.3}$$

donde $\dot{\theta} = \dot{\theta}(z)$ es la acción de movimiento angular de rotación en torno del eje $\mathbf{e}_z$ correspondiente a la coordenada z.

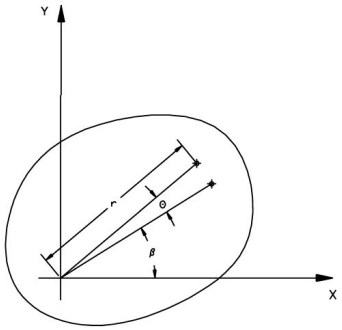


Fig. 8.2 Cinemática de una barra prismática sometida a torsión dentro de la teoría de Saint-Venant.

Las relaciones anteriores nos llevan a que las únicas componentes no nulas del tensor tasa de deformación $\mathbf{D} = \mathscr{D}\mathbf{v} = \nabla^s\mathbf{v}$ corresponden a

$$[\mathscr{D}\mathbf{v}]_{xz} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{zx} = \frac{1}{2}\left[-y\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial\kappa}{\partial x}\right], \tag{8.4}$$

$$[\mathscr{D}\mathbf{v}]_{yz} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{zy} = \frac{1}{2}\left[x\frac{\partial\dot{\theta}}{\partial z} + \frac{\partial\kappa}{\partial y}\right]. \tag{8.5}$$

De las hipótesis cinemáticas anteriores se desprende que, $\alpha = d\dot{\theta}/dz \in \mathbb{R}$ (constante), y la cinemática resulta

$$v_x = -\alpha yz, \tag{8.6}$$

$$v_y = \alpha xz, \tag{8.7}$$

$$v_z = \kappa(x,y), \tag{8.8}$$

$$[\mathscr{D}\mathbf{v}]_{xz} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{zx} = \frac{1}{2}\left[-\alpha y + \frac{\partial\kappa}{\partial x}\right], \tag{8.9}$$

$$[\mathscr{D}\mathbf{v}]_{yz} = [\mathscr{D}\mathbf{v}]_{zy} = \frac{1}{2}\left[\alpha x + \frac{\partial\kappa}{\partial y}\right]. \tag{8.10}$$

Con el objetivo de condensar las operaciones que haremos, definimos el siguiente vector

$$\gamma(\mathbf{v}) = \nabla_\Omega\kappa + \alpha\chi, \tag{8.11}$$

donde

$$\nabla_\Omega\kappa = \frac{\partial\kappa}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial\kappa}{\partial y}\mathbf{e}_y \tag{8.12}$$

y $\chi = -y\mathbf{e}_x + x\mathbf{e}_y$.

Podemos así definir el espacio de acciones de movimento cinemáticamente admisibles Kin_v dado por

$$\mathrm{Kin}_v = \{(v_x,v_y,v_z) \in \mathscr{V},\ v_x = -\alpha yz,\ v_y = \alpha xz,\ v_z = \kappa(x,y)\}. \tag{8.13}$$

Para caracterizar el espacio de acciones de movimento virtuales cinemáticamente admisibles Var_v recurrimos a su definición

$$\mathrm{Kin}_v = \bar{\mathbf{v}} + \mathrm{Var}_v \quad \bar{\mathbf{v}} \in \mathrm{Kin}_v \text{ arbitrario.} \tag{8.14}$$

Luego, dados $\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2 \in \mathrm{Kin}_v$ arbitrarios, resulta

$$\mathbf{v}^1 = (-\alpha_1 zy, \alpha_1 zx, \kappa_1), \tag{8.15}$$

$$\mathbf{v}^2 = (-\alpha_2 zy, \alpha_2 zx, \kappa_2) \tag{8.16}$$

De esta manera $\mathbf{w} = \mathbf{v}^2 - \mathbf{v}^1 \in \mathrm{Var}_v$ y es

$$\mathbf{w} = (\alpha_2 - \alpha_1)\left(-zy, zx, \frac{\kappa_2}{\alpha_2 - \alpha_1} - \frac{\kappa_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\right) = (-\hat{\alpha}zy, \hat{\alpha}zx, \hat{\kappa}). \tag{8.17}$$

Lo anterior nos permite concluir que $\mathrm{Kin}_v = \mathrm{Var}_v$. Análogamente, podemos caracterizar el espacio Var_v como sigue

$$\mathrm{Var}_v = \{(\kappa, \alpha) \in \mathscr{V}_\Omega \times \mathbb{R}\}, \tag{8.18}$$

donde $\mathscr{V}_\Omega$ es un espacio de funciones suficientemente regulares definidas en la sección transversal Ω de la barra.

Para completar el estudio de la cinemática basta caracterizar para este problema el concepto de movimento rígido. Tenemos entonces que $\mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$ si y sólo si $\nabla^s \mathbf{v} = \mathbf{O}$, que en este caso se traduce en $\gamma = \mathbf{0}$, para lo cual debe ser (ver (8.11))

$$\frac{\partial \kappa}{\partial x} - \alpha y = 0, \tag{8.19}$$

$$\frac{\partial \kappa}{\partial y} + \alpha x = 0, \tag{8.20}$$

es decir

$$\kappa = \alpha xy + f(y), \tag{8.21}$$

$$\kappa = -\alpha xy + g(x), \tag{8.22}$$

las cuales se satisfacen siempre que

$$\alpha = 0, \tag{8.23}$$

$$f(y) = g(x) = C, \tag{8.24}$$

con C una constante. Luego

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V},\, v_x = v_y = 0,\, v_z = C\}, \tag{8.25}$$

o equivalentemente

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{(0,0,C) \in \mathscr{V}, C \in \mathbb{R}\}. \tag{8.26}$$

8.3 Fuerzas Generalizadas

Definida la cinemática y los conjuntos Kin_v, Var_v y $\mathscr{N}(\mathscr{D})$, podemos pasar a la etapa siguiente que es la de *caracterizar las cargas externas compatibles con el modelo cinemático adoptado*. El Principio de la Potencia Virtual nos dice que un cuerpo $\mathscr{B}$ en la configuración $\mathscr{B}_t$ se encuentra en equilibrio sobre la acción de la carga f si

- $P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0$, $\forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V},\, v_x = v_y = 0,\, v_z = \kappa = C\}$;
- $P_i + P_e = 0$, $\forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$, o sea $(T, \mathscr{D}(\hat{\mathbf{v}})) = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle$, $\forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$.

La primera expresión nos muestra que la componente de f dual a la variable κ (f_z) debe ser ortogonal a $\mathbb{R}$ es decir, debe ser una función de media nula. La segunda expresión permite identificar el tipo de cargamento. De hecho, introduciendo el vector

$$\sigma = T_{xz}\mathbf{e}_x + T_{yz}\mathbf{e}_y, \tag{8.27}$$

que como, por hipótesis, la tasa de deformación es igual para todas las secciones transversales, se sigue que el estado de tensiones asociado también satisface esta propiedad. En otras palabras no depende de la variable z. Tenemos así

$$\begin{aligned} -P_i = (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\mathscr{B}} \mathbf{T}\cdot\nabla^s\hat{\mathbf{v}}dV = \int_{\mathscr{B}} \sigma\cdot\hat{\gamma}dV \\ &= L\int_{\Omega} \sigma\cdot\hat{\gamma}d\Omega = L\int_{\Omega}[\sigma\cdot\nabla_{\Omega}\hat{\kappa} + (\sigma\cdot\chi)\hat{\alpha}]d\Omega \quad \hat{\mathbf{v}}\in \mathrm{Var}_v. \end{aligned} \tag{8.28}$$

Ahora, resta poner en evidencia el operador de equilibrio $\mathscr{D}'$ como sigue

$$\begin{aligned} (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) &= L\int_{\Omega}[\sigma\cdot\nabla_{\Omega}\hat{\kappa} + (\sigma\cdot\chi)\hat{\alpha}]d\Omega \\ &= L\int_{\Omega}[\mathrm{div}_{\Omega}(\hat{\kappa}\sigma) - \hat{\kappa}\,\mathrm{div}_{\Omega}\,\sigma + (\sigma\cdot\chi)\hat{\alpha}]d\Omega \\ &= L\left\{\int_{\Gamma}(\sigma\cdot\mathbf{n})\hat{\kappa}d\Gamma - \int_{\Omega}\hat{\kappa}\,\mathrm{div}_{\Omega}\,\sigma d\Omega + \int_{\Omega}\hat{\alpha}(\sigma\cdot\chi)d\Omega\right\} = \langle\mathscr{D}'\mathbf{T}, \hat{\mathbf{v}}\rangle. \end{aligned} \tag{8.29}$$

y en consecuencia

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = L\left\{\int_{\Gamma} f_n\hat{\kappa}d\Gamma - \int_{\Omega} f_b\hat{\kappa}d\Omega + \int_{\Omega} m_t\hat{\alpha}d\Omega\right\} \quad \hat{\mathbf{v}}\in \mathrm{Var}_v. \tag{8.30}$$

De la restricción sobre f concluimos que $\int_{\Gamma} f_n d\Gamma + \int_{\Omega} f_b d\Omega = 0$, y como $\hat{\alpha}$ es constante, tenemos finalmente que

$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = M_t L\hat{\alpha} \quad \hat{\mathbf{v}}\in \mathrm{Var}_v, \tag{8.31}$$

donde $M_t = \int_{\Omega} m_t d\Omega$ es el *momento torsor* aplicado en la extremidad de la barra que se encuentra libre al movimiento.

En la Figura 8.3 podemos ver los principales elementos que componen el modelo mecánico-matemático para el problema de torsión de barras prismáticas.

8.4 Equilibrio

Caracterizados los esfuerzos externos compatibles con la cinemática adoptada e introduciendo esto en la expresión del Principio de la Potencia Virtual obtenemos la formulación del equilibrio mecánico para este componente estructural.

Observe primero que el balance de potencias interna y externa establece que

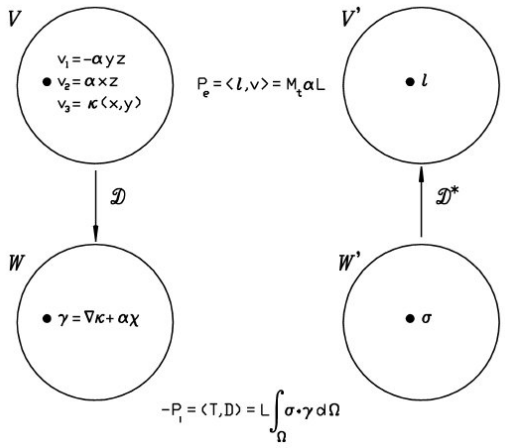


Fig. 8.3 Teoría de Saint-Venant para torsión de barras prismáticas.

$$\int_\Omega \sigma \cdot \gamma(\hat{\mathbf{v}}) d\Omega = M_t \hat{\alpha} \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{8.32}$$

Sabiendo que $\gamma(\hat{\mathbf{v}}) = \nabla_\Omega \hat{\kappa} + \hat{\alpha}\chi$ resulta

$$\int_\Omega (\sigma \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} + (\sigma \cdot \chi)\hat{\alpha}) d\Omega = M_t \hat{\alpha}, \quad \forall (\hat{\kappa}, \hat{\alpha}) \in \mathrm{Var}_v \tag{8.33}$$

y como $\hat{\alpha} \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_\Omega \sigma \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} d\Omega = \hat{\alpha} \left\{ M_t - \int_\Omega \sigma \cdot \chi d\Omega \right\} \quad \forall (\hat{\kappa}, \hat{\alpha}) \in \mathscr{V}_\Omega \times \mathbb{R}. \tag{8.34}$$

Llegamos así a la formulación del equilibrio para el problema de torsión de barras prismáticas que enunciamos a seguir.

Equilibrio en la teoría de barras en torsión de Saint-Venant

Dada la carga actuando sobre la barra caracterizada por el momento M_t, el estado de esfuerzos (generalizados) internos, dado por σ, equilibra esta carga si

$$\int_\Omega \sigma \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\kappa} \in \mathscr{V}_\Omega, \tag{8.35}$$

$$\int_\Omega \sigma \cdot \chi d\Omega = M_t. \tag{8.36}$$

Las expresiones (8.35) y (8.36) nos dan la formulación variacional cinemática (también conocida en la literatura como *formulación primal*) del problema de torsión. Aquí es importante resaltar que el Principio de la Potencia Virtual solamente

permite calcular σ, es decir, las componentes T_{xz} y T_{yz} de $\mathbf{T}$. Las otras componentes surgen como reacciones de vínculo correspondientes a las restricciones impuestas por las hipótesis cinemáticas del modelo de torsión. La derivación de expresiones exactas (o aproximadas caso corresponda) para estas tensiones reactivas será explicado en detalle para el caso de las teorías de cáscaras (ver Sección 9.7.3). Así, dejamos como ejercicio para el lector deducir el valor de estas tensiones reactivas para el modelo de torsión presentado.

Como sabemos del Capítulo 3, σ pertenece a un conjunto (variedad lineal) Est_T cuyos elementos son todos los campos σ que equilibran la carga aplicada M_t. Recordando que

$$\mathrm{Est}_T = \bar{\sigma} + \mathrm{Var}_T \quad \bar{\sigma} \in \mathrm{Est}_T \text{ arbitrario}, \tag{8.37}$$

tenemos que todos estos campos quedan determinados a través del Principio de la Potencia Virtual excepto por una distribución de esfuerzos autoequilibrados.

Para eliminar esta indeterminación, debemos recurrirr a otra información que hasta ahora no fue suministrada. Esta información corresponde a definir el material que compone la barra en estudio por medio de la ecuación constitutiva que gobierna el comportamiento de este material.

Para simplificar nuestra presentación, consideremos el caso de barras de material elástico lineal e isotrópico en el régimen de pequeñas deformaciones. Tenemos así

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E} + \lambda(\mathrm{tr}\,\mathbf{E})\mathbf{I}, \tag{8.38}$$

donde μ y λ corresponden a los coeficientes de Lamé (que de ahora en adelante vamos a suponer constantes y estrictamente positivos en $\mathscr{B}$), $\mathbf{E}$ es el tensor de deformación (en este caso de pequeñas deformaciones, o sea de deformación infinitesimal) e $\mathbf{I}$ es el tensor identidad. Para la cinemática que hemos admitido, tenemos

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{E} = 0, \tag{8.39}$$

y, por lo tanto

$$\mathbf{T} = 2\mu\mathbf{E}, \tag{8.40}$$

lo que corresponde, en variables generalizadas, a

$$\sigma = \mu\gamma. \tag{8.41}$$

Retornando a la ecuación variacional (8.35), y haciendo uso de la ecuación constitutiva (8.41), obtenemos

$$\int_\Omega \mu\gamma \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\kappa} \in \mathscr{V}_\Omega. \tag{8.42}$$

Introduciendo la definición de γ y sabiendo que μ es constante se tiene

$$\int_\Omega (\nabla_\Omega \kappa + \alpha\chi) \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\kappa} \in \mathscr{V}_\Omega. \tag{8.43}$$

Si ahora hacemos $\kappa = \alpha\varphi$, donde $\varphi = \varphi(x,y)$ es conocida en la literatura como *warping function*, y substituimos en la expresión anterior, encontramos

$$\int_\Omega \nabla_\Omega \varphi \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} d\Omega = -\int_\Omega \chi \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} d_\Omega = \int_\Omega \hat{\kappa}\, \mathrm{div}_\Omega\, \chi d\Omega - \int_\Omega \mathrm{div}_\Omega(\hat{\kappa}\chi) d\Omega = -\int_\Gamma \hat{\kappa}\chi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \hat{\kappa} \in \mathscr{V}_\Omega. \quad (8.44)$$

De esta forma, tenemos

$$\int_\Omega \nabla_\Omega \varphi \cdot \nabla \hat{\kappa} d\Omega = -\int_\Gamma \hat{\kappa}\chi \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad \forall \hat{\kappa} \in \mathscr{V}_\Omega, \quad (8.45)$$

$$\int_\Omega \mu(\nabla\varphi \cdot \chi + |\chi|^2) d\Omega = \frac{M_t}{\alpha}, \quad (8.46)$$

donde $|\chi|^2 = \chi \cdot \chi$ y donde el escalar M_t/α es conocido por *rigidez torsional*. Las dos ecuaciones anteriores definen el problema variacional para el problema (primal) de torsión de barras elásticas isotrópicas según las hipótesis de Saint-Venant.

Para obtener la forma *local* del equilibrio, o sea, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la formulación variacional (8.45), hacemos uso del operador de equilibrio y del Principio de la Potencia Virtual

$$\int_\Omega \mu\gamma \cdot (\nabla_\Omega \hat{\kappa} + \hat{\alpha}\chi) d\Omega = \int_\Omega (\mathrm{div}_\Omega(\hat{\kappa}\mu\gamma) - \hat{\kappa}\,\mathrm{div}_\Omega(\mu\gamma)) d\Omega + \hat{\alpha}\int_\Omega \mu\gamma \cdot \chi d\Omega = \int_\Gamma (\mu\gamma \cdot \mathbf{n})\hat{\kappa} d\Gamma - \int_\Omega \mathrm{div}_\Omega(\mu\gamma)\hat{\kappa} d\Omega + \hat{\alpha}\int_\Omega \mu\gamma \cdot \chi d\Omega = M_t\hat{\alpha} \quad \forall (\hat{\kappa}, \hat{\alpha}) \in \mathscr{V}_\Omega \times \mathbb{R}. \quad (8.47)$$

Agrupando términos llegamos finalmente a

$$\int_\Gamma (\mu\gamma \cdot \mathbf{n})\hat{\kappa} d\Gamma - \int_\Omega \mathrm{div}(\mu\gamma)\hat{\kappa} d\Omega - \hat{\alpha}\left\{ M_t - \int_\Omega \mu\gamma \cdot \chi d\Omega \right\} = 0 \quad \forall (\hat{\kappa}, \hat{\alpha}) \in \mathscr{V}_\Omega \times \mathbb{R}, \quad (8.48)$$

que equivale a

$$\mathrm{div}_\Omega(\mu\gamma) = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (8.49)$$

$$\mu\gamma \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \quad (8.50)$$

$$\int_\Omega \alpha\mu(\nabla_\Omega \varphi \cdot \chi + |\chi|^2) d\Omega = M_t. \quad (8.51)$$

Ahora, como $\gamma = \kappa + \alpha\chi$, recordando que μ es constante, α también es constante, observando que $\mathrm{div}_\Omega\, \chi = 0$ y utilizando la función φ, resulta

$$\mu\alpha\,\mathrm{div}_\Omega(\nabla_\Omega\varphi)=0 \quad \text{en } \Omega, \tag{8.52}$$

$$\mu\alpha(\nabla_\Omega\varphi+\chi)\cdot\mathbf{n}=0 \quad \text{sobre } \Gamma, \tag{8.53}$$

$$\int_\Omega \alpha\mu(\nabla_\Omega\varphi\cdot\chi+|\chi|^2)d\Omega = M_t. \tag{8.54}$$

Trabajando un poco más la ecuación (8.54) tenemos, después de integrar por partes, lo siguiente

$$\begin{aligned}\int_\Omega \alpha\mu(\nabla_\Omega\varphi\cdot\chi+|\chi|^2)d\Omega = \\ -\alpha\mu\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}_\Omega\,\chi\,d\Omega+\mu\alpha\int_\Gamma\varphi(\chi\cdot\mathbf{n})d\Gamma+\mu\alpha\int_\Omega|\chi|^2d\Omega \\ \mu\alpha\int_\Gamma\varphi(\chi\cdot\mathbf{n})d\Gamma+\mu\alpha\int_\Omega|\chi|^2d\Omega.\end{aligned} \tag{8.55}$$

Resumiendo, la forma local del problema variacional (8.45) y (8.46) está caracterizado por el siguiente problema de valor de contorno

$$\triangle_\Omega\varphi=0 \quad \text{en } \Omega, \tag{8.56}$$

$$\nabla_\Omega\varphi\cdot\mathbf{n}=-\chi\cdot\mathbf{n} \quad \text{sobre } \Gamma, \tag{8.57}$$

$$\int_\Gamma\varphi(\chi\cdot\mathbf{n})d\Gamma=\frac{M_t}{\alpha\mu}-\int_\Omega|\chi|^2d\Omega. \tag{8.58}$$

Por lo tanto, la forma local del problema de torsión de una barra elástica se reduce a la solución de una ecuación de Laplace con condiciones de contorno del tipo Neumann más una restricción sobre el valor medio ponderado de φ sobre el contorno de la barra. Es importante resaltar aquí que, apesar de la relativa simplicidad práctica del problema variacional (8.45), en la mayoría de los casos es preferible el uso de la *formulación dual*, descripta en la próxima sección.

8.5 Formulación Dual

La formulación variacional *dual* a la obtenida en la sección anterior puede ser obtenida empleando el Principio de la Potencia Virtual Complementaria que establece que *la tasa de deformación* $\mathbf{D}$*, definida en la configuración actual en equilibrio, es compatible si y sólo si*

$$(\hat{\mathbf{T}},\mathbf{D})=(\hat{\mathbf{T}},\mathscr{D}\mathbf{w}) \quad \forall\hat{\mathbf{T}}\in\mathrm{Var}_T, \tag{8.59}$$

donde $\mathbf{w}\in\mathrm{Kin}_v$ *arbitrario.*

La expresión anterior puede ser reescrita en forma extendida de la siguiente forma

$$\int_{\mathscr{B}_t}\hat{\mathbf{T}}\cdot\mathbf{D}\,dV=\int_{\partial\mathscr{B}_{tv}}\hat{\mathbf{T}}\mathbf{n}\cdot\bar{\mathbf{v}}\,dS, \tag{8.60}$$

donde $\bar{\mathbf{v}}$ es el valor del campo de velocidades prescripto en la frontera $\partial\mathscr{B}_{tv}$.

Manteniendo todas las hipótesis anteriores y con el objetivo de facilitar la presentación, vamos a suponer que conocemos el valor de α. En otras palabras, α será un *dato* del problema. Mecánicamente esto implica que estamos prescribiendo el valor de la rotación de cualquier sección transversal de la barra y, por lo tanto, las componentes v_x y v_y del campo de velocidades (o desplazamiento en el caso de pequeñas deformaciones) están prescriptas.

Falta ahora caracterizar los espacios/conjuntos Var_T y Est_T para la cinemática propuesta. Esto se obtiene fácilmente, bastando para ello reescribir las expresiones que los definen

$$\mathrm{Var}_T = \{\mathbf{T} \in \mathscr{W}', (\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = 0 \; \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v\}, \tag{8.61}$$

que para el caso de torsión toma la forma

$$(\mathbf{T}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{T} \cdot \nabla^s \hat{\mathbf{v}} \, dV = L \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\boldsymbol{\gamma}} d\Omega = L \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla_\Omega \hat{\kappa} d\Omega =$$
$$L \int_\Gamma (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \hat{\kappa} d\Gamma - L \int_\Omega \hat{\kappa} \, \mathrm{div}_\Omega \, \boldsymbol{\sigma} d\Omega = 0 \quad \forall \hat{\kappa} \in \mathscr{V}_\Omega. \tag{8.62}$$

Lo anterior implica en

$$\mathrm{div}_\Omega \, \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad \text{en } \Omega, \tag{8.63}$$

y en términos de la función ψ resulta

$$\sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \sigma_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{8.64}$$

y además

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \psi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \psi}{\partial x} n_y = 0 \quad \text{sobre } \Gamma, \tag{8.65}$$

o sea

$$\nabla_\Omega \psi \cdot \mathbf{t} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \tag{8.66}$$

y por lo tanto

$$\psi = \bar{\psi} \quad \text{sobre } \Gamma, \tag{8.67}$$

donde $\mathbf{t}$ es el vector unitario tangente al contorno Γ y $\bar{\psi}$ es un valor constante.

Dado que α es conocido y, en consecuencia, prescripto, resulta fácil notar que $\mathrm{Est}_T = \mathrm{Var}_T$. Obtenemos así

$$\mathrm{Est}_T = \mathrm{Var}_T = \left\{ \boldsymbol{\sigma} \in \mathscr{W}'_\Omega, \sigma_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \sigma_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi = \bar{\psi} \text{ sobre } \Gamma \right\}. \tag{8.68}$$

Es importante recordar (ver Capítulo 3) que el problema dual (8.59) no garantiza unicidade pues, dado $\mathbf{D}$ compatible, para $\hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v$, tenemos

$$(\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D} + \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathbf{D}) + (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\mathbf{w}) + (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = (\hat{\mathbf{T}}, \mathscr{D}(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{v}})), \quad (8.69)$$

donde $\mathscr{D}(\mathbf{w} + \hat{\mathbf{v}})$ es claramente compatible, es decir, proviene de algun $\mathbf{v} \in \text{Kin}_v$.

Nuevamente, para retirar esta indeterminación, heremos uso de la propiedad del material que compone la barra en estudio. Así, de la ecuación constitutiva para materiales elásticos e isotrópicos descripta anteriormente, de las propiedades de Var_T y Est_T, y de la cinemática adoptada para el modelo de torsión, el Principio de la Potencia Virtual Complementaria resulta dado por

$$\int_{\mathscr{B}_t} \hat{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{D} dV = L \int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot \gamma(\sigma) d\Omega = L \int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot \frac{\sigma}{\mu} d\Omega =$$
$$\int_{\partial \mathscr{B}_{tv}} \hat{\mathbf{T}}\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{v}} dS = L \int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot \alpha\chi d\Omega = L \int_{\Omega} \hat{\sigma} \cdot \alpha\chi d\Omega \quad \forall \hat{\sigma} \in \text{Var}_T. \quad (8.70)$$

De esta manera, la expresiíon del PPVC puede ser reescrita como

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \nabla_{\Omega} \psi \cdot \nabla_{\Omega} \hat{\psi} d\Omega = -\int_{\Omega} \alpha \nabla_{\Omega} \hat{\psi} \cdot \mathbf{r} d\Omega \quad \forall \hat{\psi} \in \text{Var}_{\psi}, \quad (8.71)$$

donde $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ es el vector posición y

$$\text{Var}_{\psi} = \{\psi \in H^1(\Omega);\ \psi = \text{constante en } \Gamma\}. \quad (8.72)$$

Podemos desenvolver el término de la derecha de la ecuación (8.71), resultando en (ver Figura 8.4)

$$-\int_{\Omega} \alpha \nabla_{\Omega} \hat{\psi} \cdot \mathbf{r} d\Omega = \int_{\Omega} \alpha \hat{\psi} \,\text{div}_{\Omega}\, \mathbf{r} d\Omega - \int_{\Omega} \alpha \,\text{div}_{\Omega}(\hat{\psi}\mathbf{r}) d\Omega =$$
$$\alpha \left[\int_{\Omega} 2\hat{\psi} d\Omega - \sum_{i=1}^{nb} \bar{\psi}_i \int_{\Gamma_i} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\Gamma \right] \quad (8.73)$$

donde hemos usando la propiedad de que ψ es constante sobre cada una de las *nb* fronteras.

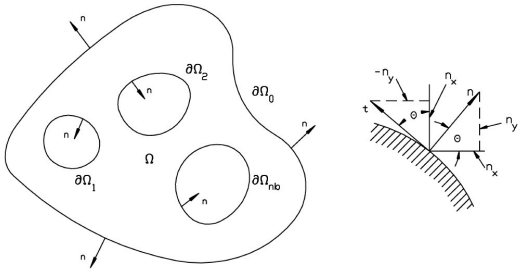


Fig. 8.4 Dominio genérico para el problema de torsión.

Si tenemos un dominio múltiplemente conexo como el de la Figura 8.4, ψ asume el valor $\bar{\psi}_i$ en Γ_i. Debemos también notar que las normales $\mathbf{n}$ están orientadas siempre para fuera del dominio en el sentido de integración sobre la frontera que, relacionado con la normal, es antihorario para la frontera externa y horario para las internas. Así, para efectuar la última integral del lado derecho de la expresión (8.73) procedemos como sigue

$$\int_{\Gamma_0} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}d\Gamma_0 = \int_{\Omega_0} \mathrm{div}_\Omega\, \mathbf{r}d\Omega_0 = 2\Omega_0 = 2\left(\Omega + \sum_{i=1}^{nb}\Omega_i\right), \tag{8.74}$$

$$\int_{\Gamma_i} \mathbf{r}\cdot\mathbf{n}d\Gamma = -\int_{\Omega_i} \mathrm{div}_\Omega\, \mathbf{r}d\Omega = -2\Omega_i \quad i\neq 0, \tag{8.75}$$

donde con Ω_i estamos representando el área limitada por Γ_i, $i = 1,\ldots,nb$. De la misma forma Ω representa el valor del área del dominio del problema y nb representa el número de orificios en la sección.

Substituyendo las expresiones (8.74) y (8.75) en (8.73), y ese resultado posteriormente es substituido en la (8.71) encontramos la forma variacional del problema dada por

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu}\nabla_\Omega\psi\cdot\nabla_\Omega\hat{\psi}d\Omega = 2\alpha\left[\int_\Omega \hat{\psi}d\Omega - \bar{\psi}_0\Omega_0 + \sum_{i=1}^{nb}\bar{\psi}_i\Omega_i\right] \quad \forall\hat{\psi}\in \mathrm{Var}_\psi. \tag{8.76}$$

Como es fácil notar, si ψ es solución, $\psi + C$, donde C es una constante, también es solución. Por lo tanto podemos hacer $\bar{\psi}_0 = 0$ y dividir la ecuación por α, obteniendo

$$\int_\Omega \frac{1}{\mu}\nabla_\Omega\Psi\cdot\nabla_\Omega\hat{\psi}d\Omega = 2\left[\int_\Omega \hat{\psi}d\Omega + \sum_{i=1}^{nb}\bar{\psi}_i\Omega_i\right] \quad \forall\hat{\psi}\in \mathrm{Var}_\psi \text{ y } \hat{\psi}_0 = 0, \tag{8.77}$$

donde $\Psi = \psi/\alpha$. Así, esta es la forma variacional final para el problema de torsión de barras formulada a partir del Principio de la Potencia Virtual Complementaria.

Resta ahora encontrar la forma local del problema, o sea, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema variacional (8.77). Para realizar esto, consideremos el dominio de la Figura 8.5. Al integrar por partes el término de la izquierda de la ecuación (8.77) tenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{1}{\mu}\nabla_\Omega\Psi\cdot\nabla_\Omega\hat{\psi} &= \int_\Omega \frac{1}{\mu}\mathrm{div}_\Omega(\hat{\psi}\nabla_\Omega\Psi)d\Omega - \int_\Omega \frac{1}{\mu}\hat{\psi}\triangle_\Omega\Psi d\Omega \\ &= \int_{\partial\Omega}\frac{1}{\mu}\hat{\psi}\nabla_\Omega\Psi\cdot\mathbf{n}d\Gamma - \int_\Omega\frac{1}{\mu}\hat{\psi}\triangle_\Omega\Psi d\Omega.\end{aligned} \tag{8.78}$$

Dado que (ver Figura 8.5)

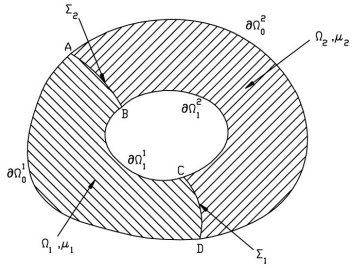


Fig. 8.5 Barra en torsión constituida por dos materiales diferentes.

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2 \cup \Gamma_1^1 \cup \Gamma_1^2 = \Gamma_0^1 \cup \Gamma_1^1 \cup \Sigma_1^{\mathrm{DC}} \cup \Sigma_2^{\mathrm{BA}} \cup \partial\Omega_0^2 \cup \Gamma_1^2 \cup \Sigma_2^{\mathrm{AB}} \cup \Sigma_1^{\mathrm{CD}}. \quad (8.79)$$

Debido a la orientación de los contornos tenemos $\Sigma_1^{\mathrm{DC}} \cup \Sigma_1^{\mathrm{CD}} = \emptyset$ y $\Sigma_2^{\mathrm{BA}} \cup \Sigma_2^{\mathrm{AB}} = \emptyset$. Luego, si hacemos

$$\Gamma^1 = \Gamma_0^1 \cup \Sigma_1^{\mathrm{DC}} \cup \Gamma_1^1 \cup \Sigma_2^{\mathrm{BA}}, \quad (8.80)$$

$$\Gamma^2 = \Gamma_0^2 \cup \Sigma_2^{\mathrm{AB}} \cup \Gamma_1^2 \cup \Sigma_1^{\mathrm{CD}}, \quad (8.81)$$

tenemos $\Gamma = \Gamma^1 \cup \Gamma^2$ con lo que resulta

$$\int_\Gamma \frac{1}{\mu} \hat{\psi} \nabla_\Omega \Psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_\Omega \frac{1}{\mu} \hat{\psi} \triangle_\Omega \Psi d\Omega = \sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Gamma^i} \frac{1}{\mu_i} \hat{\psi} \nabla_\Omega \Psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega_i} \frac{1}{\mu_i} \hat{\psi} \triangle_\Omega \Psi d\Omega \right]. \quad (8.82)$$

Desarrollando el término a la derecha de la igualdad en la ecuación (8.77), y recordando que $\hat{\psi}$ es constante en Γ y $\hat{\psi} = 0$ en Γ_0, tenemos

$$2\left[\int_\Omega \hat{\psi} d\Omega + \sum_{i=1}^{nb} \bar{\psi}_i \Omega_i \right] \quad \rightarrow \quad \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} 2\hat{\psi} d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \hat{\psi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (8.83)$$

Igualando las expresiones (8.82) y (8.83), recordando que $\hat{\psi} = 0$ en Γ_0, $\hat{\psi} = C$ en Γ_1 y agrupando, tenemos finalmente

$$\sum_{i=1}^{2} \left[\int_{\Omega_i} \left(\frac{1}{\mu_i} \triangle_\Omega \Psi + 2 \right) \hat{\psi} d\Omega \right] - \sum_{i=1}^{2} \int_{\Gamma^i} \frac{1}{\mu_i} \hat{\psi} \nabla_\Omega \Psi \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \hat{\psi} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad \forall \hat{\psi} \in \mathrm{Var}_\psi, \quad (8.84)$$

que por su vez, si usamos las expresiones (8.80) y (8.81) para expandir las integrales de contorno, tenemos

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\Omega_i}\left(\frac{1}{\mu_i}\triangle_\Omega\Psi+2\right)\hat{\psi}d\Omega-\sum_{i=1}^{2}\int_{\Sigma_i}\left[\!\left[\frac{1}{\mu}\nabla_\Omega\Psi\right]\!\right]\cdot\mathbf{n}\hat{\psi}d\Gamma$$
$$-\int_{\Gamma_1}\left(\frac{1}{\mu}\nabla_\Omega\Psi+\mathbf{r}\right)\cdot\mathbf{n}d\Gamma\hat{\psi}=0\quad\forall\hat{\psi}\in\mathrm{Var}_\psi. \tag{8.85}$$

La expresión anterior, conjuntamente con el Teorema Fundamental del Cálculo de las Variaciones, nos da la forma local del problema dual de torsión que, para el ejemplo que estamos tratando se reduce a

$$\triangle_\Omega\Psi=-2\mu_i \qquad \text{en } \Omega_i, \tag{8.86}$$
$$\left[\!\left[\frac{1}{\mu}\nabla\Psi\right]\!\right]\cdot\mathbf{n}=0 \qquad \text{sobre } \Sigma_i,\ i=1,2, \tag{8.87}$$
$$\int_{\Gamma_1}\left(\frac{1}{\mu}\nabla_\Omega\Psi+\mathbf{r}\right)\cdot\mathbf{n}d\Gamma=0. \tag{8.88}$$

Para entender las ecuaciones (8.87) y (8.88), y su significado mecánico, bastará reescribirlas en función de γ (distorsión angular) y φ (*warping function*). Así

$$\left[\!\left[\frac{1}{\mu}\nabla\Psi\cdot\mathbf{n}\right]\!\right]=\left[\!\left[\frac{1}{\mu\alpha}\nabla\psi\cdot\mathbf{n}\right]\!\right]=\left[\!\left[\frac{1}{\mu\alpha}\begin{pmatrix}\partial\psi/\partial x\\ \partial\psi/\partial y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_x\\ n_y\end{pmatrix}\right]\!\right]=$$
$$\left[\!\left[\frac{1}{\mu\alpha}\mu\begin{pmatrix}-\gamma_y\\ \gamma_x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}n_x\\ n_y\end{pmatrix}\right]\!\right]=\left[\!\left[-\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{t}\right]\!\right], \tag{8.89}$$

y, por lo tanto, de (8.87) concluimos

$$[\![\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{t}]\!]=0\quad\text{sobre } \Sigma_i,\ i=1,2. \tag{8.90}$$

Recordando que el tensor tasa de deformación tiene apenas las componentes $[\mathbf{D}]_{xz}$, $[\mathbf{D}]_{yz}$, $[\mathbf{D}]_{zx}$ y $[\mathbf{D}]_{zy}$ no nulas, y efectuando la aplicación de $\mathbf{D}$ sobre $\mathbf{t}$ (vector unitario tangente a Σ en cada punto) encontramos

$$\mathbf{Dt}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\ 0\\ \gamma_x t_x+\gamma_y t_y\end{pmatrix}, \tag{8.91}$$

y, consecuentemente

$$\mathbf{t}\cdot\mathbf{Dt}=0, \tag{8.92}$$
$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{Dt}=0, \tag{8.93}$$
$$\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{Dt}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\mathbf{t}. \tag{8.94}$$

Finalmente, de (8.90) se obtiene

$$[\![\mathbf{e}_3\cdot\mathbf{Dt}]\!]=0. \tag{8.95}$$

El resultado anterior nos muestra que fibras en la dirección de $\mathbf{t}$ no sufren deformación, que no existe distorsión angular entre los pares $(\mathbf{n},\mathbf{t})$ y, finalmente, que no existe salto en la distorsión angular entre $\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{t}$.

Por otro lado, la expresión (8.88) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1}\left(\frac{1}{\mu}\nabla_\Omega\Psi+\mathbf{r}\right)\cdot\mathbf{n}d\Gamma &= \int_{\Gamma_1}\left(\frac{1}{\mu\alpha}\nabla_\Omega\psi+\mathbf{r}\right)\cdot\mathbf{n}d\Gamma\\ &= \int_{\Gamma_1}\left[\frac{1}{\mu\alpha}\begin{pmatrix}-\mu(\partial\kappa/\partial y+\alpha x)\\ \mu(\partial\kappa/\partial x-\alpha y)\end{pmatrix}+\mathbf{r}\right]\cdot\mathbf{n}d\Gamma\\ = \int_{\Gamma_1}\left[\begin{pmatrix}-\partial\varphi/\partial y\\ \partial\varphi/\partial x\end{pmatrix}\right]\cdot\mathbf{n}d\Gamma &= \int_{\Gamma_1}-\nabla_\Omega\varphi\cdot\mathbf{t}d\Gamma=-\int_{\Gamma_1}d\varphi=0, \quad (8.96)\end{aligned}$$

luego

$$[\![\varphi]\!]=0 \quad \text{en } \Gamma_1. \quad (8.97)$$

La ecuación anterior es llamada *condición de compatibilidad* y, mecánicamente, implica que no podemos tener un desplazamiento o fractura en el sentido de $\mathbf{e}_3$ en ningún punto de Γ_1.

Finalmente, veamos la expresión para el momento torsor. De (8.36) tenemos que

$$\begin{aligned}M_t=\int_\Omega\sigma\cdot\chi d\Omega=\int_\Omega\begin{pmatrix}\partial\psi/\partial y\\ -\partial\psi/\partial x\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}d\Omega=-\int_\Omega\alpha\nabla_\Omega\Psi\cdot\mathbf{r}d\Omega=\\ -\alpha\left[\int_\Omega\mathrm{div}_\Omega(\Psi\mathbf{r})d\Omega-\int_\Omega 2\Psi d\Omega\right]=\alpha\left[\int_\Omega 2\Psi d\Omega-\int_\Gamma\Psi\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}d\Gamma\right]\\ =\alpha\left[\int_\Omega 2\Psi\, d\Omega+\sum_{i=1}^{nb}2\Psi_i\Omega_i\right]. \quad (8.98)\end{aligned}$$

donde Ψ_i es el valor de Ψ en el contorno Γ_i, nb es el número de orificios en el dominio y Ω_i es el valor del área limitada por Γ_i. Nuevamente, definimos M_t/α como la rigidez torsional de la barra, es decir, el momento torsor que debe ser aplicado para tener una rotación de un radiano por unidad de longitud de la barra, el cual resulta

$$\frac{M_t}{\alpha}=2\left[\int_\Omega\Psi d\Omega+\sum_{i=1}^{nb}\Psi_i\Omega_i\right]. \quad (8.99)$$

Capítulo 9
Modelado de Placas y Cáscaras

9.1 Introducción

Como mencionamos al comienzo de la Parte III, mucho antes de Cristo los arquitectos romanos construian acueductos salvando grandes luces por intermedio de arcos que permiten que las cargas sobre la estructura sean transferidas a la fundación a través de un estado de compresión en toda la estructura, lo cual era apropiado para el material que se disponía en esa época. Un ejemplo de estas estructuras podemos ver en la Figura 9.1 que muestra una vista de lo que aun está en pie del *Pont du Gard* al sur de Francia. Este acueducto fue construido un poco antes de la era cristiana para permitir que el acueducto de Nîmes (que tiene aproximadamente 50 km de longitud) atraviese el rio Gard. Los arquitectos e ingenieros hidráulicos romanos que lo proyectaron criaron una obra de arte técnica y artística. De hecho, el puente tiene 49 m de altura, y 275 m de largo. La distribución de los arcos mostrados en la figura fue realizada de la siguiente forma: (i) en el nivel inferior exiten 7 arcos de 142 m de largo, 6 m m de espesor y 22 m de altura, soportando una carretera, (ii) en el nivel medio encontramos 11 arcos con 242 m de longitud, 4 m de espesor y 20 m de altura, (iii) finalmente el nivel superior está formado por 35 arcos con 275 m de largo, 3 m de espesor y 7 m de altura siendo que en su parte superior tiene un acueducto de 1.8 m de altura y 1.2 m de ancho con una pendiente de 0.4%.

Fig. 9.1 Acueducto romano en el sur de Francia.

En el otro extremo del desarrollo de nuestra civilización (siglos XX y XXI) tenemos las cáscaras (las vigas y placas podemos considerarlas como casos particulares) que son estructuras muy finas (esbeltas) cuando comparadas con las enormes superficies que son capaces de cubrir gracias a la forma (curvatura) de las mismas, adaptándose así a diversas necesidades de la ingeniería civil, mecánica, nuclear, naval y aeroespacial, entre otras.

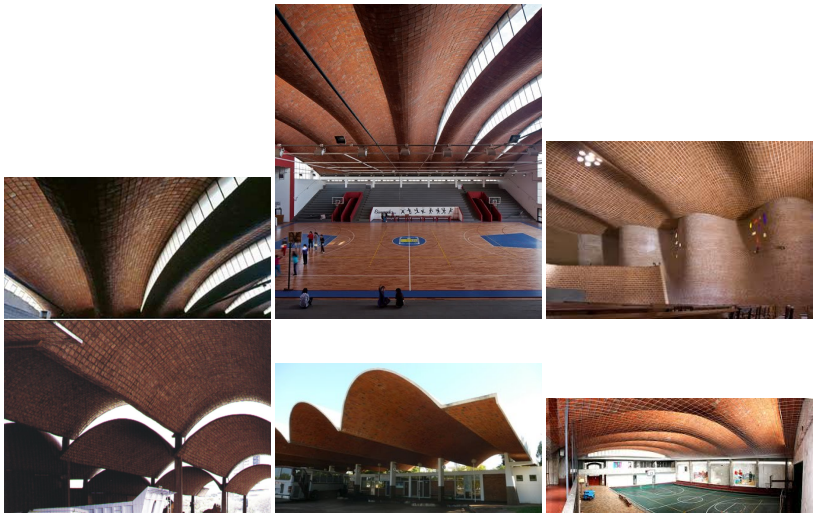


Fig. 9.2 Algunos ejemplos de cáscaras proyectadas y construidas por el arquitecto uruguayo Eladio Dieste

Para que el lector tenga una idea de cuan finas y maravillosas son estas estructuras, presentamos algunos ejemplos de cáscaras construidas por famosos arquitectos latinoamericanos y europeos durante el siglo pasado y comienzo del presente. La Figura 9.2 muestra diversas obras del arquitecto uruguayo Eladio Dieste. El componente estructural *cáscara* le permitió atender necesidades arquitectónicas con estructuras leves. De la misma manera, la Figura 9.3 muestra obras del arquitecto español Félix Candela, mientras que la Figura 9.4 muestra obras del también arquitecto español Santiago Calatrava. Otro arquitecto español famoso por sus proyectos de cáscaras es Eduardo Torroja, y la Figura 9.5 presenta una de sus obras. Finalmente, no podemos dejar de mostrar obras del arquitecto italiano Pier Luigi Nervi, donde la Figura 9.6 muestra el templo *Baha'i Lotus* en Nueva Delhi y el *Palazzetto dello Sport* en Roma.

Todas estas figuras son ejemplos de lo magnífico que son estas estructuras en la construcción civil. En la ingeniería nuclear las torres de enfriamiento de las usinas nucleares son uno de los ejemplos de aplicación de estas estructuras. En este sentido, la Figura 9.7 muestra las torres de enfriamiento de la usina nuclear en Dukovany, USA. De la misma manera, en la ingeniería mecánica los vasos de presión (ver Figura 9.8) son ejemplos de las innúmeras aplicaciones que las cáscaras tienen.

Fig. 9.3 Algunos ejemplos de cáscaras proyectadas y construidas por el arquitecto español Félix Candela.

Fig. 9.4 Algunos ejemplos de cáscaras proyectadas y construidas por el arquitecto español Santiago Calatrava.

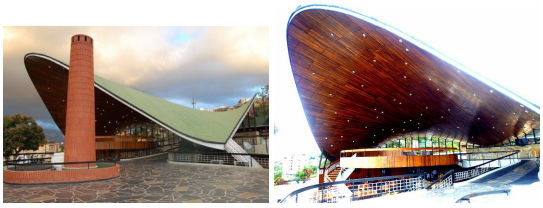


Fig. 9.5 Ejemplo de cáscara proyectada y construida por el arquitecto español Eduardo Torroja.

Todas estos ejemplos son claros indicadores de la diversidad de aplicaciones que tienen estos elementos estructurales y su importancia para el desarrollo de la humanidad. Lo anterior es una motivación para presentar las bases teóricas que gobiernan el comportamiento de estas estructuras dentro del enfoque variacional que hemos colocado en esta monografía. Para ello vamos a seguir un camino similar al utilizado para presentar la teoría clásica de vigas y la teoría de barras en torsión, es decir, presentaremos la cinemática asociada a las acciones de movimiento, lo que nos permitirá definir el espacio Var_v, el operador tasa de acciones de deformación, el cual nos permitirá definir el espacio $\mathscr{W}$ y, a través de la dualidad, procederemos a obtener las fuerzas generalizadas (internas y externas) asociadas a las diversas

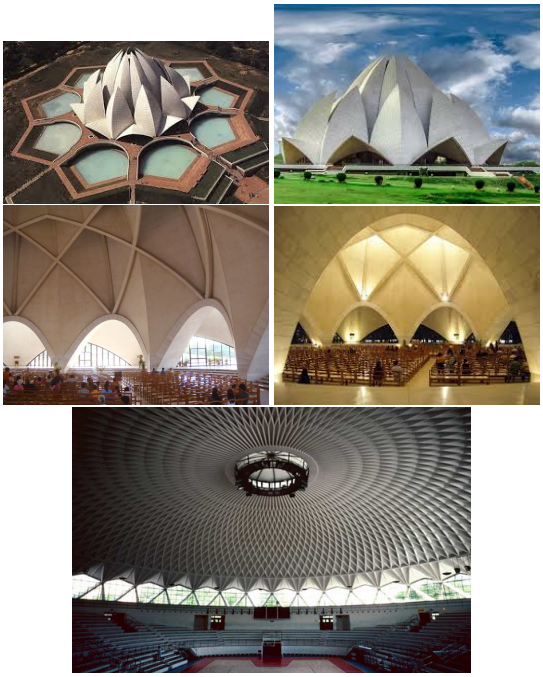


Fig. 9.6 Ejemplos de cáscaras proyectadas y construidas por el arquitecto italiano Pier Luigi Nervi.

Fig. 9.7 Torre de enfriamiento en la usina nuclear de Dukovany, USA.

Fig. 9.8 Vaso de presión.

teorías que presentaremos. Por último, el concepto de equilbrio entre estas fuerzas generalizadas lo obtendremos mediante el Principio de la Potencia Virtual.

Finalmente, es importante resaltar que en este capítulo el tratamiento de estos componentes, desde el punto de vista geométrico, será general en el sentido de que la curvatura de la estructura siempre será considerada en los desarrollos. Esta es la característica de las cáscaras. El caso de placas será tratado como un caso particular de cáscara en la cual la estructura es plana, y, por lo tanto, no posee curvatura (curvatura nula). El lector interesado en modelos de placas deberá simplemente remover los términos asociados a la curvatura de la estructura para arribar a las ecuaciones variacionales que gobiernan tales componentes. Como veremos mas adelante, esto será realizado a través de ejercícios específicos dejados para el lector.

9.2 Descripción Geométrica

Como vimos en la Sección 9.1, una cáscara es un sólido tridimensional que se caracteriza porque una de sus dimensiones características, denominada *espesor*, es mucho menor que las otras dos. La propiedad hace que el análisis de cáscaras pueda ser realizado como un caso particular del análisis de cuerpos deformables tridimensionales.

Dentro de este enfoque la condición (simplificación de caracter geométrico) de que el espesor es mucho menor que las otras dos longitudes características permite, junto a simplificaciones de carácter cinemático, reducir el análisis de cáscaras al análisis de superficies (de la misma forma que las simplificaciones en vigas reducía el problema al análisis de líneas resistentes a flexión). Por lo tanto, la teoría de cáscaras que vamos a presentar tiene por objetivo trasladar el comportamiento tridimensional de este tipo de estructura a un comportamiento que será expresado en función de campos definidos sobre superficies. En este sentido, en las Secciones 9.8, 9.8.2, 9.8.3 y 9.8.4 el lector encontrará algunas nociones de geometría diferencial de superficies y de las propiedades del operador Λ que juega un papel importante en la presentación unificada que hacemos en este capítulo y que será definido más adelante.

La teoría de cáscaras prácticamente nace con los trabajos de Love (1888), y ha sido marcada por la contribución de las escuelas Russa, Holandesa, Alemana y Americana entre otras. Así, podemos citar la analogía estática-geométrica de Goldenweizer y Lure, y sus aplicaciones por medio de variables complejas; la introducción de tensiones simétricas de Sanders y Leonard, la teoría de estados planos de tensión de Koiter y su comparación con la teoría de Love, entre otras, el método de expansiones asintóticas de Goldenweizer, la teoría de Green y Naghdi por medio de las superficies de Cosserat.

El desarrollo de estas teorías siempre ha estado marcado por el elevado grado de dificultad que presenta. Entre ellas, dificultades geométricas inherentes a la teoría de superficies, donde los campos están definidos en espacios que ya no son más Euclidianos requiriendo por lo tanto de adecuado tratamiento por medio de la geometría

diferencial. Otra dificultad que aparece en la mayoría de los trabajos (al igual que en vigas) está relacionado con la parte constitutiva (comportamiento del material).

Como ya mencionamos, en este capítulo trataremos de presentar los principios básicos existentes en las diversas teorías de cáscaras, y que son válidos para todo tipo de comportamiento de material, de manera a no depender de las dificultades arriba mencionadas. Para ello trabajaremos con el sistema intrínseco de la cáscara que es independiente de todo tipo de sistema de coordenadas que se desee adoptar. Al proceder de esta forma, y auxiliados con la formulación variacional, es posible presentar los conceptos cinemáticos, los esfuerzos asociados y su correspondiente equilibrio de una manera compacta y clara, al no quedar *oscurecidos* por detalles asociados al cálculo diferencial (y su complejidad con el tipo de superficie media) y relacionados con el comportamiento del material.

Así y basados en estas consideraciones, podemos observar que la configuración actual $\mathscr{B}_t$ de la cáscara, de ahora en adelante será denotada por Ω, se encontra en el espacio euclidiano tridimensional, $\mathscr{E}$, y la podemos ver como generada por un segmento de línea de longitud variable (pero pequeña) que, al moverse, su punto medio describe una superficie, Σ_o, a la cual dicho segmento permanece ortogonal. La longitud de dicho segmento es conocida como *espesor* de la cáscara, y Σ_o es conocida como *superficie media* de la cáscara. Así, si $\mathbf{x}_o \in \Sigma_o$ es un punto arbitrario de la superficie media y $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$ es el vector normal unitario a esta superficie en el punto $\mathbf{x}_o$, podemos formalizar esta descripción de la siguiente forma

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathscr{E}; \mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \xi\mathbf{n}, \mathbf{x}_o \in \Sigma_o, \xi \in H\}, \tag{9.1}$$

donde $H = (-\frac{h(\mathbf{x}_o)}{2}, \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2})$ y $h(\mathbf{x}_o)$ es el espesor de la cáscara en el punto $\mathbf{x}_o$. Para que la aplicación $\mathbf{x} \in \Omega \leftrightarrow (\mathbf{x}_o, \xi)$ sea bien puesta (es decir, dado $\mathbf{x} \in \Omega$ corresponde un único par $(\mathbf{x}_o, \xi)$, y viceversa) vamos a suponer que las siguientes restricciones son satisfechas

- $\mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$ está bien definida para todo punto $\mathbf{x}_o \in \Sigma_o$. Es decir, no existen puntos (o curvas) de Σ_o en los cuales la normal no está definida. En otras palabras, estamos exigiendo que la superficie sea *suave* en el sentido que el vector normal y el plano tangente (ortogonal a la normal) están únicamente definidos para cada punto de la superficie media. Como mencionado al comienzo de este capítulo, placas serán consideradas casos particulares de cáscaras, en las cuales la superficie Σ_o está caracterizada por un plano. Luego, en el caso de placas, el vector $\mathbf{n}$ es el mismo (constante) cualquiera que sea el punto $\mathbf{x}_o \in \Sigma_o$.
- $|\xi| \leq \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2} \leq R_m$ donde R_m es el radio mínimo de curvatura de la cáscara en el punto $\mathbf{x}_o$ (ver (9.320)).

Teniendo en cuenta la descripción (9.1), el dominio de la cáscara Ω está limitado por las superficies superior, Σ^+, e inferior, Σ^-, caracterizadas respectivamente por

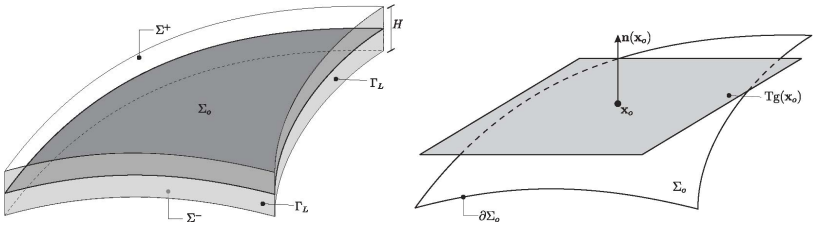
$$\Sigma^+ = \left\{ \mathbf{x} \in \mathscr{E}; \mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2}\mathbf{n}, \mathbf{x}_o \in \Sigma_o \right\}, \tag{9.2}$$

$$\Sigma^- = \left\{ \mathbf{x} \in \mathscr{E}; \mathbf{x} = \mathbf{x}_o - \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2}\mathbf{n}, \mathbf{x}_o \in \Sigma_o \right\}, \tag{9.3}$$

y por la *superficie lateral* de la cáscara, Γ_L, generada cuando $\mathbf{x}_o$ recorre el contorno de Σ_o, es decir $\mathbf{x}_o$ recorre $\partial\Sigma_o$. Esta superficie está caracterizada por

$$\Gamma_L = \{ \mathbf{x} \in \mathscr{E}; \mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \xi\mathbf{n}, \mathbf{x}_o \in \partial\Sigma_o, \xi \in H \}. \tag{9.4}$$

Finalmente, en la Figura 9.9 presentamos esta descripción geométrica de la configuración actual de una cáscara.



(a) Configuración actual.

(b) Descripción de la normal y del plano tangente en el punto $\mathbf{x}_o \in \Sigma_o$.

Fig. 9.9 Descripción geométrica de una cáscara.

Como nuestro objetivo es presentar la teoría dentro de una notación compacta e independiente del sistema de coordenadas que se adopte, observamos que la superficie media de la cáscara tiene un sistema intrínseco a ella asociado que atiende a este objetivo. De hecho, y dadas las restricciones que hemos impuesto a nuestra geometría, en cada punto $\mathbf{x}_o \in \Sigma_o$ tenemos el *sistema intrínseco* $\{\mathbf{n}(\mathbf{x}_o), P_t(\mathbf{x}_o)\}$ definido por el vector normal, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$ y el plano tangente, $P_t(\mathbf{x}_o)$, en ese punto que es ortogonal a $\mathbf{n}$. En efecto, dado $\mathbf{x}_o \in \Sigma_o$ el plano tangente a la superficie media en ese punto queda definido por

$$P_t(\mathbf{x}_o) = \{ \mathbf{y} \in \mathscr{E}; (\mathbf{y} - \mathbf{x}_o) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) = 0 \}. \tag{9.5}$$

que, salvo cuando la superficie sea plana, varia (continuamente por la regularidad aceptada) en cada punto de la cáscara.

Con estas definiciones en mente, vemos que todo vector $\mathbf{v}$ podemos descomponerlo por la suma de su proyección sobre el plano tangente y de su proyección sobre la normal. Es decir

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n = \mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}, \tag{9.6}$$

de donde

$$\mathbf{v}_t = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{v} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{v} = [\mathbf{I} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})]\mathbf{v} = \Pi_t \mathbf{v}. \tag{9.7}$$

La expresión anterior define el operador proyección ortogonal sobre el plano tangente P_t dado por

$$\Pi_t = \mathbf{I} - (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \tag{9.8}$$

que es evidentemente un tensor simétrico. Con esta definición en manos el tensor identidad puede ser expresado por

$$\mathbf{I} = \Pi_t(\mathbf{x}_o) + \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}_o). \tag{9.9}$$

Luego, para un vector arbitrario $\mathbf{v}$ obtenemos la siguiente descomposición para esta *base* intrínseca

$$\mathbf{v} = \mathbf{I}\mathbf{v} = \Pi_t(\mathbf{x}_o)\mathbf{v} + (\mathbf{n}(\mathbf{x}_o) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}_o))\mathbf{v} = \mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{v}_t + v_n\mathbf{n} = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_n, \tag{9.10}$$

donde $\mathbf{v}_t$ es un vector en el plano tangente y v_n es la componente de $\mathbf{v}$ sobre la base $\mathbf{n}$.

Por otro lado, dado un tensor de segundo orden $\mathbf{S}$, su descomposicón en esta base intrínseca ortogonal se obtiene fácilmente donde, para simplificar la notación, hemos eliminado $\mathbf{x}_o$ en las expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathbf{I}\mathbf{S}\mathbf{I} = (\Pi_t + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{S}(\Pi_t + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \\ \Pi_t\mathbf{S}\Pi_t + \Pi_t\mathbf{S}\mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \Pi_t\mathbf{S}^T\mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{S}\mathbf{n})(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = \\ \mathbf{S}_t + \mathbf{S}_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{S}_s^* + S_n(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}), \end{aligned} \tag{9.11}$$

En la descomposición anterior podemos ver que $\mathbf{S}_t = \Pi_t\mathbf{S}\Pi_t$ es un tensor que transforma vectores en el plano tangente en vectores en ese mismo plano, y vectores paralelos a $\mathbf{n}$ en el vector nulo. Por otro lado, $\mathbf{S}_s = \Pi_t\mathbf{S}\mathbf{n}$ y $\mathbf{S}_s^* = \Pi_t\mathbf{S}^T\mathbf{n}$ son vectores en el plano tangente, resultando iguales si $\mathbf{S}$ es un tensor simétrico. Aún más, el tensor $\mathbf{S}_s \otimes \mathbf{n}$ transforma vectores normales a la superficie media en vectores en el plano tangente siendo que vectores en el plano tangente son transformados en el vector nulo. De manera similar, el tensor $\mathbf{n} \otimes \mathbf{S}_s^*$ transforma vectores en el plano tangente en vectores normales a la superficie media siendo que vectores normales a esta superficie son transformados en vectores nulos. Por último, el tensor $S_n(\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$ transforma vectores normales en vectores normales a la superficie media siendo que vectores en el plano tangente son transformados en vectores nulos.

Así y como era esperado, este sistema intrínsico ortogonal permite la descomposición de vectores y tensores de segunda orden en componentes que son ortogonales entre sí. De esta manera, el producto escalar entre vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$, y entre tensores $\mathbf{R}$ y $\mathbf{S}$, arbitrarios toma, respectivamente, la siguiente forma

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_t \cdot \mathbf{v}_t + u_n v_n, \tag{9.12}$$

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{R}_t \cdot \mathbf{S}_t + \mathbf{R}_s \cdot \mathbf{S}_s + \mathbf{R}_s^* \cdot \mathbf{S}_s^* + R_n S_n. \tag{9.13}$$

9.3 Diferenciación e Integración

En la sección anterior hemos visto que dado un punto arbitrario de la cáscara, $\mathbf{x} \in \Omega$, el mismo está relacionado de manera biunívoca con el par $(\mathbf{x}_o, \xi)$, y esta relación está dada por

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \xi \mathbf{n}(\mathbf{x}_o), \tag{9.14}$$

donde $\mathbf{x}_o$ es la proyección ortogonal (mínima distancia) de $\mathbf{x}$ sobre la superficie media de la cáscara Σ_o. Dada esta transformación, cualquier campo (escalar, vectorial, tensorial) definido en Ω puede ser transformado en un campo definido en $\Sigma_o \times H$. Esto, junto con adecuadas hipótesis cinemáticas, nos va a permitir substituir las integrales en Ω y en $\partial\Omega$, existentes en el Principio de la Potencia Virtual, por integrales en Σ_o y sobre su contorno $\partial\Sigma_o$. Es decir, de un problema variacional definido en un dominio tridimensional pasamos a un problema variacional definido en una superficie, de una manera enteramente similar al problema de vigas cuando pasamos del dominio tridimensional a un dominio unidimensional.

Para esto, y de acuerdo con la transformación (9.14), tenemos que una fibra infinitesimal $d\mathbf{x}$ en Ω puede expresarse como

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_o + \xi d\mathbf{n}(\mathbf{x}_o) + d\xi \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) = d\mathbf{x}_o + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}\, d\mathbf{x}_o + d\xi \mathbf{n} = \\ (\mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}(\mathbf{x}_o))d\mathbf{x}_o + d\xi \mathbf{n} = \Lambda(\mathbf{x}_o, \xi) d\mathbf{x}_o + d\xi \mathbf{n}, \end{aligned} \tag{9.15}$$

donde

$$\Lambda(\mathbf{x}_o, \xi) = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}(\mathbf{x}_o). \tag{9.16}$$

En la expresión anterior hemos definido el operador Λ en el cual $\nabla_{\mathbf{x}_o}(\cdot)$ representa el gradiente de $(\cdot)$ con respecto a las coordenadas $\mathbf{x}_o$ definidas sobre el plano tangente P_t a la superficie media Σ_o en el punto $\mathbf{x}_o$. De la misma manera, $\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$ es el tensor curvatura de la superficie media que nos dice como varía el plano tangente en una vecindad infinitesimal de $\mathbf{x}_o$. Aquí es importante observar que Λ es un tensor simétrico ($\Lambda = \Lambda^T$), y que tiene inversa, Λ^{-1}, dada la correspondencia biunívoca entre $\mathbf{x} \in \Omega$ y $(\mathbf{x}_o, \xi)$.

Además es fácil observar que

$$\Pi_t(\mathbf{x}_o) d\mathbf{x} = \Lambda(\mathbf{x}_o, \xi) d\mathbf{x}_o, \tag{9.17}$$

$$d\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_o) = d\xi. \tag{9.18}$$

En el caso de placas, el lector puede observar que el operador Λ se reduce al operador identidad $\mathbf{I}$, resultando un operador constante, es decir, independiente de $(\mathbf{x}_o, \xi)$.

Con estas definiciones en mano, y como ya mencionado en el comienzo de esta sección, dado un campo escalar v definido en Ω, y gracias a la transformación (9.14), lo podemos ver como un campo definido en $\Sigma_o \times H$. Luego la diferenciación de este campo proporciona

$$v(\mathbf{x}) = \tilde{v}(\mathbf{x}_o, \xi) \quad \Rightarrow \quad dv = \nabla v \cdot d\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{x}_o} \tilde{v} \cdot d\mathbf{x}_o + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi} d\xi. \tag{9.19}$$

Por otro lado, haciendo uso de la expresión (9.15) tenemos

$$\nabla v \cdot d\mathbf{x} = \nabla v \cdot \Lambda d\mathbf{x}_o + \nabla v \cdot \mathbf{n} d\xi. \tag{9.20}$$

Comparando estas dos últimas expresiones, y haciendo uso de la simetría del operador Λ obtenemos

$$\Lambda \nabla v = \nabla_{\mathbf{x}_o} \tilde{v}, \tag{9.21}$$

$$\nabla v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}. \tag{9.22}$$

Luego, la descomposición del vector ∇v en su componente tangente y su componente normal

$$\nabla v = (\nabla v)_t + (\nabla v)_n \mathbf{n}, \tag{9.23}$$

es tal que

$$(\nabla v)_t = \Pi_t \nabla v = \Pi_t \Lambda^{-1} \nabla_{\mathbf{x}_o} \tilde{v}, \tag{9.24}$$

$$(\nabla v)_n = \nabla v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \xi}. \tag{9.25}$$

Veamos ahora la diferenciación de un campo vectorial $\mathbf{v}$ definido en Ω (y por lo tanto de su correspondiente $\tilde{\mathbf{v}}$ definido en $\Sigma_o \times H$). Procediendo de manera similar tenemos

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_o, \xi) \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} = \nabla_{\mathbf{x}_o} \tilde{\mathbf{v}} d\mathbf{x}_o + \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \xi} d\xi. \tag{9.26}$$

Recordando (9.15), la expresión anterior toma la forma

$$\nabla \mathbf{v} d\mathbf{x} = (\nabla_{\mathbf{x}_o} \tilde{\mathbf{v}}) \Lambda^{-1} \Pi_t d\mathbf{x} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \xi} \mathbf{n} \cdot d\mathbf{x} = \left((\nabla_{\mathbf{x}_o} \tilde{\mathbf{v}}) \Lambda^{-1} \Pi_t + \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \xi} \otimes \mathbf{n} \right) d\mathbf{x}, \tag{9.27}$$

obteniendo finalmente

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla_{\mathbf{x}_o} \tilde{\mathbf{v}}) \Lambda^{-1} \Pi_t + \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial \xi} \otimes \mathbf{n}, \tag{9.28}$$

que establece la relación entre el gradiente respecto a $\mathbf{x} \in \Omega$ de cualquier campo vectorial $\mathbf{v}$ definido en Ω en función del gradiente respecto a $(\mathbf{x}_o, \xi)$ del mismo campo, pero ahora visto como definido en $\Sigma_o \times H$, $\tilde{\mathbf{v}}$. Recordando ahora la descomposición de $\mathbf{v}$ en su parte tangente y normal al plano tangente, al aplicar el operador gradiente tenemos lo siguiente

$$\nabla \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v}_t + v_n \nabla \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \nabla v_n. \tag{9.29}$$

Para los campos $\mathbf{v}_t$ y $\mathbf{n}$ podemos aplicar el resultado obtenido en (9.28), y para el gradiente del campo escalar, ∇v_n, podemos aplicar lo obtenido en (9.24)-(9.25). Tenemos así

$$\nabla\mathbf{v} = (\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}_t}{\partial\xi}\otimes\mathbf{n} + \tilde{v}_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t \\ + \mathbf{n}\otimes\Pi_t\Lambda^{-1}\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{v}_n + \frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial\xi}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}. \quad (9.30)$$

En la expresión anterior todos los términos del segundo miembro excepto el primero se encuentran expresados en la base instrínseca que hemos adoptado. Luego, sólo falta descomponer el primer término para tener la descomposición completa del tensor $\nabla\mathbf{v}$. Así

$$(\Pi_t + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n})(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)\Lambda^{-1}\Pi_t(\Pi_t + \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = \\ \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + \mathbf{n}\otimes\Pi_t^T\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)^T\mathbf{n}. \quad (9.31)$$

De la ortogonalidad entre $\mathbf{n}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_t$ el término $(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)^T$ puede ser reescrito de otra manera. En efecto, como $\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_t = 0$, $\forall\mathbf{x}_o\in\Sigma_o$, resulta

$$\nabla_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{n}\cdot\tilde{\mathbf{v}}_t) = (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\tilde{\mathbf{v}}_t + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)^T\mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)^T\mathbf{n} = -(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\tilde{\mathbf{v}}_t. \quad (9.32)$$

Substituyendo este resultado en (9.31) obtenemos

$$(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)\Lambda^{-1}\Pi_t = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)\Lambda^{-1}\Pi_t - \mathbf{n}\otimes\Pi_t^T\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\tilde{\mathbf{v}}_t. \quad (9.33)$$

De este resultado y de (9.30) llegamos finalmente a la expresión buscada

$$\nabla\mathbf{v} = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + \tilde{v}_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t + \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}_t}{\partial\xi}\otimes\mathbf{n} \\ + \mathbf{n}\otimes\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{v}_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\tilde{\mathbf{v}}_t) + \frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial\xi}\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \quad (9.34)$$

donde podemos distinguir las componentes de $\nabla\mathbf{v}$ en la base intrínseca adoptada. En particular

$$(\nabla\mathbf{v})_t = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{\mathbf{v}}_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + \tilde{v}_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t, \quad (9.35)$$

$$(\nabla\mathbf{v})_s = \frac{\partial\tilde{\mathbf{v}}_t}{\partial\xi}, \quad (9.36)$$

$$(\nabla\mathbf{v})_s^* = \Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\tilde{v}_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\tilde{\mathbf{v}}_t), \quad (9.37)$$

$$(\nabla\mathbf{v})_n = \frac{\partial\tilde{v}_n}{\partial\xi}. \quad (9.38)$$

Ejercicio 9.1. Obtener las expresiones (9.35)-(9.38) particularizadas para el caso de placas.

Hasta aquí hemos visto como la descripción geométrica de la cáscara, (9.14), impacta en las expresiones de los gradientes de campos escalares y vectoriales. Ahora veamos como esa descripción impacta en las expresiones de las integrales en Ω y de las integrales en sus contornos Σ^+, Σ^- y Γ_L. Para esto, sean φ y $\mathbf{w}$ campos arbitrarios, escalar y vectorial respectivamente. Luego

$$\int_{\Omega} \varphi \, d\Omega = \int_{\Sigma_o} \int_H \varphi \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_o, \tag{9.39}$$

$$\int_{\Sigma^+} \varphi \, d\Sigma^+ = \int_{\Sigma_o} (\varphi \det \Lambda)|_{\xi=\frac{h}{2}} \, d\Sigma_o, \tag{9.40}$$

$$\int_{\Sigma^-} \varphi \, d\Sigma^- = \int_{\Sigma_o} (\varphi \det \Lambda)|_{\xi=-\frac{h}{2}} \, d\Sigma_o, \tag{9.41}$$

$$\int_{\Gamma_L} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma} \, d\Gamma_L = \int_{\partial\Sigma_o} \int_H \mathbf{w} \cdot \Lambda^{-1} \mathbf{n}_o \det \Lambda \, d\xi \, d\partial\Sigma_o, \tag{9.42}$$

donde $\mathbf{n}|_{\Gamma}$ y $\mathbf{n}_o$ son, respectivamente, los vectores unitarios exteriores de Γ_L y de $\partial\Sigma_o$ en $\mathbf{x}_o$, como se ve en la Figura 9.10.

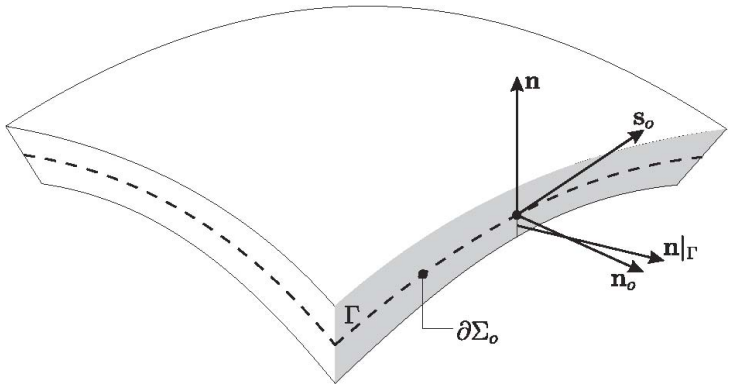


Fig. 9.10 Descripción geométrica de los vectores normales a $\partial\Sigma_o$ y Γ_L.

Ejercicio 9.2. Obtener las expresiones (9.39)-(9.42) particularizadas para el caso de placas.

En la próxima sección vamos a hacer uso de la expresión del $\nabla\mathbf{v}$ que hemos obtenido en función de sus componentes (9.35)-(9.38) para, haciendo uso de la dualidad y del Principio de la Potencia Virtual (y por lo tanto haciendo uso de las transformaciones de integrales como las indicadas en (9.39)-(9.42)), obtener los esfuerzos internos y externos generalizados que surgen cuando esta descripción geométrica es empleada. Para simplificar la notación en lo que sigue vamos a eliminar la denominación $\tilde{(\cdot)}$ en la representación del campo $(\cdot)$ cuando visto como definido en $\Sigma_o \times H$ ya que no existe posibilidad de error de interpretación.

9.4 Principio de la Potencia Virtual

La cáscara, como definida en su configuración actual Ω, la podemos ver como un cuerpo tridimensional. Para este cuerpo definimos el espacio de acciones de movimiento Var_v

$$\mathrm{Var}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V},\, \mathbf{v}|_{\partial\Omega_\mathbf{u}} = 0\}, \tag{9.43}$$

donde $\mathscr{V}$ es un espacio de funciones vectoriales suficientemente regulares en Ω, $\partial\Omega_\mathbf{u}$ es la parte del contorno $\partial\Omega$ donde los desplazamientos están prescriptos. Para simplificar, vamos a suponer que este cuerpo en su configuración Ω está sometido a cargas de cuerpo $\mathbf{b}$, definidas en Ω, y a fuerzas de superficie $\mathbf{f}$ definidas en $\partial\Omega_\mathbf{f}$, siendo que $\partial\Omega_\mathbf{f}$ y $\partial\Omega_\mathbf{u}$ son complementares con respecto a $\partial\Omega$, es decir $\partial\Omega = \partial\Omega_\mathbf{u} \cup \partial\Omega_\mathbf{f}$ y $\partial\Omega_\mathbf{u} \cap \partial\Omega_\mathbf{f} = \emptyset$. Recordando que el equilibrio está dado por el Principo de la Potencia Virtual tenemos

$$\int_\Omega \mathbf{T} \cdot (\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\mathbf{f}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} d\partial\Omega_\mathbf{f} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{Var}_v. \tag{9.44}$$

En lo que sigue vamos a reescribir esta última expresión haciendo uso de la descripción geométrica de cáscaras, de la diferenciación en esta descripción y su correspondiente descomposición en las componentes correspondientes a la base intrínseca de la cáscara, del producto escalar de campos vectoriales y tensoriales en esta base y de las integrales. Así, el espacio de las acciones virtuales admisibles toma la forma

$$\mathrm{Var}_v = \{(\mathbf{v}_t, v_n) \in \mathscr{V}_o,\, (\mathbf{v}_t, v_n)|_{\partial\Sigma^+_\mathbf{u} \cup \partial\Sigma^-_\mathbf{u} \cup \Gamma_{L\mathbf{u}}} = 0\}, \tag{9.45}$$

donde $\mathscr{V}_o$ es un espacio de pares de funciones $(\mathbf{v}_t, v_n)$ suficientemente regulares en $\Sigma_o \times H$, y donde $\partial\Sigma^+_\mathbf{u}$, $\partial\Sigma^-_\mathbf{u}$ y $\Gamma_{L\mathbf{u}}$ son las partes correspondientes de $\partial\Sigma^+$, $\partial\Sigma^-$ y Γ_L donde los desplazamientos están prescriptos. Por otro lado, sus complementos $\partial\Sigma^+_\mathbf{f}$, $\partial\Sigma^-_\mathbf{f}$ y $\Gamma_{L\mathbf{f}}$ son las partes complementares donde cargas de superficie están actuando sobre el cuerpo. Por otro lado, de (9.35)-(9.38), tenemos que la acción de deformación virtual (tasa de deformación) está dada por

$$(\nabla\mathbf{v})^s = (\nabla\mathbf{v})^s_t + (\nabla\mathbf{v})^s_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\nabla\mathbf{v})^s_s + (\nabla\mathbf{v})^s_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \tag{9.46}$$

donde sus componentes están dadas por

$$(\nabla\mathbf{v})^s_t = \left(\Pi_t (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t) \Lambda^{-1} \Pi_t + v_n (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) \Lambda^{-1} \Pi_t\right)^s, \tag{9.47}$$

$$(\nabla\mathbf{v})^s_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial\xi} + \Pi_t \Lambda^{-1} (\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\,\mathbf{v}_t)\right), \tag{9.48}$$

$$(\nabla\mathbf{v})^s_n = \frac{\partial v_n}{\partial\xi}. \tag{9.49}$$

Haciendo uso de la (9.13) y de las (9.47)-(9.49), el lado izquierdo de la expresión del Principio de la Potencia Virtual (9.44) toma la forma

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}\cdot(\nabla\hat{\mathbf{v}})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o}\int_H \Big[\mathbf{T}_t\cdot\Big((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t)+v_n\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\Big)^s + \mathbf{T}_s\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial\xi}-\Pi_t\Lambda^{-1}((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t-\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n)\right)+T_n\frac{\partial v_n}{\partial\xi}\Big]\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o, \quad (9.50)$$

donde $\mathbf{T}_t$, $\mathbf{T}_s$ y T_n son las componentes (ver (9.11)) del tensor de Cauchy $\mathbf{T}$ en el sistema intrínseco de la cáscara, como muestra la Figura 9.11.

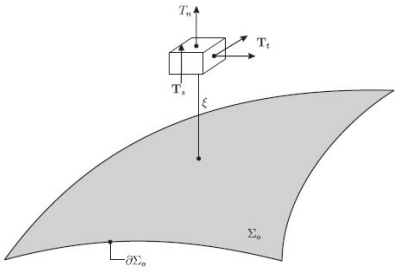


Fig. 9.11 Descomposición del tensor de Cauchy en el sistema intrínseco de la cáscara.

De la misma manera, podemos descomponer en el sistema intrínseco las fuerzas de volumen $\mathbf{b}=\mathbf{b}_t+b_n\mathbf{n}$ y las fuerzas de superficie $\mathbf{f}^+=\mathbf{f}_t^+ + f_n^+\mathbf{n}$, $\mathbf{f}^-=\mathbf{f}_t^- + f_n^-\mathbf{n}$ y $\bar{\mathbf{f}}=\bar{\mathbf{f}}_t+\bar{f}_n\mathbf{n}$ (fuerzas aplicadas en $\Sigma_{\mathbf{f}}^+$, $\Sigma_{\mathbf{f}}^-$ y $\Gamma_{L\mathbf{f}}$, respectivamente). De esta forma, y haciendo uso de las expresiones (9.12) y (9.39), el lado derecho (potencia externa) de la expresión del Principio de la Potencia Virtual (9.44) toma la forma

$$\int_{\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}d\Omega+\int_{\partial\Omega_{\mathbf{f}}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\partial\Omega_{\mathbf{f}} = \int_{\Sigma_o}\int_H(\mathbf{b}_t\cdot\mathbf{v}_t+b_nv_n)\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o + \int_{\Sigma_{\mathbf{f}}^+}(\mathbf{f}_t^+\cdot\mathbf{v}_t+f_n^+v_n)d\Sigma_{\mathbf{f}}^+ + \int_{\Sigma_{\mathbf{f}}^-}(\mathbf{f}_t^-\cdot\mathbf{v}_t+f_n^-v_n)d\Sigma_{\mathbf{f}}^- + \int_{\Gamma_{L\mathbf{f}}}(\bar{\mathbf{f}}_t\cdot\mathbf{v}_t+\bar{f}_nv_n)d\Gamma_{L\mathbf{f}}. \quad (9.51)$$

Luego, haciendo uso de las expresiones (9.50) y (9.51) podemos reescribir el Principio de la Potencia Virtual (9.44) para el caso de cáscaras descriptas en su forma intrínseca, y vistas como un cuerpo 3D donde no se han incorporado aún hipótesis cinemáticas adicionales que caracterizan el comportamiento cinemático de este tipo de componente estructural. Decimos así que el estado de tensiones caracterizado por $(\mathbf{T}_t,\mathbf{T}_s,T_n)$ equilibra el sistema de fuerzas dado por ($\mathbf{b}=\mathbf{b}_t+b_n\mathbf{n}$, $\mathbf{f}^+=\mathbf{f}_t^+ + f_n^+\mathbf{n}$, $\mathbf{f}^-=\mathbf{f}_t^- + f_n^-\mathbf{n}$, $\bar{\mathbf{f}}=\bar{\mathbf{f}}_t+\bar{f}_n\mathbf{n}$) si y sólo si la siguiente ecuación variacional es satisfecha

$$\int_{\Sigma_o}\int_H \Big[\mathbf{T}_t\cdot\big((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t)+v_n\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\big)^s + \mathbf{T}_s\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{v}_t}{\partial\xi}-\Pi_t\Lambda^{-1}((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t-\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n)\right)+T_n\frac{\partial v_n}{\partial\xi}\Big]\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o = \int_{\Sigma_o}\int_H(\mathbf{b}_t\cdot\mathbf{v}_t+b_n v_n)\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o+\int_{\Sigma_{\mathbf{f}}^+}(\mathbf{f}_t^+\cdot\mathbf{v}_t+f_n^+v_n)d\Sigma_{\mathbf{f}}^+ + \int_{\Sigma_{\mathbf{f}}^-}(\mathbf{f}_t^-\cdot\mathbf{v}_t+f_n^-v_n)d\Sigma_{\mathbf{f}}^-+\int_{\Gamma_{L\mathbf{f}}}(\bar{\mathbf{f}}_t\cdot\mathbf{v}_t+\bar{f}_n v_n)d\Gamma_{L\mathbf{f}}\quad\forall(\mathbf{v}_t,v_n)\in\mathrm{Var}_v. \tag{9.52}$$

Ejercicio 9.3. Obtener la ecuación variacional (9.52) para el caso de placas.

Es importante observar aquí que el principio que rige (9.44) es tan general y válido como la expresión (9.52). No obstante eso, la conveniencia de trabajar con la expresión (9.52) quedará en evidencia en las secciones siguientes, cuando las hipótesis que se introducirán para describir la cinemática de la cáscara asociadas a los diferentes modelos existentes en la literatura, permitan realizar las integrales en el espesor de la cáscara. De hecho, y como veremos en la sección siguiente, los modelos existentes de cáscaras consisten en adoptar expresiones específicas (conocidas) en la variable ξ para los campos $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi)$ y $v_n(\mathbf{x}_o,\xi)$, permitiendo así realizar estas integrales reduciendo el problema a una expresión definida en la superficie Σ_o y su contorno. En otras palabras, el Principio de la Potencia Virtual (PPV) pasa de una ecuación variacional definida en un dominio 3D para otra ecuación, totalmente equivalente, definida en un dominio 2D.

9.5 Descripción Unificada de Modelos de Cáscaras

En esta sección vamos a derivar diversos modelos de cáscaras existentes en la literatura. Como veremos aquí, podemos hacer esta derivación de manera unificada gracias a la descripción geométrica utilizada anteriormente. De hecho, estos modelos son obtenidos adoptando diferentes representaciones (y restricciones) para las componentes $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi)$ y $v_n(\mathbf{x}_o,\xi)$ que permitirán la realización de las integrales en el espesor de la cáscara reduciendo de esta manera el dominio de definición del problema.

9.5.1 Modelo General

La teoría desarrollada hasta aquí en las secciones anteriores es 3D por naturaleza. Lo anterior está evidente en la expresión del PPV (9.52). Si bien esta expresión no tiene utilidad desde el punto de vista de la teoría de cáscaras, es de gran utilidad en la derivación unificada de los diversos modelos de cáscaras existentes en la literatura. La misma es, por así decir, el punto de partida para esta derivación unificada.

De la inspección de la expresión (9.52), vemos que, para reducir el dominio de definición del problema de 3D para 2D, es necesario adoptar hipótesis cinemáticas capaces de proporcionar de manera explícita el comportamiento en la variable ξ de los campos $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi)$ y $v_n(\mathbf{x}_o,\xi)$. Lo anterior da lugar a dos efectos importantes

- permite realizar las integrales en el espesor de la cáscara, reduciendo así la dimensión del dominio de definición del problema de Ω para Σ_o;
- al realizar estas integrales, surgen naturalmente las definiciones de *tensiones generalizadas* duales a las variables cinemáticas puestas en evidencia durante el proceso de caracterización del comportamiento de los campos $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi)$ y $v_n(\mathbf{x}_o,\xi)$ en la variable ξ.

Para ver esto con más detalle, vamos a suponer que podemos expandir el campo $\mathbf{v}(\mathbf{x}_o,\xi)$, descripto en función de sus componentes intrínsecas $\mathbf{v}(\mathbf{x}_o,\xi)=\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi)+v_n(\mathbf{x}_o,\xi)\mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$, a través de polinomios en la variable ξ. En particular, vamos a adoptar las siguientes expansiones

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi)=\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o)+\xi\,\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{x}_o), \tag{9.53}$$

$$v_n(\mathbf{x}_o,\xi)=v_n^o(\mathbf{x}_o)+\xi\,\omega_n(\mathbf{x}_o)+\frac{\xi^2}{2}\alpha_n(\mathbf{x}_o), \tag{9.54}$$

donde $\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o)$ y $\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{x}_o)$ son campos vectoriales y $v_n^o(\mathbf{x}_o),\omega_n(\mathbf{x}_o)$ y $\alpha_n(\mathbf{x}_o)$ son campos escalares definidos en Σ_o. En particular, $\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o)$ y $\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{x}_o)$ son vectores pertenecientes (paralelos) al plano tangente en el punto $\mathbf{x}_o$ de la cáscara. A su vez, siendo $\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o)$ y $v_n^o(\mathbf{x}_o)$ acciones de movimiento, $\boldsymbol{\omega}_t(\mathbf{x}_o)$ y $\omega_n(\mathbf{x}_o)$ representan, respectivamente, la acción de rotación del plano tangente alrededor de ejes contenidos en ese plano y la acción de rotación del plano tangente alrededor de la normal $\mathbf{n}$ (ver Figura 9.12).

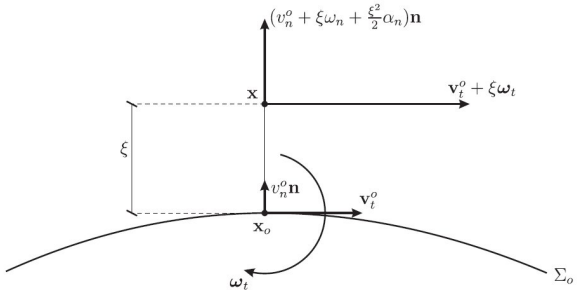


Fig. 9.12 Interpretación física de la repesentación adoptada para la expansión en ξ de las acciones de movimiento $\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi)$ y $v_n(\mathbf{x}_o,\xi)$.

La expansión arriba adoptada corresponde al modelo presentado en [137]. Introduciendo (9.53)- (9.54) en (9.47)-(9.49), obtenemos

$$
\begin{aligned}
(\nabla \mathbf{v})^s_t &= \left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}^o_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + v^o_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\right)^s \\
&\quad + \xi\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + \omega_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\right)^s \\
&\quad + \frac{\xi^2}{2}\left(\alpha_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\right)^s, \qquad (9.55)\\
(\nabla \mathbf{v})^s_s &= \frac{1}{2}\left(\Pi_t\Lambda^{-1}(\omega_t + \nabla_{\mathbf{x}_o}v^o_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\,\mathbf{v}^o_t)\right) \\
&\quad + \xi\,\frac{1}{2}\left(\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_n)\right) + \frac{\xi^2}{4}\left(\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\alpha_n)\right), \qquad (9.56)\\
(\nabla \mathbf{v})^s_n &= \omega_n + \xi\,\alpha_n. \qquad (9.57)
\end{aligned}
$$

Substituyendo estos resultados en la expresión general de la potencia interna de la cáscara dada por (9.50) obtenemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = &\\
&\int_{\Sigma_o}\int_H \mathbf{T}_t\cdot\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}^o_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + v^o_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\right)^s \det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o \\
+&\int_{\Sigma_o}\int_H \mathbf{T}_t\cdot\xi\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t)\Lambda^{-1}\Pi_t + \omega_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\right)^s \det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o \\
&+\int_{\Sigma_o}\int_H \mathbf{T}_t\cdot\frac{\xi^2}{2}(\alpha_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t)^s \det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o \\
+&\int_{\Sigma_o}\int_H \mathbf{T}_s\cdot\Pi_t\Lambda^{-1}\left(\omega_t + \nabla_{\mathbf{x}_o}v^o_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}^o_t\right)\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o \\
&+\int_{\Sigma_o}\int_H \mathbf{T}_s\cdot\xi\left(\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_n)\right)\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o \\
&+\int_{\Sigma_o}\int_H \mathbf{T}_s\cdot\frac{\xi^2}{2}\left(\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\alpha_n)\right)\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o \\
&+\int_{\Sigma_o}\int_H T_n\omega_n \det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o}\int_H T_n\xi\,\alpha_n \det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o \qquad (9.58)
\end{aligned}
$$

Recordando la simetría del tensor de tensiones de Cauchy y del tensor Λ y las propiedades del tensor de proyección sobre el plano tangente Π_t, la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega &= \int_{\Sigma_o}\left(\int_H \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\det\Lambda d\xi\right)\cdot\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\right)d\Sigma_o\\ &+\int_{\Sigma_o}\left(\int_H \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\xi\det\Lambda d\xi\right)\cdot\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t)+\omega_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\right)d\Sigma_o\\ &+\int_{\Sigma_o}\left(\int_H \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\frac{\xi^2}{2}\det\Lambda d\xi\right)\cdot(\alpha_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))d\Sigma_o\\ &+\int_{\Sigma_o}\left(\int_H \Lambda^{-1}\mathbf{T}_s\det\Lambda d\xi\right)\cdot(\omega_t+\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o-(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o)d\Sigma_o\\ &+\int_{\Sigma_o}\left(\int_H \Lambda^{-1}\mathbf{T}_s\xi\det\Lambda d\xi\right)\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_n)d\Sigma_o\\ &+\int_{\Sigma_o}\left(\int_H \Lambda^{-1}\mathbf{T}_s\frac{\xi^2}{2}\det\Lambda d\xi\right)\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\alpha_n)d\Sigma_o\\ &+\int_{\Sigma_o}\left(\int_H T_n\det\Lambda d\xi\right)\omega_n d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}\left(\int_H T_n\xi\det\Lambda d\xi\right)\alpha_n d\Sigma_o. \quad (9.59)\end{aligned}$$

Las integrales en el espesor de la cáscara existentes en la expresión de la potencia interna (9.59) pueden ahora ser calculadas, dando lugar a las siguientes *tensiones generalizadas* definidas en la superficie media de la cáscara Σ_o

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_t &= \int_H \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\det\Lambda d\xi, & \mathbf{M}_t &= \int_H \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\xi\det\Lambda d\xi,\\ \mathbf{P}_t &= \int_H \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\frac{\xi^2}{2}\det\Lambda d\xi, & \mathbf{Q} &= \int_H \Lambda^{-1}\mathbf{T}_s\det\Lambda d\xi,\\ \mathbf{S} &= \int_H \Lambda^{-1}\mathbf{T}_s\xi\det\Lambda d\xi, & \mathbf{H} &= \int_H \Lambda^{-1}\mathbf{T}_s\frac{\xi^2}{2}\det\Lambda d\xi,\\ A &= \int_H T_n\det\Lambda d\xi, & B &= \int_H T_n\xi\det\Lambda d\xi.\end{aligned} \quad (9.60)$$

Desde el punto de vista físico, las tensiones generalizadas pueden ser interpretadas de la siguiente forma: $\mathbf{N}_t$ es el tensor de tensiones de membrana, $\mathbf{M}_t$ es el tensor de momentos de membrana, $\mathbf{Q}$ es el vector de tensiones de corte (cizallamiento), A es la tensión normal (campo escalar). Por otro lado, el tensor $\mathbf{P}_t$, los vectores $\mathbf{S}$ y $\mathbf{H}$ y el escalar B son, respectivamente, los momentos producidos por las tensiones tangenciales, las tensiones transversales de cizallamiento y por la tension normal. Es importante resaltar aquí que, no obstante la simetría del tensor $\mathbf{T}_t$, los tensores $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{P}_t$ no son simétricos. Más adelante veremos que, gracias a hipótesis simplificadoras sobre Λ, y por lo tanto sobre Λ^{-1}, estas tensiones generalizadas resultarán simétricas.

Con las definiciones (9.60), y gracias a la expansión en ξ adoptada para la cinemática de la cáscara, su potencia interna está ahora expresada a través de una integral definida sobre la superficie media, como sigue

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \mathbf{N}_t\cdot\big(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\big)d\Sigma_o$$
$$+\int_{\Sigma_o}\mathbf{M}_t\cdot\big(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t)+\omega_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\big)d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}(\mathbf{P}_t\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\alpha_n d\Sigma_o$$
$$+\int_{\Sigma_o}\mathbf{Q}\cdot(\omega_t+\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o-(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o)d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}\mathbf{S}\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_n d\Sigma_o$$
$$+\int_{\Sigma_o}\mathbf{H}\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\alpha_n d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}A\omega_n d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}B\alpha_n d\Sigma_o. \quad (9.61)$$

Ejercicio 9.4. Obtener las expresiones de las tensiones generalizadas dadas por (9.60) y de la potencia interna (9.61) para el caso de placas. Qué puede decir sobre la simetría de los tensores $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{P}_t$?

Ahora, vamos a proceder de manera similar a la realizada para la potencia interna para obtener la expresión de la potencia externa (9.51) en función de integrales sobre la superficie media y su contorno. Para esto, introducimos en esta expresión las expansiones (9.53)-(9.54) a la vez que haremos uso de la siguiente relación entre los diferenciales $d\Gamma$ y $d\xi\, d\partial\Sigma_o$

$$\Gamma = [\Lambda^2\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{s}_o]^{1/2}d\xi\, d\partial\Sigma_o, \quad (9.62)$$

donde $\mathbf{s}_o$ es el vector unitario tangente al contorno $\partial\Sigma_o$ en el punto $\mathbf{x}_o$ definido por $\mathbf{s}_o=\mathbf{n}\times\mathbf{n}_o$ (ver Figura 9.10). Luego, la potencia externa toma la forma

$$\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}d\Omega+\int_{\partial\Omega_\mathbf{f}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\partial\Omega_\mathbf{f}=\int_{\Sigma_o}\int_H(\mathbf{b}_t\cdot\mathbf{v}_t+b_n v_n)\det\Lambda d\xi d\Sigma_o$$
$$+\int_{\Sigma_\mathbf{f}^+}(\mathbf{f}_t^+\cdot\mathbf{v}_t+f_n^+v_n)d\Sigma_\mathbf{f}^++\int_{\Sigma_\mathbf{f}^-}(\mathbf{f}_t^-\cdot\mathbf{v}_t+f_n^-v_n)d\Sigma_\mathbf{f}^-+\int_{\Gamma_{L\mathbf{f}}}(\bar{\mathbf{f}}_t\cdot\mathbf{v}_t+\bar{f}_n v_n)d\Gamma_{L\mathbf{f}}=$$
$$\int_{\Sigma_o}\int_H\mathbf{b}_t\cdot(\mathbf{v}_t^o+\xi\,\omega_t)\det\Lambda d\xi d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}\int_H b_n\left(v_n^o+\xi\,\omega_n+\frac{\xi^2}{2}\alpha_n\right)\det\Lambda d\xi d\Sigma_o$$
$$+\int_{\Sigma_o}\mathbf{f}_t^+\cdot\left(\mathbf{v}_t^o+\frac{h}{2}\omega_t\right)\det\Lambda^+ d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}f_n^+\left(v_n^o+\frac{h}{2}\omega_n+\frac{h^2}{8}\alpha_n\right)\det\Lambda^+ d\Sigma_o$$
$$+\int_{\Sigma_o}\mathbf{f}_t^-\cdot\left(\mathbf{v}_t^o-\frac{h}{2}\omega_t\right)\det\Lambda^- d\Sigma_o+\int_{\Sigma_o}f_n^-\left(v_n^o-\frac{h}{2}\omega_n+\frac{h^2}{8}\alpha_n\right)\det\Lambda^- d\Sigma_o$$
$$+\int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}}\int_H\bar{\mathbf{f}}_t\cdot(\mathbf{v}_t^o+\xi\,\omega_t)[\Lambda^2\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{s}_o]^{1/2}d\xi d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}$$
$$+\int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}}\int_H\bar{f}_n\left(v_n^o+\xi\,\omega_n+\frac{\xi^2}{2}\alpha_n\right)[\Lambda^2\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{s}_o]^{1/2}d\xi d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}. \quad (9.63)$$

Realizando las integrales en el espesor de la cáscara, e introduciendo las siguientes definiciones de fuerzas generalizadas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}_{bt} &= \int_H \mathbf{b}_t \det\Lambda d\xi, & p_{bn} &= \int_H b_n \det\Lambda d\xi,\\
\mathbf{m}_{bt} &= \int_H \mathbf{b}_t \xi \det\Lambda d\xi, & m_{bn} &= \int_H b_n \xi \det\Lambda d\xi,\\
\mathbf{p}_t &= \mathbf{f}_t^+ \det\Lambda^+ + \mathbf{f}_t^- \det\Lambda^-, & p_n &= f_n^+ \det\Lambda^+ + f_n^- \det\Lambda^-,\\
\mathbf{m}_t &= \frac{h}{2}(\mathbf{f}_t^+ \det\Lambda^+ - \mathbf{f}_t^- \det\Lambda^-), & m_n &= \frac{h}{2}(f_n^+ \det\Lambda^+ - f_n^- \det\Lambda^-),\\
\bar{\mathbf{p}}_t &= \int_H \bar{\mathbf{f}}_t [\Lambda^2 \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi, & \bar{p}_n &= \int_H \bar{f}_n [\Lambda^2 \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi,\\
\bar{\mathbf{m}}_t &= \int_H \bar{\mathbf{f}}_t \xi [\Lambda^2 \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi, & \bar{m}_n &= \int_H \bar{f}_n \xi [\Lambda^2 \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi,\\
q_{bn} &= \int_H b_n \frac{\xi^2}{2} \det\Lambda d\xi, & q_n &= \frac{h^2}{8}(f_n^+ \det\Lambda^+ + f_n^- \det\Lambda^-),\\
\bar{q}_n &= \int_H \bar{f}_n \frac{\xi^2}{2} [\Lambda^2 \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi,
\end{aligned}
\tag{9.64}
$$

obtenemos la siguiente expresión para la potencia externa

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\mathbf{f}} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\partial\Omega_\mathbf{f} =\\
&\int_{\Sigma_o} \big[(\mathbf{p}_{bt} + \mathbf{p}_t) \cdot \mathbf{v}_t^o + (\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t) \cdot \omega_t + (p_{bn} + p_n) v_n^o + (m_{bn} + m_n)\omega_n + (q_{bn} + q_n)\alpha_n\big] d\Sigma_o\\
&\qquad + \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}} \big[\bar{\mathbf{p}}_t \cdot \mathbf{v}_t^o + \bar{\mathbf{m}}_t \cdot \omega_t + \bar{p}_n v_n^o + \bar{m}_n \omega_n + \bar{q}_n \alpha_n\big] d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}.
\end{aligned}
\tag{9.65}
$$

En las definiciones anteriores $\mathbf{p}_{bt}$, p_{bn}, $\mathbf{p}_t$, p_n, $\bar{\mathbf{p}}_t$ y $\bar{p}_n$ son las descomposiciones aditivas de las fuerzas de cuerpo aplicadas sobre las superficies Σ^+, Σ^- y Γ_L, mientras que $\mathbf{m}_{bt}$, $\mathbf{m}_t$, $\bar{\mathbf{m}}_t$ son los momentos con respecto a la superficie media Σ_o producidos por las fuerzas aplicadas sobre Σ^+, Σ^- y Γ_L. Las otras fuerzas generalizadas, m_{bn}, m_n, $\bar{m}_n$, q_{bn}, q_n y $\bar{q}_n$, pueden ser entendidas usando argumentos de dualidad correspondientes a las acciones de movimiento ω_n y α_n, definidas respectivamente en Σ_o y $\partial\Sigma_o$. Es importante mencionar aquí que las fuerzas generalizadas (9.64) compatibles con el modelo general de cáscara adoptado en esta sección han sido obtenidas de manera natural, y no preestablecidas, gracias a los argumentos de dualidad. Finalmente, $\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}$ corresponde a la parte de $\partial\Sigma_o$ donde hay fuerzas aplicadas (condiciones de contorno de tipo Neumann o, lo que es lo mismo, condiciones naturales de contorno asociadas al PPV).

Ejercicio 9.5. Obtener las expresiones correspondientes a (9.64) para el caso de placas.

Haciendo uso de las expresiones de la potencia interna (9.61) y externa (9.65) deducidas para este modelo general de cáscara estamos en condiciones de formalizar las ecuaciones variacionales, ahora definidas en el dominio bidimensional caracterizado por la superficie media de la cáscara, que rigen el problema del equilibrio de la cáscara y, por lo tanto, correspondientes al PPV. Tenemos así que, dado el sistema de

fuerzas generalizadas, caracterizadas en (9.64), el estado de tensiones generalizadas en la cáscara, caracterizadas en (9.60), equilibra este sistema si la siguiente ecuación variacional (PPV correspondiente al modelo de cáscara general aquí desarrollado) es satisfecha

$$\begin{aligned}
&\int_{\Sigma_o} \mathbf{N}_t \cdot \big(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o) + v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\big)d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o} \mathbf{M}_t \cdot \big(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t) + \omega_n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\big)d\Sigma_o \\
&\quad + \int_{\Sigma_o} (\mathbf{P}_t \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\alpha_\eta d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o} \mathbf{Q}\cdot(\omega_t + \nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o)d\Sigma_o \\
&\quad + \int_{\Sigma_o} \mathbf{S}\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_n d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o} \mathbf{H}\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\alpha_n d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o} A\omega_n d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o} B\alpha_n d\Sigma_o = \\
&\int_{\Sigma_o} \big[(\mathbf{p}_{bt}+\mathbf{p}_t)\cdot\mathbf{v}_t^o + (\mathbf{m}_{bt}+\mathbf{m}_t)\cdot\omega_t + (p_{bn}+p_n)v_n^o + (m_{bn}+m_n)\omega_n + (q_{bn}+q_n)\alpha_n\big]d\Sigma_o \\
&\quad + \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}} \big[\bar{\mathbf{p}}_t\cdot\mathbf{v}_t^o + \bar{\mathbf{m}}_t\cdot\omega_t + \bar{p}_n v_n^o + \bar{m}_n\omega_n + \bar{q}_n\alpha_n\big]d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}} \\
&\qquad\qquad \forall(\mathbf{v}_t^o, \omega_t, v_n^o, \omega_n, \alpha_n) \in \mathrm{Var}_v, \quad (9.66)
\end{aligned}$$

donde Var_v es el espacio vectorial de las acciones de movimiento en la cáscara caracterizado por

$$\mathrm{Var}_v = \{(\mathbf{v}_t^o, \omega_t, v_n^o, \omega_n, \alpha_n) \in \mathscr{V}_o^G,\ (\mathbf{v}_t^o, \omega_t, v_n^o, \omega_n, \alpha_n)|_{\partial\Sigma_{o\mathbf{u}}} = 0\}, \tag{9.67}$$

donde $\mathscr{V}_o^G$ es un espacio de funciones suficientemente regulares en este modelo general de cáscara, y $\partial\Sigma_{o\mathbf{u}}$ es la parte de $\partial\Sigma_o$ donde están prescriptos los movimientos.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la ecuación variacional anterior son las siguientes

$$\begin{cases}
\mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{N}_t + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{Q} + (\mathbf{p}_{bt}+\mathbf{p}_t) = \mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o, \\
\mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{Q} - \mathbf{N}_t\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} + (p_{bn}+p_n) = 0 & \text{en } \Sigma_o, \\
\mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t - \mathbf{Q} + (\mathbf{m}_{bt}+\mathbf{m}_t) = \mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o, \\
\mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{S} - \mathbf{M}_t\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} - A + (m_{bn}+m_n) = 0 & \text{en } \Sigma_o, \\
\mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{H} - \mathbf{P}_t\cdot\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} - B + (q_{bn}+q_n) = 0 & \text{en } \Sigma_o, \\
\mathbf{N}_t\mathbf{n}_o = \bar{\mathbf{p}}_t & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\
\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}_o = \bar{p}_n & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\
\mathbf{M}_t\mathbf{n}_o = \bar{\mathbf{m}}_t & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\
\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}_o = \bar{m}_n & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\
\mathbf{H}\cdot\mathbf{n}_o = \bar{q}_n & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}.
\end{cases} \tag{9.68}$$

Una vez más podemos observar que cada una de estas ecuaciones, incluidas las condiciones sobre los contornos, está asociada a cada una de las variables que describen la cinemática en este modelo general de cáscara propuesto en [137].

Ejercicio 9.6. Obtener el PPV para el modelo general de placas equivalente a la expresión (9.66), y, a partir de allí, obtener las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange.

Ejercicio 9.7. Compare las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas en el ejercicio anterior con las obtenidas en (9.68), y comente el papel del tensor de curvatura en el acoplamiento de los diferentes esfuerzos generalizados en las ecuaciones de equilibrio.

9.5.2 Modelo de Naghdi

En la teoría presentada en la sección anterior, todas las acciones de movimiento posibles han sido permitidas dando lugar a que todas las acciones de deformación (tangenciales, transversales y normales) estén presentes. Como consecuencia de esto, todas las tensiones generalizadas definidas en (9.60) participan en la potencia interna de la cáscara con contribuciones no nulas. Es decir, no producen potencias nulas como sería el caso en el que hubiese condiciones de ortogonalidad al espacio de acciones de deformación (serían reacciones a alguna restricción a la acción de deformación).

En esta sección vamos a presentar otro modelo conocido en la literatura como *Modelo de Naghdi*, propuesto en [200, 201], donde simplificaciones son introducidas en las expansiones (9.53)-(9.54). Básicamente, en esta teoría se suponen nulas las componentes transversales al movimiento asociadas a la expansión en ξ, es decir, consideramos $\omega_n(\mathbf{x}_o) = 0$ y $\alpha_n(\mathbf{x}_o) = 0$, con lo que obtenemos

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o, \xi) = \mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) + \xi\, \omega_t(\mathbf{x}_o), \tag{9.69}$$

$$v_n(\mathbf{x}_o, \xi) = v_n^o(\mathbf{x}_o). \tag{9.70}$$

Con estas hipótesis las acciones de deformación (9.55)-(9.57) se reducen a

$$\begin{aligned}(\nabla \mathbf{v})_t^s = &\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)\Lambda^{-1}\Pi_t + v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\Pi_t\right)^s \\ &+ \xi\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t)\Lambda^{-1}\Pi_t\right)^s,\end{aligned} \tag{9.71}$$

$$(\nabla \mathbf{v})_s^s = \frac{1}{2}\left(\Pi_t\Lambda^{-1}(\omega_t + \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o)\right), \tag{9.72}$$

$$(\nabla \mathbf{v})_n^s = 0. \tag{9.73}$$

Como podemos apreciar, debido a las hipótesis cinemáticas asumidas en (9.69)-(9.70), las acciones virtuales de deformación $(\nabla \mathbf{v})_n^s$ resultan nulas. Esto implica que el estado de tensión en la cáscara asociada por dualidad a esta dirección (la cual existe para asegurar que esta restriccón cinemática sea satisfecha) no podrá ser medido, ya que su potencia será siempre nula para toda acción virtual de movimiento cinemáticamente admisible. En otras palabras, el estado de tensiones generalizadas

en esa dirección debe interpretarse como una reacción de vínculo (el vínculo aquí es la restricción al movimiento impuesta por la teoría de Naghdi).

Procediendo con estas acciones de deformación de la misma manera que en la sección anterior, arribamos a la expresión de la potencia interna de la cáscara dentro de esta nueva teoría la cual puede ser fácilmente obtenida eliminando en (9.61) los términos nulos

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \mathbf{N}_t\cdot\big(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\big)d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o}\mathbf{M}_t\cdot\big(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t)\big)d\Sigma_o + \int_{\Sigma_o}\mathbf{Q}\cdot(\omega_t+\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o-(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o)d\Sigma_o. \quad (9.74)$$

Definiendo

$$\varepsilon = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}), \quad (9.75)$$

$$\chi = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t), \quad (9.76)$$

$$\psi = \omega_t+\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o-(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o, \quad (9.77)$$

donde ε es el tensor de acción (tasa) de deformación de membrana, χ es el tensor de acción (tasa) de deformación de flexión y ψ es el vector de acción (tasa) de deformación de cizallamiento, podemos reescribir la potencia interna de manera más compacta

$$\int_{\Omega}\mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o}(\mathbf{N}_t\cdot\varepsilon+\mathbf{M}_t\cdot\chi+\mathbf{Q}\cdot\psi)d\Sigma_o. \quad (9.78)$$

Por su parte, llevando en cuenta la cinemática asociada al modelo de Naghdi dada por las expresiones (9.69)-(9.70), la potencia externa (9.65) se reduce a la siguiente expresión

$$\int_{\Omega}\mathbf{b}\cdot\mathbf{v}d\Omega+\int_{\partial\Omega_{\mathbf{f}}}\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}d\partial\Omega_{\mathbf{f}} = \int_{\Sigma_o}\big[(\mathbf{p}_{bt}+\mathbf{p}_t)\cdot\mathbf{v}_t^o+(\mathbf{m}_{bt}+\mathbf{m}_t)\cdot\omega_t+(p_{bn}+p_n)v_n^o\big]d\Sigma_o + \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}}\big[\bar{\mathbf{p}}_t\cdot\mathbf{v}_t^o+\bar{\mathbf{m}}_t\cdot\omega_t+\bar{p}_n v_n^o\big]d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}. \quad (9.79)$$

Con estas expresiones de las potencias interna y externa, el equilibrio de la cáscara dentro de la teoría de Naghdi está gobernada por el PPV caracterizado por la siguiente ecuación variacional

$$\int_{\Sigma_o} \left[\mathbf{N}_t \cdot \left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o) + v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\right) + \mathbf{M}_t \cdot \left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t)\right)\right] d\Sigma_o$$
$$+ \int_{\Sigma_o} \mathbf{Q} \cdot (\omega_t + \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o) d\Sigma_o =$$
$$\int_{\Sigma_o} \left[(\mathbf{p}_{bt} + \mathbf{p}_t) \cdot \mathbf{v}_t^o + (\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t) \cdot \omega_t + (p_{bn} + p_n) v_n^o\right] d\Sigma_o$$
$$+ \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}} \left[\bar{\mathbf{p}}_t \cdot \mathbf{v}_t^o + \bar{\mathbf{m}}_t \cdot \omega_t + \bar{p}_n v_n^o\right] d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}} \quad \forall (\mathbf{v}_t^o, \omega_t, v_n^o) \in \mathrm{Var}_v, \quad (9.80)$$

donde Var_v es el espacio vectorial de las acciones de movimiento en la cáscara caracterizado por

$$\mathrm{Var}_v = \{(\mathbf{v}_t^o, \omega_t, v_n^o) \in \mathscr{V}_o^N, (\mathbf{v}_t^o, \omega_t, v_n^o)|_{\partial\Sigma_{o\mathbf{u}}} = 0\}, \quad (9.81)$$

donde $\mathscr{V}_o^N$ es un espacio de funciones suficientemente regulares para este modelo de Naghdi.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con esta ecuación variacional están dadas por

$$\begin{cases} \mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{N}_t + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{Q} + (\mathbf{p}_{bt} + \mathbf{p}_t) = \mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o, \\ \mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{Q} - \mathbf{N}_t \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} + (p_{bn} + p_n) = 0 & \text{en } \Sigma_o, \\ \mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t - \mathbf{Q} + (\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t) = \mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o, \\ \mathbf{N}_t\mathbf{n}_o = \bar{\mathbf{p}}_t & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\ \mathbf{Q} \cdot \mathbf{n}_o = \bar{p}_n & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\ \mathbf{M}_t\mathbf{n}_o = \bar{\mathbf{m}}_t & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}. \end{cases} \quad (9.82)$$

Finalmente, es importante resaltar que la derivación del modelo de Naghdi fue realizada empleando el modelo de cáscara general, el cual es cinemáticamente más rico, desarrollado en la Sección 9.5.1.

Ejercicio 9.8. Obtener el modelo de Naghdi asociado al caso de placas y compare los resultados con el correspondiente modelo de cáscara.

9.5.3 Modelo de Kirchhoff-Love

La teoría de cáscara que vamos a presentar en esta sección es la que se construye cuando se aplican las hipótesis cinemáticas exactas de Kirchhoff-Love (ver [278] y [279]) a la estructura que hemos presentando en la sección anterior. Esta teoría se dice *exacta* porque las hipótesis incorporadas en esta formulación son exclusivamente cinemáticas. En otras palabras, en esta teoría no se introducen simplificaciones asociadas a la relación entre la espesura de la cáscara y su curvatura, $\frac{h}{R}$, como veremos más adelante.

Estas hipótesis cinemáticas pueden ser colocadas de la siguiete forma: decimos que los campos de acciones de movimiento en la cáscara, $\mathbf{v}$, son de tipo Kirchhoff-

Love si las componentes de deformación $(\nabla \mathbf{v})^s_s$ y $(\nabla \mathbf{v})^s_n$ (ver (9.48)-(9.49)) son nulas para todo punto $(\mathbf{x}_o, \xi)$, es decir

$$(\nabla \mathbf{v})^s_s = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi} + \Pi_t \Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\,\mathbf{v}_t)\right) = \mathbf{0}, \tag{9.83}$$

$$(\nabla \mathbf{v})^s_n = \frac{\partial v_n}{\partial \xi} = 0. \tag{9.84}$$

Como las restricciones anteriores son lineales, las acciones de movimiento que satisfacen estas ecuaciones definen el espacio de *acciones de movimiento de Kirchhoff-Love* dado por

$$\mathscr{V}_{KL} = \{\mathbf{v}(\mathbf{x}_o, \xi),\, (\nabla \mathbf{v})^s_s = \mathbf{0} \text{ y } (\nabla \mathbf{v})^s_n = 0 \;\forall (\mathbf{x}_o, \xi) \in \Sigma_o \times H\}. \tag{9.85}$$

Vamos a mostrar ahora que el espacio $\mathscr{V}_{KL}$ puede caracterizarse de otra manera totalente equivalente. Para ello vamos a hacer uso del siguiente teorema.

Teorema 9.1 Representación de los campos de Kirchhoff-Love *El campo de acción de movimiento* $\mathbf{v}$ *definido en la cáscara se dice es un campo de Kirchhoff-Love, es decir* $\mathbf{v} \in \mathscr{V}_{KL}$*, si y sólo si tiene la siguiente representación*

$$\mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o, \xi) = \mathbf{v}^o_t(\mathbf{x}_o) + \xi\, \boldsymbol{\omega}^{KL}_t(\mathbf{x}_o), \tag{9.86}$$

$$v_n(\mathbf{x}_o, \xi) = v^o_n(\mathbf{x}_o). \tag{9.87}$$

donde la rotación $\boldsymbol{\omega}^{KL}_t$ *está dada por*

$$\boldsymbol{\omega}^{KL}_t(\mathbf{x}_o) = (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}(\mathbf{x}_o))\mathbf{v}^o_t(\mathbf{x}_o) - \nabla_{\mathbf{x}_o} v^o_n(\mathbf{x}_o). \tag{9.88}$$

Demostración. La primera parte de la demostración, es decir si el campo $\mathbf{v}$ tiene la representación (9.86)-(9.87) entonces las restricciones cinemáticas (9.83)-(9.84) son satisfechas, es inmediata. En efecto, substituyendo (9.86)-(9.87) en (9.83)-(9.84), teniendo presente (9.88) y recordando que $\Lambda = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$, tenemos

$$\begin{aligned} 2(\nabla \mathbf{v})^s_s &= \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi} + \Pi_t \Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\,\mathbf{v}_t) \\ &= \Pi_t \Lambda^{-1}\left(\Lambda\, \boldsymbol{\omega}^{KL}_t + \nabla_{\mathbf{x}_o} v^o_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}^o_t - \xi\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\boldsymbol{\omega}^{KL}_t\right) \\ &= \Pi_t \Lambda^{-1}\left(\boldsymbol{\omega}^{KL}_t + \nabla_{\mathbf{x}_o} v^o_n - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}^o_t\right) = \mathbf{0}, \end{aligned} \tag{9.89}$$

$$(\nabla \mathbf{v})^s_n = \frac{\partial v_n}{\partial \xi} = \frac{\partial v^o_n}{\partial \xi} = 0. \tag{9.90}$$

Para demostrar la segunda parte del teorema tenemos que probar que la solución de las ecuaciones en derivadas parciales (9.83)-(9.84) tiene la representación (9.86)-(9.87)-(9.88). En particular, de

$$(\nabla \mathbf{v})^s_n = \frac{\partial v_n}{\partial \xi} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_n = v^o_n(\mathbf{x}_o), \tag{9.91}$$

obtenemos que el campo v_n solo puede depender de $\mathbf{x}_o$, es decir $v_n = v_n^o(\mathbf{x}_o)$ con lo que satisfacemos la representación (9.87). Por otro lado, y con este resultado en mente, la ecuación (9.83) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} 2\Lambda^{-1}\Pi_t(\nabla\mathbf{v})_s^s = \Lambda^{-1}\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) - \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\,\mathbf{v}_t = \\ \Lambda^{-1}\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) - \Lambda^{-2}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\,\mathbf{v}_t = \\ \Lambda^{-1}\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial \xi} + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) - \Lambda^{-2}\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi}\,\mathbf{v}_t = 0. \end{aligned} \tag{9.92}$$

Recordando las propiedades de Λ tenemos

$$\Lambda = \Lambda^2\Lambda^{-1} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} = 2\Lambda\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi}\Lambda^{-1} + \Lambda^2\frac{\partial \Lambda^{-1}}{\partial \xi} \tag{9.93}$$

$$\mathbf{I} = \Lambda\Lambda^{-1} \qquad \Rightarrow \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial \xi}\Lambda^{-1} + \Lambda\frac{\partial \Lambda^{-1}}{\partial \xi} = 0. \tag{9.94}$$

De las expresiones anteriores obtenemos

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \xi} = -2\Lambda^2\frac{\partial \Lambda^{-1}}{\partial \xi} + \Lambda^2\frac{\partial \Lambda^{-1}}{\partial \xi} = -\Lambda^2\frac{\partial \Lambda^{-1}}{\partial \xi}. \tag{9.95}$$

La substitución de (9.95) en (9.92) conduce a la siguiente ecuación diferencial ordinaria en la variable ξ que nos proporcionará $\mathbf{v}_t$

$$2\Lambda^{-1}\Pi_t(\nabla\mathbf{v})_s^s = \frac{\partial}{\partial \xi}(\Lambda^{-1}\mathbf{v}_t) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) = \mathbf{0}. \tag{9.96}$$

La solución de esta ecuación está dada por la suma de una solución *homgénea*, que llamamos $\mathbf{v}_t^h$, y una solución *particular*, que llamamos $\mathbf{v}_t^p$. Es decir $\mathbf{v}_t = \mathbf{v}_t^h + \mathbf{v}_t^p$ donde

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\Lambda^{-1}\mathbf{v}_t^h) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \Lambda^{-1}\mathbf{v}_t^h = \mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o), \tag{9.97}$$

o sea

$$\mathbf{v}_t^h = \Lambda\,\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) = \mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) + \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o). \tag{9.98}$$

Por otro lado, la solución particular es tal que

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\Lambda^{-1}\mathbf{v}_t^p) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) = \mathbf{0}, \tag{9.99}$$

de donde obtenemos

$$\Lambda^{-1}\mathbf{v}_t^p = \Lambda^{-1}\Pi_t\mathbf{v}_t^p = -\xi\Lambda^{-1}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_t^p = -\xi(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o). \tag{9.100}$$

En efecto, recordando (9.95) y de la propiedad conmutativa entre Λ^{-1} y Π_t ($\Lambda^{-1}\Pi_t = \Pi_t\Lambda^{-1}$), obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\xi}(-\xi\Lambda^{-1}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o)) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) = \\
&\quad -\Lambda^{-1}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) - \xi\frac{\partial\Lambda^{-1}}{\partial\xi}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) = \\
&\quad -\Lambda^{-1}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) + \xi\Lambda^{-2}\frac{\partial\Lambda}{\partial\xi}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) = \\
&\quad \Lambda^{-2}\left[-\Lambda\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) + \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o)\right] + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) = \\
&\quad -\Lambda^{-2}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) = \\
&\quad -\Lambda^{-1}\Lambda^{-1}\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) = \\
&\quad -\Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) + \Lambda^{-1}\Pi_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o) = \mathbf{0}. \quad (9.101)
\end{aligned}$$

Luego, de (9.91), (9.98) y de (9.100) obtenemos que un campo de Kirchhoff-Love está dado por

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_t &= \mathbf{v}_t^h + \mathbf{v}_t^p = \mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) + \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) - \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o \\
&= \mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) + \xi\left((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) - \nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o\right) = \mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o) + \xi\boldsymbol{\omega}_t^{KL}(\mathbf{x}_o), \quad (9.102)\\
v_n &= v_n^o(\mathbf{x}_o). \quad (9.103)
\end{aligned}$$

Hemos así demostrado el teorema y, como consecuencia de ello, el espacio $\mathscr{V}_{KL}$, definido en (9.85), puede ser ahora caracterizado en función de los campos de acciones de movimiento tangentes y normales definidos arriba, es decir

$$\begin{aligned}
\mathscr{V}_{KL} = \{&\mathbf{v}(\mathbf{x}_o,\xi),\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_t + v_n\mathbf{n};\ \mathbf{v}_t(\mathbf{x}_o,\xi) \text{ dado por (9.102) y} \\
&v_n \text{ dado por (9.103) } \forall(\mathbf{x}_o,\xi) \in \Sigma_o \times H\}.
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 9.9. Caracterizar el campo de acciones de movimiento de tipo Kirchhoff-Love para el caso de placas.

Es importante resaltar que las hipótesis cinemáticas en este modelo de Kirchhoff-Love corresponden a suponer que las fibras normales a la cáscara (y por lo tanto de longitud $h(\mathbf{x}_o)$) están sometidas a acciones virtuales de movimiento, $\mathbf{v}_t^o$ y v_n^o, que las mantienen normales y sin modificar su longitud ($(\nabla\mathbf{v})_s^s = \mathbf{0}$ y $(\nabla\mathbf{v})_n^s = 0$).

De la misma manera que fue realizado con el modelo de Naghdi en la Sección 9.5.2, estamos en condiciones de establecer la potencia interna de la cáscara para toda acción virtual de deformación definida por un campo de Kirchhoff-Love. Dado que para estos campos la componente normal de la tasa de deformación es nula y a su vez, de la definición de $\boldsymbol{\omega}_t^{KL}$ (ver (9.88)) resulta (ver (9.77))

$$\psi = \omega_t^{KL} + \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o = \mathbf{0}, \tag{9.104}$$

la potencia interna se reduce a

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \big[\mathbf{N}_t\cdot(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o) + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \mathbf{M}_t\cdot\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o))\big] d\Sigma_o. \tag{9.105}$$

Introduciendo la notación

$$\varepsilon^{KL} = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o) + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} = \varepsilon, \tag{9.106}$$

$$\chi^{KL} = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o)) = \chi|_{\omega_t=\omega_t^{KL}}, \tag{9.107}$$

donde ε y χ han sido definidas cuando presentamos el modelo de Naghdi (ver (9.75)-(9.76)), la potencia virtual interna para toda acción virtual de Kirchhoff-Love puede ser escrita de manera más compacta como sigue

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \big[\mathbf{N}_t\cdot\varepsilon^{KL} + \mathbf{M}_t\cdot\chi^{KL}\big] d\Sigma_o. \tag{9.108}$$

Ejercicio 9.10. Particularizar las expresiones (9.106)-(9.107) para el caso de placas dentro de la teoría de Kirchhoff-Love.

Para obtener la expresión de la potencia virtual externa asociada a toda acción de movimiento de Kirchhoff-Love basta utilizar las definiciones (9.86)-(9.87) y (9.88) en la expresión de la potencia externa deducida para el modelo de Naghdi (9.79). Como ahora ω_t^{KL} no es un campo independiente (como en el caso del modelo de Naghdi) ya que depende de $\mathbf{v}_t^o$ y de v_n^o (en particular depende de $\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o$), algunas integraciones por partes son ahora necesarias. Para ello, y sin perder generalidad, vamos a suponer que la cáscara es suave, es decir la normal $\mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$ esta definida en todo punto de su superficie media Σ_o, así como su contorno (no existen quiebres) y por lo tanto $\mathbf{n}_o$ está definida únicamente en todo $\partial\Sigma_o$. Con esto en mente obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\mathbf{f}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} d\partial\Omega_\mathbf{f} = \\ \int_{\Sigma_o} \big[(\tilde{\mathbf{p}}_{bt}^{KL} + \tilde{\mathbf{p}}_t^{KL})\cdot\mathbf{v}_t^o + (p_{bn} + p_n + \mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t))v_n^o\big] d\Sigma_o \\ + \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}} \big[\bar{\mathbf{p}}_t^{KL}\cdot\mathbf{v}_t^o + (\bar{p}_n + (\nabla_{\mathbf{x}_o}(\bar{\mathbf{m}}_t\cdot\mathbf{s}_o))\cdot\mathbf{s}_o - (\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t)\cdot\mathbf{n}_o)v_n^o \\ + (\bar{\mathbf{m}}_t\cdot\mathbf{n}_o)(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o)\cdot\mathbf{n}_o\big] d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}},\end{aligned} \tag{9.109}$$

donde las fuerzas generalizadas asociadas con el modelo de cáscara de Kirchhoff-Love, $\tilde{\mathbf{p}}_{bt}^{KL}$, $\tilde{\mathbf{p}}_t^{KL}$ y $\bar{\mathbf{p}}_t^{KL}$, están definidas de una manera similar a las presentadas en (9.64), y son dadas por

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{p}}_{bt}^{KL} &= \int_H \Lambda \mathbf{b}_t \det\Lambda d\xi,\\
\tilde{\mathbf{p}}_t^{KL} &= \Lambda^+ \mathbf{f}_t^+ \det\Lambda^+ + \Lambda^- \mathbf{f}_t^- \det\Lambda^-,\\
\bar{\mathbf{p}}_t^{KL} &= \int_H \Lambda \bar{\mathbf{f}}_t [\Lambda^2 \mathbf{s}_o \cdot \mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi.
\end{aligned} \tag{9.110}$$

De la misma forma, en la expresión (9.109) hemos usado la fuerzas generalizadas introducidas en (9.64).

Luego, teniendo en cuenta las expresiones de las potencias internas y externas deducidas anteriormente, obtenemos la caracterización del equilibrio para el modelo (exacto) de Kirchhoff-Love. En particular, este equilibrio está caracterizado por la siguiente ecuación variacional

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma_o} \big[\mathbf{N}_t \cdot (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o) + v_n^o \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \mathbf{M}_t \cdot \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o - \nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o))\big] d\Sigma_o =\\
\int_{\Sigma_o} \big[(\tilde{\mathbf{p}}_{bt}^{KL} + \tilde{\mathbf{p}}_t^{KL}) \cdot \mathbf{v}_t^o + (p_{bn} + p_n + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t)) v_n^o\big] d\Sigma_o\\
+ \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}} \big[\bar{\mathbf{p}}_t^{KL} \cdot \mathbf{v}_t^o + (\bar{p}_n + (\nabla_{\mathbf{x}_o}(\bar{\mathbf{m}}_t \cdot \mathbf{s}_o)) \cdot \mathbf{s}_o - (\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t) \cdot \mathbf{n}_o) v_n^o\\
+ (\bar{\mathbf{m}}_t \cdot \mathbf{n}_o)(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) \cdot \mathbf{n}_o\big] d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}} \quad \forall (\mathbf{v}_t^o, v_n^o) \in \mathrm{Var}_v,
\end{aligned} \tag{9.111}$$

donde

$$\mathrm{Var}_v = \{(\mathbf{v}_t^o, v_n^o) \in \mathscr{V}_o^{KL},\ (\mathbf{v}_t^o, v_n^o)|_{\partial\Sigma_{o\mathbf{u}}} = 0,\ (\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) \cdot \mathbf{n}_o|_{\partial\Sigma_{o\mathbf{u}}} = 0\}. \tag{9.112}$$

donde $\mathscr{V}_o^{KL}$ es un espacio de funciones suficientemente regulares para este modelo de Kirchhoff-Love.

Integrando por partes (o equivalentemente utilizando las fórmulas de Green), obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a esta ecuación variacional

$$\begin{cases}
\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{N}_t + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t + \mathbf{p}_t^{KL} = \mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o,\\
\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t - \mathbf{N}_t \cdot \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} + p_n^{KL} = 0 & \text{en } \Sigma_o,\\
(\mathbf{N}_t + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t)\mathbf{n}_o = \bar{\mathbf{p}}_t^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}},\\
(\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t) \cdot \mathbf{n}_o + (\nabla_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{M}_t\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{s}_o)) \cdot \mathbf{s}_o = \bar{p}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}},\\
\mathbf{M}_t\mathbf{n}_o \cdot \mathbf{n}_o = -\bar{m}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}},
\end{cases} \tag{9.113}$$

donde en las expresiones anteriores hemos introducido las siguientes notaciones para las fuerzas generalizadas que actúan sobre la cáscara

$$\mathbf{p}_t^{KL} = \tilde{\mathbf{p}}_{bt}^{KL} + \tilde{\mathbf{p}}_t^{KL}, \tag{9.114}$$

$$p_n^{KL} = p_{bn} + p_n + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t), \tag{9.115}$$

$$\bar{p}_n^{KL} = p_n + (\nabla_{\mathbf{x}_o}(\bar{\mathbf{m}}_t \cdot \mathbf{s}_o)) \cdot \mathbf{s}_o - (\mathbf{m}_{bt} + \mathbf{m}_t) \cdot \mathbf{n}_o, \tag{9.116}$$

$$\bar{m}_n^{KL} = \bar{\mathbf{m}}_t \cdot \mathbf{n}_o. \tag{9.117}$$

Ejercicio 9.11. Obtener la expresión del PPV y las ecuaciones de Euler-Lagrange para el caso del modelo de Kirchhoff-Love de placas. Comente el papel del tensor de curvatura en el acoplamiento de las tensiones generalizadas en las ecuaciones de equilibrio en el caso de cáscaras.

Antes de finalizar la presentación del modelo (exacto) de Kirchhoff-Love es importante observar una vez más las diferencias entre este modelo y el modelo de Naghdi. Si bien ambos modelos adoptan aparentemente una misma cinemática para las acciones de movimiento (compare (9.69)-(9.70) con (9.86)-(9.87)), las mismas son fundamentalmente diferentes. De hecho, en el modelo de Naghdi los campos $\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o)$, $\omega_t(\mathbf{x}_o)$ y $v_n^o(\mathbf{x}_o)$ son independientes. No ocurre lo mismo en el modelo de Kirchhoff-Love donde el campo $\omega_t^{KL}(\mathbf{x}_o)$ deja de ser un campo independiente, pasando a ser una función de los campos $\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o)$ y $v_n^o(\mathbf{x}_o)$ (a través del $\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o$) debido a la restricción cinemática inherente a este modelo (ver (9.88)). Luego, en el modelo de Kirchhoff-Love la cinemática para las acciones de movimiento depende de $\mathbf{v}_t^o(\mathbf{x}_o)$, $v_n^o(\mathbf{x}_o)$ y $\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o(\mathbf{x}_o)$.

En las secciones siguientes vamos a presentar otros modelos de cáscaras conocidos en la literatura. Estos modelos serán deducidos empleando el modelo (exacto) de Kirchhoff-Love, e introduciendo simplificaciones de carácter geométrico al incorporar hipótesis sobre la relación entre el espesor de la cáscara, $h(\mathbf{x}_o)$, y su menor radio de curvatura, $R_m(\mathbf{x}_o)$, las cuales deben ser satisfechas en todo punto de su superficie media. Como veremos, estas hipótesis impactan en la expresión final a ser adoptada en estos modelos para los operadores $\Lambda(\mathbf{x}_o)$ y $\Lambda^{-1}(\mathbf{x}_o)$. Estas aproximaciones, por un lado, permiten redefinir las tensiones generalizadas, recuperando la simetría que había sido perdida en los modelos hasta ahora estudiados; y, por otro lado, introducen modificaciones en las expresiones de las acciones de deformación.

9.5.4 Modelo de Love

El modelo tratado en esta sección fue propuesto por Love (ver [171]), y es conocido con el nombre de *Primera aproximación de Love*. El mismo consiste en suponer las mismas hipótesis cinemáticas de Kirchhoff-Love (9.86)-(9.87) asumiendo además que la cáscara es suficientemente fina, satisfaciendo de esta forma la restricción geométrica

$$\frac{h(\mathbf{x}_o)}{R_m(\mathbf{x}_o)} \ll 1 \quad \forall \mathbf{x}_o \in \Sigma_o. \tag{9.118}$$

Recordando la definición del tensor $\Lambda = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$ y dada la restricción geométrica anterior, podemos adoptar la siguiente aproximación para este tensor

$$\Lambda = \mathbf{I} + \mathscr{O}(\tfrac{h}{R_m}) \quad \Rightarrow \quad \Lambda \approx \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \det \Lambda \approx 1. \tag{9.119}$$

Con estas simplificaciones, las tensiones generalizadas (no simétricas) $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{M}_t$, definidas en (9.60), resultan simétricas, son designadas ahora por $\mathbf{N}_t^L$ y $\mathbf{M}_t^L$ y están definidas de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_t^L &= \int_H \mathbf{T}_t d\xi,\\ \mathbf{M}_t^L &= \int_H \mathbf{T}_t \xi d\xi.\end{aligned} \tag{9.120}$$

Introduciendo estas aproximaciones en la potencia interna asociada al modelo exacto de Kirchhoff-Love (ver (9.108)) obtenemos la potencia interna asociada al modelo de Love

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \left[\mathbf{N}_t^L\cdot\varepsilon^L + \mathbf{M}_t^L\cdot\chi^L\right] d\Sigma_o, \tag{9.121}$$

donde las acciones de deformación en dualidad con las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t^L$ y $\mathbf{M}_t^L$ están dadas, respectivamente, por ε^L y χ^L y definidas como

$$\varepsilon^L = (\varepsilon^{KL})^s, \tag{9.122}$$

$$\chi^L = (\chi^{KL})^s, \tag{9.123}$$

y donde ε^{KL} y χ^{KL} fueron definidas en (9.106)-(9.107).

La potencia externa asociada al modelo de Love se obtiene fácilmente de la potencia externa asociada al modelo de Kirchhoff-Love, donde ahora las fuerzas generalizadas son modificadas debido a la restricción geométrica (9.119), dando lugar a las siguientes fuerzas generalizadas compatibles con el modelo de Love

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{p}}_{bt}^L &= \int_H \mathbf{b}_t d\xi & p_{bn}^L &= \int_H b_n d\xi,\\
\tilde{\mathbf{p}}_t^L &= \mathbf{f}_t^+ + \mathbf{f}_t^- & p_n^L &= f_n^+ + f_n^-,\\
\bar{\mathbf{p}}_t^L &= \int_H \bar{\mathbf{f}}_t[\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi & \bar{p}_n^L &= \int_H \bar{f}_n[\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi,\\
\mathbf{m}_{bt}^L &= \int_H \mathbf{b}_t \xi d\xi & \mathbf{m}_t^L &= \frac{h}{2}(\mathbf{f}_t^+ - \mathbf{f}_t^-),\\
\bar{\mathbf{m}}_t^L &= \int_H \bar{\mathbf{f}}_t \xi[\mathbf{s}_o\cdot\mathbf{s}_o]^{1/2} d\xi,
\end{aligned} \tag{9.124}$$

resultando asi la siguiente potencia externa para el modelo de Love

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbf{b}\cdot\mathbf{v} d\Omega + \int_{\partial\Omega_\mathbf{f}} \mathbf{f}\cdot\mathbf{v} d\partial\Omega_\mathbf{f} = \\
\int_{\Sigma_o} \left[(\tilde{\mathbf{p}}_{bt}^L + \tilde{\mathbf{p}}_t^L)\cdot\mathbf{v}_t^o + (p_{bn}^L + p_n^L + \mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{m}_{bt}^L + \mathbf{m}_t^L))v_n^o\right] d\Sigma_o \\
+ \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}} \left[\bar{\mathbf{p}}_t^L\cdot\mathbf{v}_t^o + (\bar{p}_n^L + (\nabla_{\mathbf{x}_o}(\bar{\mathbf{m}}_t^L\cdot\mathbf{s}_o))\cdot\mathbf{s}_o - (\mathbf{m}_{bt}^L + \mathbf{m}_t^L)\cdot\mathbf{n}_o)v_n^o \right.\\
\left. + (\bar{\mathbf{m}}_t^L\cdot\mathbf{n}_o)(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o)\cdot\mathbf{n}_o\right] d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}.
\end{aligned} \tag{9.125}$$

Con estos resultados, el equilibrio de una cáscara dentro del modelo de Love está dado por la siguiente ecuación variacional

$$\int_{\Sigma_o} \left[\mathbf{N}_t^L \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^L + \mathbf{M}_t^L \cdot \boldsymbol{\chi}^L\right] d\Sigma_o =$$
$$\int_{\Sigma_o} \left[(\tilde{\mathbf{p}}_{bt}^L + \tilde{\mathbf{p}}_t^L) \cdot \mathbf{v}_t^o + (p_{bn}^L + p_n^L + \mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{m}_{bt}^L + \mathbf{m}_t^L))v_n^o\right] d\Sigma_o$$
$$+ \int_{\partial\Sigma_{o\mathbf{f}}} \left[\bar{\mathbf{p}}_t^L \cdot \mathbf{v}_t^o + (\bar{p}_n^L + (\nabla_{\mathbf{x}_o}(\bar{\mathbf{m}}_t^L \cdot \mathbf{s}_o)) \cdot \mathbf{s}_o - (\mathbf{m}_{bt}^L + \mathbf{m}_t^L) \cdot \mathbf{n}_o)v_n^o\right.$$
$$\left. + (\bar{\mathbf{m}}_t^L \cdot \mathbf{n}_o)(\nabla_{\mathbf{x}_o} v_n^o) \cdot \mathbf{n}_o\right] d\partial\Sigma_{o\mathbf{f}} \quad \forall (\mathbf{v}_t^o, v_n^o) \in \mathrm{Var}_v, \quad (9.126)$$

con Var_v definido en (9.112). Finalmente las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a esta ecuación variacional se obtienen de la misma forma que en el caso del modelo de Kirchhoff-Love con las correspondientes modificaciones sobre las tensiones y fuerzas generalizadas producidas por la aproximación geométrica impuesta por el modelo de Love.

Ejercicio 9.12. Compare el modelo de placa de Love con el modelo de placa de Kirchhoff-Love y comente los resultados.

9.5.5 Modelo de Koiter

Para presentar este modelo (ver [155]) recordemos la expresión de la potencia interna en el modelo (exacto) de Kirchhoff-Love dada por la expresión (9.105), y que repetimos aquí para facilitar la deduccción del modelo de Koiter

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{v})^s d\Omega =$$
$$\int_{\Sigma_o} \int_H \mathbf{T}_t \Lambda^{-1} \cdot \left[(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_t^o) + v_n^o \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} + \xi \Pi_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \boldsymbol{\omega}_t^{KL})\right] \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_o. \quad (9.127)$$

Haciendo uso de la relación tensorial $\mathbf{R} \cdot \mathbf{S}\mathbf{T} = \mathbf{R}\mathbf{T}^T \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S}^T\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$, válida para todo tensor de segunda orden $\mathbf{R}, \mathbf{S}$ y $\mathbf{T}$, y teniendo en cuenta la simetría del tensor Λ^{-1}, la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{v})^s d\Omega =$$
$$\int_{\Sigma_o} \int_H \Lambda^{-1} \mathbf{T}_t \Lambda^{-1} \cdot \left[\Lambda(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_t^o) + v_n^o \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} + \xi \Pi_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \boldsymbol{\omega}_t^{KL})\right]^s \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_o. \quad (9.128)$$

Recordando que $\Lambda = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$ el término entre corchete pude ser reescrito como

$$\left[\Lambda(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_t^o) + v_n^o \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n} + \xi \Pi_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \boldsymbol{\omega}_t^{KL})\right]^s = (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_t^o))^s + v_n^o \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$$
$$+ \xi \left[(\Lambda \Pi_t \nabla_{\mathbf{x}_o} \boldsymbol{\omega}_t^{KL}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{v}_t^o) + v_n^o (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n})^2)\right]^s. \quad (9.129)$$

Despreciando en la expresión anterior los términos $\mathscr{O}(\frac{h}{R_m})$ cuando comparados con el tensor identidad $\mathbf{I}$, obtenemos

$$\begin{aligned}\left[\Lambda(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\Pi_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t^{KL})\right]^s &\approx (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s+v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}\\ &+\xi\left[(\Pi_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t^{KL})^s+\left[(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)\right]^s+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2\right]. \quad (9.130)\end{aligned}$$

Recordando las expresiones de las acciones de deformación correspondiente al modelo de Love dadas por las expresiones (9.122)-(9.123) (ver también las expresiones de las acciones de deformación en el modelo de Kirchhoff-Love (9.106)-(9.107)), e introduciendo las siguientes definiciones

$$\varepsilon^K=\varepsilon^L, \quad (9.131)$$

$$\chi^K=\chi^L+((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2, \quad (9.132)$$

la expresión (9.130) puede ser escrita como sigue

$$\left[\Lambda(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\Pi_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega_t^{KL})\right]^s\approx\varepsilon^K+\xi\chi^K. \quad (9.133)$$

Introduciendo este resultado en la definición de la potencia interna (9.128) obtenemos

$$\int_\Omega\mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega=\int_{\Sigma_o}\int_H\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\cdot\left[\varepsilon^K+\xi\chi^K\right]\det\Lambda d\xi d\Sigma_o. \quad (9.134)$$

La expresión anterior nos permite deducir los esfuerzos internos generalizados duales a las acciones de deformación arriba definidas del modelo de Koiter. Estas tensiones generalizadas son

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_t^K&=\int_H\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\det\Lambda d\xi,\\ \mathbf{M}_t^K&=\int_H\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\xi\det\Lambda d\xi.\end{aligned} \quad (9.135)$$

Con estos resultados tenemos finalmente la expresión de la potencia interna adoptada en el modelo de Koiter, la cual está dada por

$$\int_\Omega\mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega=\int_{\Sigma_o}\left[\mathbf{N}_t\cdot\varepsilon^K+\mathbf{M}_t\cdot\chi^K\right]d\Sigma_o. \quad (9.136)$$

Es importante notar que la aproximación introducida en la expresión de la potencia virtual exacta de la teoría (exacta) de Kirchhoff-Love (ver Sección 9.5.3) para obtener la potencia virtual en el modelo de Koiter es del mismo orden que la utilizada en el modelo de Love (ver Sección 9.5.4). En otras palabras, ambos modelos, el de Love y el de Koiter, desprecian todos los términos que sean del orden de h/R_m frente a la unidad. Sin embargo, el término

$$\xi\left((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2\right)^s = \mathscr{O}(\tfrac{h}{R_m})\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\right)^s = \mathscr{O}(\tfrac{h}{R_m})\varepsilon^L, \quad (9.137)$$

en la expresión (9.130) es mantenido frente al término ε^L. En otras palabras, todos los términos lineales en ξ han sido mantenidos en la deducción de la potencia virtual correspondiente al modelo de Koiter. Esto permite resolver algunas inconsistencias que surgen en el modelo de Love relacionadas con el equilibrio alrededor de la normal y algunos modos rígidos de deformación presentes en este modelo. Esto será tratado más adelante en la Sección 9.7.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al PPV correspondiente al modelo de Koiter (donde la potencia interna es dada por la expresión (9.136)) se obtienen siguiendo el procedimiento usual de integración por partes, y están dadas por

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{N}_t^K+(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^K+\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^K)+\mathbf{p}_t^{KL}=\mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o,\\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^K-\mathbf{M}_t^K\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2-\mathbf{N}_t^K\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})+p_n^{KL}=0 & \text{en } \Sigma_o,\\ (\mathbf{N}_t^K+2(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^K)\mathbf{n}_o=\bar{\mathbf{p}}_t^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}},\\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^K\cdot\mathbf{n}_o+(\nabla_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{M}_t^K\mathbf{n}_o\cdot\mathbf{s}_o))\cdot\mathbf{s}_o=\bar{p}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}},\\ \mathbf{M}_t^K\mathbf{n}_o\cdot\mathbf{n}_o=-\bar{m}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}. \end{cases} \quad (9.138)$$

Aquí es importante observar el surgimiento de los términos adicionales dados por $\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^K)$ y $-\mathbf{M}_t^K\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2$ en las ecuaciones correspondientes al equilibrio de membrana y de flexión, respectivamente. Finalmente, las condiciones de contorno son las mismas que las del modelo de Kirchhoff-Love $(9.113)_3$-$(9.113)_5$ evidentemente substituyendo $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{M}_t$ por $\mathbf{N}_t^K$ y $\mathbf{M}_t^K$.

Ejercicio 9.13. Obtenga el modelo de Koiter para placas y compare con los modelos anteriores, comentando los resultados.

9.5.6 Modelo de Sanders

Este modelo fue propuesto en [264] y para deducirlo seguiremos nuestra formulación unificada. De la misma manera que hicimos en el modelo de Koiter, procedemos nuevamente a tomar la potencia interna exacta del modelo de Kirchhoff-Love, dada por la expresión (9.105), reescribiéndola de la siguiente forma

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o}\int_H \mathbf{T}_t\cdot\left[\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega^{KL})\right)\Lambda^{-1}\right]^s \det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o. \quad (9.139)$$

Sin introducir ninguna aproximación, la expresión anterior podemos escribirla como

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o}\int_{H} \Lambda^{-1}\mathbf{T}_t\cdot\Lambda\left[\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\,\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega^{KL})\right)\Lambda^{-1}\right]^s \det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o. \tag{9.140}$$

Ahora, haciendo uso de la expansión presentada en la (9.235), el término $\Lambda[\ldots]^s$ en la expresión anterior puede escribirse de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Lambda\left[\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\,(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega^{KL}))\right)\Lambda^{-1}\right]^s = \\ (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^S + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\left[(\mathbf{I}+\mathscr{O}(\tfrac{h}{R_m}))(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega^{KL}))^s\right. \\ \left. -(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^s+(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s\right],\end{aligned} \tag{9.141}$$

que, despreciando los términos de orden $\mathscr{O}(\frac{h}{R_m})$, resulta

$$\begin{aligned}\Lambda\left[\left(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)+v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\,(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega^{KL}))\right)\Lambda^{-1}\right]^s = \\ (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}+\xi\,(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\omega^{KL}))^s \\ -\xi\,(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^s+\xi\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s.\end{aligned} \tag{9.142}$$

Trabajando en los dos últimos términos tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}-\xi\,(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^s+\xi\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s = \\ -\xi\,\frac{1}{2}\left[\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})+(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T\right] \\ +\xi\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\frac{1}{2}\left[(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))+(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T\right] = \\ \xi\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\frac{1}{2}\left[(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))-(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T\right] \\ +\xi\,\frac{1}{2}\left[(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T-(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\right] \\ =\xi\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Omega_t^o+\xi\left[(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T\right]^a,\end{aligned} \tag{9.143}$$

donde

$$\Omega_t^o=\frac{1}{2}\left[(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))-(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T\right]=\left[\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)\right]^a, \tag{9.144}$$

representa la rotación alrededor de la normal, y donde $(\cdot)^a$ es la parte antisimétrica del tensor $(\cdot)$.

Con estos resultados, la potencia virtual resulta ahora expresa por la siguiente forma aproximada

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o}\int_H \Lambda^{-1}\mathbf{T}_t \cdot \big[(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} + \xi(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\boldsymbol{\omega}^{KL}))^s + \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Omega_t^o + \xi\big[(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T\big]^a\big]\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o. \quad (9.145)$$

Ahora veamos una expresión aproximada para $\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t$, donde despreciamos términos del orden de $\mathscr{O}(\frac{h}{R_m})$. Para esto utilizaremos convenientemente la expansión para Λ^{-1}

$$\begin{aligned}\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t &= (\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t)^s + (\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t)^a = \\ &\frac{1}{2}(\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t + \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}) + \frac{1}{2}(\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t - (\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t)^T) = \\ &\frac{1}{2}\big[\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t + \mathbf{T}_t\Lambda^{-1} + \mathbf{T}_t - \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t - \mathbf{T}_t + \xi\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\big] = \\ &\frac{1}{2}\big[\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t(\mathbf{I} - \mathscr{O}(\tfrac{h}{R_m})) + \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}(\mathbf{I} + \mathscr{O}(\tfrac{h}{R_m}))\big] \approx \\ &\frac{1}{2}\big[\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t + \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\big] = (\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t)^s. \quad (9.146)\end{aligned}$$

Substituyendo este resultado en la expresión de la potencia interna dada por (9.145), y recordando que $\mathbf{S}\cdot\mathbf{A} = 0$ donde $\mathbf{S}$ es un tensor simétrico y $\mathbf{A}$ es antisimétrico, obtenemos

$$\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o}\int_H (\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t)^s \cdot \big[(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} \; \xi(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\boldsymbol{\omega}^{KL}))^s + \xi((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Omega_t^o)^s\big]\det\Lambda\, d\xi\, d\Sigma_o. \quad (9.147)$$

Esta expresión nos muestra claramente las tensiones y acciones de deformación generalizadas asociadas al modelo de Sanders. De hecho, podemos introducir las siguientes definiciones para las tensiones generalizadas

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_t^S &= \int_H (\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t)^s \det\Lambda\, d\xi = (\mathbf{N}_t)^s, \\ \mathbf{M}_t^S &= \int_H (\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t)^s \xi \det\Lambda\, d\xi = (\mathbf{M}_t)^s,\end{aligned} \quad (9.148)$$

y las siguientes definiciones para las acciones de deformación correspondientes

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varepsilon}^S &= \boldsymbol{\varepsilon}^L, \\ \boldsymbol{\chi}^S &= \boldsymbol{\chi}^L + ((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Omega_t^o)^s,\end{aligned} \quad (9.149)$$

donde $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ y $\boldsymbol{\chi}^L$ son las correspondientes del modelo de Love definidas por (9.122)-(9.123) (ver también las expresiones de las acciones de deformación en el Modelo de Kirchhoff-Love (9.106)-(9.107)).

Con estas definiciones (y aproximaciones) la potencia interna en el modelo de Sanders resulta

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \left[\mathbf{N}_t^S\cdot\boldsymbol{\varepsilon}^S + \mathbf{M}_t^S\cdot\boldsymbol{\chi}^S\right] d\Sigma_o, \tag{9.150}$$

Como en el caso del modelo de Koiter, en el modelo de Sanders son mantenidos algunos términos del orden de $\mathscr{O}(\frac{h}{R_m})$ con el objetivo de eliminar inconsistencias existentes en el modelo de Love.

De la misma manera a la realizada en las secciones anteriores, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al PPV, donde la potencia interna corresponde a la potencia interna del modelo de Sanders, están dadas por

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left[\mathbf{N}_t^S + ((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^S)^a)\right] + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^S + \mathbf{p}_t^{KL} = \mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^S - \mathbf{N}_t^S\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + p_n^{KL} = 0 & \text{en } \Sigma_o, \\ \left[\mathbf{N}_t^K + ((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^S))^s\right]\mathbf{n}_o = \bar{\mathbf{p}}_t^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^S\cdot\mathbf{n}_o + (\nabla_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{M}_t^S\mathbf{n}_o\cdot\mathbf{s}_o))\cdot\mathbf{s}_o = \bar{p}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\ \mathbf{M}_t^S\mathbf{n}_o\cdot\mathbf{n}_o = -\bar{m}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}. \end{cases} \tag{9.151}$$

Ejercicio 9.14. Obtener el modelo de placas dentro de la teoría de Sanders y comparar con los modelos de placas estudiados en ejercicios anteriores, comentando los resultados obtenidos.

9.5.7 Modelo de Donnell-Mushtari-Vlasov

El último modelo que vamos a presentar en este capítulo fue propuesto por Donnell para cáscaras cilíndricas y por Mushtari y Vlasov para cáscaras rebajadas (ver [206])

Este modelo incorpora otro tipo de aproximaciones. Por un lado, la tasa de deformación $\boldsymbol{\varepsilon}^L$ es llevada en cuenta mientras que, por otro lado, en el tensor tasa de deformación $\boldsymbol{\chi}_t^L$ (ver la expresión (9.123)) no se lleva en cuenta la contribución del gradiente de la velocidad tangencial $\mathbf{v}_t^o$. De esta manera, surge un nuevo tensor para medir la variación de curvatura, que es el que caracteriza el modelo de Donnell-Mushtari-Vlasov. Así, la tasa de deformación para este modelo consiste en

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{DMV} = \boldsymbol{\varepsilon}^L, \tag{9.152}$$

$$\boldsymbol{\chi}^{DMV} = -\boldsymbol{\Pi}_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o. \tag{9.153}$$

A su vez, las tensiones generalizadas resultan similares a las dadas en (9.120), esto es

$$\mathbf{N}_t^{DMV} = \mathbf{N}_t^L, \tag{9.154}$$

$$\mathbf{M}_t^{DMV} = \mathbf{M}_t^L, \tag{9.155}$$

Con estos elementos, la potencia interna para este modelos toma la forma

$$\int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot (\nabla \mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \left[\mathbf{N}_t^{DMV} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{DMV} + \mathbf{M}_t^{DMV} \cdot \boldsymbol{\chi}^{DMV} \right] d\Sigma_o. \tag{9.156}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al modelo de Donnell-Mushtari-Vlasov pueden ser derivadas de la manera usual a la realizada para los otros modelos, ahora haciendo uso de la potencia interna dada por (9.156). Estas ecuaciones están dadas por

$$\begin{cases} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{N}_t^{DMV} + \mathbf{p}_t^{KL} = \mathbf{0} & \text{en } \Sigma_o, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_t^{DMV} - \mathbf{N}_t^{DMV} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) + p_n^{KL} = 0 & \text{en } \Sigma_o, \\ \mathbf{N}_t^{DMV} \mathbf{n}_o = \bar{\mathbf{p}}_t^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\ \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o} \mathbf{M}_t^{DMV} \cdot \mathbf{n}_o + (\nabla_{\mathbf{x}_o} (\mathbf{M}_t^{DMV} \mathbf{n}_o \cdot \mathbf{s}_o)) \cdot \mathbf{s}_o = \bar{p}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}, \\ \mathbf{M}_t^{DMV} \mathbf{n}_o \cdot \mathbf{n}_o = -\bar{m}_n^{KL} & \text{en } \partial\Sigma_{o\mathbf{f}}. \end{cases} \tag{9.157}$$

Ejercicio 9.15. Obtener el modelo de Donnell-Mushtari-Vlasov para placas y comentar los resultados.

9.6 Ecuaciones Constitutivas y sus Restricciones Internas

En las secciones anteriores hemos empleado el Principio de la Potencia Virtual para definir el *equilibrio* correspondiente a los diversos modelos de cáscaras presentados. En particular, hemos mostrado también como esta formulación variacional unificada nos ha permitido colocar todos estos modelos dentro de una misma óptica a la vez que fue posible definir de una manera clara y consistente las fuerzas (externas e internas) generalizadas compatibles con cada uno de los modelos.

Como ya resaltamos al presentar los conceptos básicos del PPV, esta formulación, al estar definida en la configuración actual del cuerpo en estudio, es válida para cualquier nivel de deformación y comportamiento constitutivo del material que integra la cáscara. De hecho, la formulación desarrollada hasta aquí no explicitó en ningún momento la relación constitutiva que vincula el esfuerzo interno generalizado con el nivel de deformación y/o con la tasa de deformación. Sin embargo, y como ya observamos cuando presentamos el PPV, estos niveles de deformación y/o tasas de deformación deberán ser tales que sus derivadas en el sentido de Gâteaux en ese punto correspondan a las expresiones de las tasas de deformaciones virtuales adoptadas en cada modelo.

Hecha estas consideraciones generales, en esta sección vamos a mostrar la *construcción* de ecuaciones constitutivas admisibles para estos modelos, limitando la presentación al caso de deformaciones infinitesimales. Es decir, estaremos dentro de la teoría de pequeños desplazamientos y deformaciones infinitesimales para los modelos de cáscaras estudiados. Esta limitación la hacemos para simplificar nuestra presentación, pero, con los elementos mostrados, el lector no tendrá dificultad en generalizar al caso de grandes deformaciones. En efecto, el adoptar la hipótesis de pequeños desplazamientos y deformaciones infinitesimales nos permite escribir los

desplazamientos de la misma manera que las velocidades virtuales adoptadas en cada modelo. Como consecuencia de esto, las deformaciones generalizadas quedan definidas de la misma manera (son iguales) a las tasas de deformación generalizadas virtuales propias de cada modelo.

Es importante señalar que algunas inconsistencias presentes en la teoría de cáscaras (finas) pueden evitarse si las hipótesis cinemáticas consideradas en cada modelo se toman como restricciones internas al comportamiento del material. Para una descripción detallada de este tipo de inconsistencias presentes en la teoría de placas delgadas recomendamos ver el trabajo [235]. En particular, el objetivo de esta sección es mostrar la forma de evitar este tipo de inconsistencias para el caso de los modelos de cáscaras estudiados, y para ello seguiremos nuestro enfoque variacional presentado en este trabajo (ver también [99, 235, 278, 279]).

9.6.1 Conceptos Preliminares

En la mecánica de medios continuos, una restricción material interna es una restricción en las deformaciones a las que un material dado puede ser sometido [130]. Un ejemplo de esto corresponde al caso de *materiales incompresibles*. Estos materiales solo pueden ser sometidos a campos de deformaciones que no modifican el volumen del material. En los modelos de cáscaras que hemos estudiado, las fibras ortogonales a la superficie media de la cáscara se mantienen indeformables. Luego, dada la dualidad que hemos establecido en la mecánica, para cada restricción al movimiento, o a la deformación, tendremos, respectivamente, fuerzas y tensiones reactivas que serán ortogonales a los respectivos conjuntos de variaciones admisibles (ver Capítulo 3).

En lo que sigue, y para formalizar la idea, vamos a limitarnos al caso de deformaciones infinitesimales. Con esto los tensores de deformación generalizados los podemos *confundir* (son iguales) a los tensores de tasas de deformación virtuales estudiados para cada modelo de cáscara. Luego, y dentro de la teoría de pequeñas deformaciones, designemos por $\mathbf{E}$ al tensor (simétrico) de deformación y por $\mathscr{C}(\mathbf{E}) = 0$ a la restricción que las deformaciones deben satisfacer para ser admisibles desde el punto de vista constitutivo. Luego, el conjunto de deformaciones admisible en el espacio de las deformaciones $\mathscr{W}$ constituido por todos los campos tensoriales simétricos de segundo orden, puede ser caracterizado de la siguiente forma

$$\mathscr{W}_{\mathscr{C}} = \{\mathbf{E} \in \mathscr{W}, \mathscr{C}(\mathbf{E}) = 0\}. \tag{9.158}$$

Sin embargo, y dada la dualidad sobre la que hemos construido la formulación variacional presentada en este trabajo, el conjunto anterior puede ser representado de otra manera a través de la ortogonalidad entre las tensiones reactivas $\mathbf{T}^{(r)} \in \mathscr{W}'$ asociadas con la restricción $\mathscr{C}$. Luego, si designamos con $\mathscr{W}'_{\mathscr{C}} = \{\mathbf{T}^{(r)} \in \mathscr{W}', \mathbf{T}^{(r)} \in (\mathscr{W}_{\mathscr{C}})^{\perp}\}$, tenemos

$$\mathscr{W}_{\mathscr{C}} = \{\mathbf{E} \in \mathscr{W}, \mathbf{E} \cdot \mathbf{T}^{(r)} = 0 \; \forall \mathbf{T}^{(r)} \in \mathscr{W}'_{\mathscr{C}}\}. \tag{9.159}$$

Desde el punto de vista mecánico, con las expresiones anteriores lo que estamos diciendo es que las tensiones reactivas $\mathbf{T}^{(r)}$ producen potencia interna nula, es decir, no contribuyen en la potencia interna del material para toda deformación admisible para el material. Por esta misma razón vemos que $\mathbf{T}^{(r)}$ no podrá ser calculada a través del PPV (o su equivalente el PTV). En otras palabras, el estado de tensión del cuerpo está dado por

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(a)} + \mathbf{T}^{(r)}, \tag{9.160}$$

donde $\mathbf{T}^{(a)} \in \mathscr{W}'$ es el estado de tensiones *activas* asociado con la deformación $\mathbf{E} \in \mathscr{W}_{\mathscr{C}}$ a través de las ecuaciones constitutivas que caracterizan el comportamiento del material. Este estado de tensiones $\mathbf{T}^{(a)}$ queda totalmente caracterizado a través del PPV definido en el conjunto de desplazamientos cinemáticamente admisibles, tanto desde el punto de vista de las restricciones en el contorno del cuerpo como de las restricciones impuestas por el comportamiento del material. En otras palabras, Kin_u está dado por

$$\mathrm{Kin}_u = \{\mathbf{u} \in \mathscr{U}\,,\, \mathbf{u} \text{ satisface condiciones de contorno y } \mathbf{E}(\mathbf{u}) \in \mathscr{W}_{\mathscr{C}}\} = \mathbf{u}_o + \mathrm{Var}_u, \tag{9.161}$$

donde Var_u es el subespacio que genera la variedad lineal Kin_u.

Una vez calculada las tensiones activas, se libera el cuerpo, es decir relajamos la restricción constitutiva $\mathscr{C}$, y aplicamos el PPV con ese estado de tensiones activa $\mathbf{T}^{(a)}$ conocido y con las tensiones reactivas $\mathbf{T}^{(r)}$, que ahora si participan en la potencia interna. Esto nos proporciona las ecuaciones variacionales suficientes para caracterizar (calcular) $\mathbf{T}^{(r)}$. De hecho tenemos la siguiente secuencia de problemas variacionales para determinar $\mathbf{T}^{(a)}$ y $\mathbf{T}^{(r)}$. El primer problema variacional consiste en determinar $\mathbf{u}_o \in \mathrm{Kin}_u$, que produce una deformación $\mathbf{E}(\mathbf{u}_o) \in \mathscr{W}_{\mathscr{C}}$ tal que, a través de las ecuaciones constitutivas del material, produce un estado de tensiones activas $\mathbf{T}^{(a)}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_o))$ que satisface el PPV (o su equivalente el PTV)

$$(\mathbf{T}^{(a)}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_o)), \mathbf{E}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_o)) = \langle f, \mathbf{u} - \mathbf{u}_o \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Kin}_u. \tag{9.162}$$

Con $\mathbf{T}^{(a)}$ definido de esta forma relajamos la restricción constitutiva $\mathbf{E}(\mathbf{u}) \in \mathscr{W}_{\mathscr{C}}$, en otras palabras, extendemos el conjunto Kin_u que ahora queda definido por

$$\mathrm{Kin}_u^* = \{\mathbf{u} \in \mathscr{U}\,,\, \mathbf{u} \text{ satisface condiciones de contorno}\} = \mathbf{u}^* + \mathrm{Var}_u^*, \tag{9.163}$$

donde $\mathbf{u}^*$ es un elemento arbitrario de Kin_u^* y Var_u^* es el subespacio que genera esta variedad lineal, y procedemos nuevamente a aplicar el PPV en este conjunto, donde ahora $\mathbf{T}^{(r)}$ produce potencia interna. Luego, el problema variacional ahora consiste en determinar $\mathbf{T}^{(r)} \in \mathscr{W}'_{\mathscr{C}}$ tal que

$$(\mathbf{T}^{(a)}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_o)) + \mathbf{T}^{(r)}, \mathbf{E}(\mathbf{u})) = \langle f, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Var}_u^*. \tag{9.164}$$

Como en la expresión anterior $\mathbf{T}^{(a)}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_o))$ es conocido, el problema variacional puede ser reescrito como sigue

$$(\mathbf{T}^{(r)}, \mathbf{E}(\mathbf{u})) = -(\mathbf{T}^{(a)}(\mathbf{E}(\mathbf{u}_o)), \mathbf{E}(\mathbf{u})) + \langle f, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{u} \in \mathrm{Var}_u^*. \tag{9.165}$$

Es importante observar que el lado derecho de la ecuación variacional anterior no es nulo ya que $\mathbf{u} \in \mathrm{Var}_u^*$, esto es, no pertenece a Var_u. Para el caso de los modelos de cáscaras estudiados, lo anterior será visto en detalle en la Sección 9.7.3 donde, en lugar de hacer uso de la expresión (9.165), obtendremos soluciones aproximadas de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas.

Es evidente que si el material está asociado a m restricciones constitutivas, $\mathscr{C}_i$, $i = 1, \ldots, m$, la admisibilidad cinemática desde el punto de vista del comportamiento del material está asociada a campos $\mathbf{u}$ que producen deformaciones $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ que pertenecen a la intersección de todos los conjuntos $\mathscr{W}_{\mathscr{C}_i}$. Es decir, en tal caso tenemos

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}) \in \mathscr{W}_{\cap} = \bigcap_{i=1}^{m} \mathscr{W}_{\mathscr{C}_i}, \tag{9.166}$$

y, desta forma, el conjunto de tensiones reactivas asociadas a este conjunto de restricciones pertenece ahora al conjunto

$$\mathscr{W}'_{\cap} = \{\mathbf{T}^{(r)} \in \mathbf{W}', \mathbf{T}^{(r)} \in (\mathscr{W}_{\cap})^{\perp}\}. \tag{9.167}$$

Finalmente el conjunto de desplazamientos ciemáticamente admisibles está ahora caracterizado por

$$\mathrm{Kin}_u = \{\mathbf{u} \in \mathscr{U}, \mathbf{u} \text{ satisface condiciones de contorno y } \mathbf{E}(\mathbf{u}) \in \mathscr{W}_{\cap}\}. \tag{9.168}$$

9.6.2 Modelos con Hipótesis de Naghdi

En esta sección vamos a trabajar con el modelo de cáscara presentado en la Sección 9.5.2 para el cual, bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones, tenemos que los tensores de deformación tienen la misma representación que las acciones de deformación definidas en (9.75)-(9.77). Así, desde el punto de vista constitutivo (comportamiento del material), las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{Q}$ serán colocadas en función de los siguientes tensores de deformación

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{u}_t^o) + u_n^o \nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}, \\ \chi &= \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o} \theta_t), \\ \psi &= \theta_t - (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \mathbf{u}_t^o + \nabla_{\mathbf{x}_o} u_n^o, \end{aligned} \tag{9.169}$$

donde $\mathbf{u}_t^o$ y u_n^o representan los desplazamientos tangente y normal, mientras que θ_t define la rotación del plano tangente, de acuerdo con las hipótesis cinemáticas definidas por (9.69)-(9.70). Para estas hipótesis, está claro que el tensor de deformación $\mathbf{E}$, correspondiente al cuerpo material tridimensional, es tal que $E_n = \mathbf{E}\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E} \cdot (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) = 0$. Como resultado de esto tenemos que para este modelo de cáscara la restricción interna $\mathscr{C}$ está dada por

$$\mathscr{C}(\mathbf{E}) = \mathbf{E}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0, \tag{9.170}$$

y el conjunto (subespacio en este caso) de las tensiones reactivas a esta restricción queda caracterizado por

$$\mathscr{W}'_{\mathscr{C}} = \{\mathbf{T}^{(r)} \in \mathscr{W}', \mathbf{T}^{(r)} = \alpha\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}, \alpha \in \mathbb{R}\}, \tag{9.171}$$

y el conjunto de deformaciones admisibles resulta, por su parte, caracterizado de la siguiente manera

$$\mathscr{W}_{\mathscr{C}} = \{\mathbf{E} \in \mathscr{W}, \mathbf{E}\cdot\mathbf{T}^{(r)} = 0 \,\forall \mathbf{T}^{(r)} \in \mathscr{W}'_{\mathscr{C}}\}. \tag{9.172}$$

A su vez, el estado de tensiones en la cáscara está ahora dado por $\mathbf{T} = \mathbf{T}^{(a)} + \mathbf{T}^{(r)}$, donde cada uno de estos tensores puede ser escrito en función de sus componentes en la base intrínseca de la cáscara

$$\mathbf{T}^{(a)} = \mathbf{T}_t^{(a)} + \mathbf{T}_s^{(a)}\otimes\mathbf{n} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{T}_s^{(a)}, \tag{9.173}$$

$$\mathbf{T}^{(r)} = T_n^{(r)}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}), \tag{9.174}$$

donde es evidente que $\mathbf{T}_t = \mathbf{T}_t^{(a)}$, $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_s^{(a)}$ y $T_n = T_n^{(r)}$.

Designemos, respectivamente, con $W = W(\mathbf{E})$ y $W^* = W^*(\mathbf{T})$ la función de densidad (por unidad de volumen) de energía de deformación y la función de densidad de energía de deformación complementaria. Como vimos en el Capítulo 4, estas funciones son tales que para todo estado de tensión $\mathbf{T}$ y de deformación $\mathbf{E}$, ambos tensores simétricos, la siguiente expresión se verifica

$$\int_\Omega W^*(\mathbf{T})d\Omega + \int_\Omega W(\mathbf{E})d\Omega \geq \int_\Omega \mathbf{T}\cdot\mathbf{E}d\Omega \quad \forall\mathbf{T} \in \mathscr{W}', \forall\mathbf{E} \in \mathscr{W}, \tag{9.175}$$

y donde la igualdad es satisfecha si y sólo si $\mathbf{T}$ y $\mathbf{E}$ están relacionadas a través de la ecuación constitutiva del material. A su vez vimos que la transformación de Legendre permite, a través de problemas de maximización, encontrar una en función de la otra. Por ejemplo, conocida la función de densidad de energía complementaria $W^* = W^*(\mathbf{T})$, y para un dado $\mathbf{E}$, tenemos que

$$\int_\Omega W(\mathbf{E})d\Omega = \max_{\mathbf{T}} \Pi^*(\mathbf{T},\mathbf{E}), \tag{9.176}$$

donde

$$\Pi^*(\mathbf{T},\mathbf{E}) = \int_\Omega (\mathbf{T}\cdot\mathbf{E} - W^*(\mathbf{T}))d\Omega. \tag{9.177}$$

Luego, para un dado estado de deformación $\mathbf{E}$, el problema de encontrar el estado de tensión $\mathbf{T}$ asociado con $\mathbf{E}$ por medio de la ecuación constitutiva consiste en resolver el problema de máximo anterior. Como ya vimos en el Capítulo 4, la solución de este problema satisface

$$\mathbf{E} = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{T}}. \tag{9.178}$$

Considerando un material elástico lineal cuya función de densidad de energía complementaria está dada por

$$W^*(\mathbf{T}) = \frac{1}{2}\mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}, \tag{9.179}$$

donde $\mathbb{D}$ es un tensor de cuarto orden, la solución del problema de máximo conduce a la siguiente función de energía de deformación

$$W(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}\mathbb{D}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}. \tag{9.180}$$

Algo similar podemos realizar para calcular la densidad de energía complementaria en función de la densidad de energía $W(\mathbf{E})$.

Resumiendo, de los resultados anteriores tenemos

$$\mathbf{E} = \frac{\partial W^*}{\partial \mathbf{T}} = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T} \quad \text{y} \quad \mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbb{D}\mathbf{E}. \tag{9.181}$$

En un material sin restricciones internas el tensor $\mathbb{D}$ es un mapeamiento que lleva $\mathscr{W}$ sobre $\mathscr{W}$ (aquí estamos haciendo la identificación de $\mathscr{W}'$ con el propio $\mathscr{W}$, o sea, representando el estado de tensiones $\mathbf{T}\in\mathscr{W}'$ por campos tensoriales simétricos). Sin embargo, para un material con restricciones internas $\mathscr{C}$ tenemos

$$\mathbb{D} : \mathscr{W}_{\mathscr{C}} \to \mathscr{W}_{\mathscr{C}}, \tag{9.182}$$

con el conjunto $\mathscr{W}_{\mathscr{C}}$ dado por (9.172), debido a que, como ya dijimos, solo la componente activa, $\mathbf{T}^{(a)}$, del estado de tensiones $\mathbf{T}$ puede ser evaluada a través de relaciones constitutivas.

Ahora vamos a introducir el concepto de *grupo de simetría* de la siguiente forma: recuerde que *Orth* es el conjunto de todos los tensores ortogonales con determinante positivo. Luego, el grupo de simetría, denotado por $\mathscr{Q}$, de un material descripto por $\mathbb{D}$, restricto a $\mathscr{W}_{\mathscr{C}}$, es la colección de todos los tensores $\mathbf{Q}\in Orth$ tales que

$$\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T \in \mathscr{W}_{\mathscr{C}} \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}\mathbf{T}^{(a)}\mathbf{Q}^T = \mathbb{D}[\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T] \quad \forall \mathbf{E}\in\mathscr{W}_{\mathscr{C}}. \tag{9.183}$$

En un material con restricciones internas el grupo $\mathscr{Q}$ no puede ser arbitrario dado que debe satisfacer (9.183). Por ejemplo, en el caso de un material isotrópico, el material puede ser incompresible (que corresponde a una restricción $\mathscr{C}(\mathbf{E}) = \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{u}) = \nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{E}\cdot\mathbf{I} = 0$ por lo que $\mathscr{W}_{\mathscr{C}} = \{\mathbf{E}\in\mathscr{W}, \mathbf{E}\cdot\alpha\mathbf{I} = 0\,\forall\alpha\in\mathbb{R}\}$, pero no puede ser rígido en la dirección normal, $E_n = 0$). Dentro de este contexto, el máxmio grupo de simetría compatible con la restricción interna es el material con isotropía transversal [235]. Esto conduce a considerar en lo que sigue materiales ortotrópicos con simetría rómbica.

Consideremos ahora una base ortonormal $(\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{n})$, donde $\mathbf{e}_{(1)}$ y $\mathbf{e}_{(2)}$ son dos vectores unitarios y ortogonales entre ellos definidos en el plano tangente de la superficie media de la cáscara. El grupo de simetría llevando en cuenta esta base puede ser generado a través rotaciones caracterizadas por un ángulo ϕ alrededor de $\mathbf{e}_{(1)}$ y $\mathbf{e}_{(2)}$.

Designemos con D_{ijkl} $(i,j,k,l = 1,2,n)$ las componentes del tensor de cuarta orden $\mathbb{D}$ en relación a la base anterior. Para un material ortotrópico, las componentes para las cuales los índices se repiten una o tres veces deben ser nulas. Por otro lado, llevando en cuenta la simetría del tensor de elasticidad tenemos $D_{klij} = D_{klji} = D_{lkij} = D_{ijkl}$, y el material resultará caracterizado solamente por 9 coeficientes materiales. En particular, usando la representación vectorial clásica para $\mathbf{T}^{(a)}$ y $\mathbf{E}$, tenemos

$$\begin{pmatrix} T_{11}^{(a)} \\ T_{22}^{(a)} \\ T_{12}^{(a)} \\ T_{1n}^{(a)} \\ T_{2n}^{(a)} \\ T_{n}^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & 0 & 0 & 0 & D_{11nn} \\ D_{1122} & D_{2222} & 0 & 0 & 0 & D_{22nn} \\ 0 & 0 & 2D_{1212} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2D_{1n1n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2D_{2n2n} & 0 \\ D_{11nn} & D_{22nn} & 0 & 0 & 0 & D_{nnnn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \\ E_{1n} \\ E_{2n} \\ E_{n} \end{pmatrix}. \tag{9.184}$$

En la expresión anterior $T_{11}^{(a)}, \ldots, T_{n}^{(a)}$ y $E_{11}, \ldots, E_n$ son las componentes de $\mathbf{T}^{(a)}$ y $\mathbf{E}$ con respecto a la base adoptada $(\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{n})$.

Recordemos ahora que en el modelo de Naghdi tenemos $E_n = 0$ y, por lo tanto, $T_n^{(a)} = 0$. Luego para este material los siguientes coeficientes son nulos

$$D_{11nn} = D_{22nn} = 0. \tag{9.185}$$

Por otro lado, y para la base adoptada, tenemos para un tensor simétrico $\mathbf{S}$ que

$$\mathbf{S}_t = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{S}_s = \mathbf{S}_s^* = \begin{pmatrix} S_{1n} \\ S_{2n} \end{pmatrix}. \tag{9.186}$$

Usando (9.184), (9.185) y (9.186) obtenemos las siguientes relaciones

$$\mathbf{T}_t^{(a)} = \mathbb{D}_t \mathbf{E}_t, \tag{9.187}$$

para la componente tangente, donde $\mathbb{D}_t$ es el tensor de cuarto orden dado por

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_t = {} & D_{1111}(\mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)}) + D_{2222}(\mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(2)}) \\ & + D_{1122}(\mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(2)}) + D_{1122}(\mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)}) \\ & + D_{1212}(\mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(2)}) + D_{1212}(\mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(1)}) \\ & + D_{1212}(\mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(1)}) + D_{1212}(\mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(2)}), \end{aligned} \tag{9.188}$$

y

$$\mathbf{T}_s^{(a)} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{T}_s^{(a)} = 2(\mathbb{D}_s \mathbf{E}_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbb{D}_s \mathbf{E}_s), \tag{9.189}$$

para las componentes transversales, donde $\mathbb{D}_s$ es un tensor de segundo orden dado por

$$\mathbb{D}_s = D_{1n1n}(\mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)}) + D_{2n2n}(\mathbf{e}_{(2)} \otimes \mathbf{e}_{(2)}). \tag{9.190}$$

Sumando las expresiones (9.187) y (9.189) obtenemos la relación constitutiva $\mathbf{T}^{(a)} = \mathbb{D}\mathbf{E}$ para un material ortotrópico que es compatible con el modelo de Naghdi.

Para obtener la ecuación constitutiva inversa, $\mathbf{E} = \mathbb{D}^{-1}\mathbf{T}^{(a)}$, es necesario invertir (9.187) y (9.189). Esto conduce a

$$\mathbf{E}_t = \mathbb{A}_t \mathbf{T}_t^{(a)}, \tag{9.191}$$

donde $\mathbb{A}_t = \mathbb{D}_t^{-1}$ y

$$\mathbf{E}_s \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{E}_s = \frac{1}{2}(\mathbb{A}_s \mathbf{T}_s^{(a)} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbb{A}_s \mathbf{T}_s^{(a)}). \tag{9.192}$$

donde $\mathbb{A}_s = \mathbb{D}_s^{-1}$.

Para un material ortotrópico, las componentes de los tensores $\mathbb{A}_t$ y $\mathbb{A}_s$ son tales que las siguientes relaciones son satisfechas

$$\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \\ E_{1n} \\ E_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{I\!E_1} & -\frac{\nu_{12}}{I\!E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{I\!E_1} & \frac{1}{I\!E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I\!G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I\!G_{1n}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I\!G_{2n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11}^{(a)} \\ T_{22}^{(a)} \\ T_{12}^{(a)} \\ T_{1n}^{(a)} \\ T_{2n}^{(a)} \end{pmatrix}, \tag{9.193}$$

donde hemos hecho uso de que $D_{11nn} = D_{22nn} = 0$ (ver (9.185)). De (9.193) las componentes de $\mathbb{A}_t$ y $\mathbb{A}_s$ resultan evidentes. Aquí $I\!E_1$ y $I\!E_2$ son, respectivamente, los módulos de Young en las direcciones $\mathbf{e}_{(1)}$ y $\mathbf{e}_{(2)}$. A su vez $I\!G_{12}$, $I\!G_{1n}$ y $I\!G_{2n}$ son los módulos de rigidez transversales, y ν_{12} y ν_{21} son los coeficientes de Poisson. Aquí tenemos que tener presente que la identidad $\frac{\nu_{12}}{I\!E_2} = \frac{\nu_{21}}{I\!E_1}$ debe verificarse para satisfacer la condición de simetría para $\mathbf{T}^{(a)}$. En efecto, tenemos las siguientes simetrías para $\mathbb{A}$, $A_{1212} = A_{2112} = A_{2121} = A_{1221}$.

Ahora, haciendo uso de (9.191) y de (9.192) en (9.179) la función de energía de deformación complementaria está dada por

$$W^*(\mathbf{T}^{(a)}) = \frac{1}{2}(\mathbb{A}_t \mathbf{T}_t^{(a)} \cdot \mathbf{T}_t^{(a)} + \mathbb{A}_s \mathbf{T}_s^{(a)} \cdot \mathbf{T}_s^{(a)}), \tag{9.194}$$

y substituyendo esto en (9.177) obtenemos el funcional $\Pi^*(\mathbf{T}^{(a)}, \mathbf{E})$ (que nos permitiría calcular la función de energía de deformación (9.176)) para un material ortotrópico con restricciones internas tales que $\mathbf{E} \in \mathscr{W}_{\mathscr{C}}$, con $\mathscr{W}_{\mathscr{C}}$ como definido en (9.172), y que está dado por

$$\Pi^*(\mathbf{T}^{(a)}, \mathbf{E}) = \int_{\Sigma_o} \int_H \left[\mathbf{T}^{(a)} \cdot \mathbf{E} - \frac{1}{2}(\mathbb{A}_t \mathbf{T}_t^{(a)} \cdot \mathbf{T}_t^{(a)} + \mathbb{A}_s \mathbf{T}_s^{(a)} \cdot \mathbf{T}_s^{(a)}) \right] \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_o. \tag{9.195}$$

Este funcional establece (a través del proceso de máximo) la relación constitutiva entre el estado de tensión $\mathbf{T}^{(a)}$ y el estado de deformación $\mathbf{E}$. Sin embargo, para el modelo de cáscara que estamos considerando es necesario que el funcional anterior sea escrito en función de las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{Q}$ y las deformaciones generalizadas dadas por ε, χ y ψ. Para poder hacer esto necesitamos escribir $\mathbf{T}_t$ y $\mathbf{T}_s$ en función de $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{Q}$, algo que no conocemos a priori. De acuerdo con (9.60) sólo sabemos la relación inversa entre estas variables. Esto nos obliga a obtener aproximaciones para $\mathbf{T}_t$ y $\mathbf{T}_s$ tales que las definiciones (9.60) sean satisfechas.

La primera hipótesis que vamos a considerar es suponer que $\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\det\Lambda$ sea una función lineal en ξ a lo largo del espesor de la cáscara $[-\frac{h}{2},\frac{h}{2}]$. Luego, en este caso tenemos la siguiente forma para $\mathbf{T}_t$

$$\mathbf{T}_t = \frac{\Lambda}{\det\Lambda}\left[\frac{1}{h}\mathbf{N}_t + \varsigma\frac{6}{h^2}\mathbf{M}_t\right] \quad \text{donde} \quad \varsigma = \frac{\xi}{h/2}. \tag{9.196}$$

La segunda hipótesis es suponer que $\Lambda^{-1}\mathbf{T}_s\det\Lambda$ es una función parabólica en ξ a lo largo del espesor de la cáscara, obteniendo así la siguiente expresión

$$\mathbf{T}_s = \frac{\Lambda}{\det\Lambda}\left[\frac{3}{2h}(1-\varsigma^2)\mathbf{Q} - \frac{1}{4}(\Lambda^{-1}\det\Lambda)^+(1-2\varsigma-3\varsigma^2)\mathbf{f}_t^+ + \frac{1}{4}(\Lambda^{-1}\det\Lambda)^-(1+2\varsigma-3\varsigma^2)\mathbf{f}_t^-\right]. \tag{9.197}$$

donde, recuerde, $(\cdot)^\pm$ es emplado para representar el valor de $(\cdot)$ evaluado en $\xi = \pm\frac{h}{2}$.

Aquí es importante observar que la expresión (9.197) evaluada en $\varsigma = \pm 1$ toma el valor $\mathbf{T}_s|_{\varsigma=\pm1} = \mathbf{f}_t^\pm$, satisfaciendo así las condiciones de contorno en la cara superior e inferior de la cáscara.

Otra observación que debe ser hecha es que, dentro de esta teoría, $\mathbf{T}_t$ no resulta un tensor simétrico por lo que, en el caso general, la solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange dentro del modelo de Naghdi escritas en función de las aproximaciones presentadas para $\mathbf{T}_t$ y $\mathbf{T}_s$ puede no existir (ver [71]).

Ahora, observe que de (9.169) la potencia interna toma la forma

$$\mathbf{T}^{(a)}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{T}_t\cdot(\varepsilon+\xi\chi)\Lambda^{-1} + \mathbf{T}_s\cdot\frac{1}{2}\Lambda^{-1}\psi. \tag{9.198}$$

Haciendo uso de (9.196), (9.197) y (9.198) en (9.195) obtenemos el funcional Π^* en función de los esfuerzos y deformaciones generalizadas del modelo de cáscara, es decir obtenemos $\Pi^* = \Pi^\star(\mathbf{N}_t,\mathbf{M}_t,\mathbf{Q},\varepsilon,\chi,\psi)$. La condición necesaria (y para el caso en estudio suficiente) de la condición de máximo (ver (9.176)) corresponde a hacer nula la primera variación de Gâteaux del funcional Π^* (que designaremos con $\delta\Pi^*$) cuando, para un estado de deformación generalizada ε,χ,ψ perturbamos este funcional en las direcciones $\delta\mathbf{N}_t$, $\delta\mathbf{M}_t$ y $\delta\mathbf{Q}$. En particular, esta variación de Gâteaux resulta

$$\delta\Pi^* = -\int_{\Sigma_o}\Bigg[\left(\frac{1}{h^2}\overline{\mathbb{A}}_t^0\mathbf{N}_t + \frac{12}{h^4}\overline{\mathbb{A}}_t^1\mathbf{M}_t - \boldsymbol{\varepsilon}\right)\cdot\delta\mathbf{N}_t + \left(\frac{12}{h^4}\overline{\mathbb{A}}_t^1\mathbf{N}_t + \frac{144}{h^6}\overline{\mathbb{A}}_t^2\mathbf{M}_t - \boldsymbol{\chi}\right)\cdot\delta\mathbf{M}_t + \left(\overline{\mathbb{A}}_s\mathbf{Q} - \overline{\mathbb{A}}_s^+\mathbf{f}_t^+ + \overline{\mathbb{A}}_s^-\mathbf{f}_t^- - \boldsymbol{\psi}\right)\cdot\delta\mathbf{Q}\Bigg]\,d\Sigma_o, \quad (9.199)$$

donde los tensores $\overline{\mathbb{A}}_t^k$, $k=0,1,2$, $\overline{\mathbb{A}}_s$, $\overline{\mathbb{A}}_s^+$ y $\overline{\mathbb{A}}_s^-$ pueden ser llamados *tensores inversos generalizados de elasticidad*.

Por un lado, estos tensores $\overline{\mathbb{A}}_t^k$, $k=0,1,2$ quedan definidos en notación intrínseca por su aplicación sobre tensores de segunda orden arbitrarios, digamos $\mathbf{S}$, definidos en la superficie media de la cáscara

$$\overline{\mathbb{A}}_t^k\mathbf{S} = \int_H [\mathbb{A}_t(\mathbf{S}\boldsymbol{\Lambda})]\boldsymbol{\Lambda}\frac{\xi^k}{\det\boldsymbol{\Lambda}}\,d\xi \qquad k=0,1,2. \quad (9.200)$$

Con esto, no resulta difícil obtener las componentes de estos tensores

$$[\overline{\mathbb{A}}_t^k]_{\alpha\mu\gamma\rho} = \int_H [\mathbb{A}_t]_{\alpha\beta\gamma\delta}[\boldsymbol{\Lambda}]_{\rho\delta}[\boldsymbol{\Lambda}]_{\beta\mu}\frac{\xi^k}{\det\boldsymbol{\Lambda}}\,d\xi \qquad k=0,1,2, \quad (9.201)$$

donde debemos recordar que $[\boldsymbol{\Lambda}]_{\rho\delta} = \delta_{\rho\delta} + \xi[\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\rho\delta}$, siendo $\delta_{\rho\delta}$ el delta de Kronecker.

Por otro lado, $\overline{\mathbb{A}}_s$, $\overline{\mathbb{A}}_s^+$ y $\overline{\mathbb{A}}_s^-$ resultan caracterizados por

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{A}}_s &= \frac{9}{4h^2}\int_H (1-\varsigma^2)^2\frac{\boldsymbol{\Lambda}\mathbb{A}_s\boldsymbol{\Lambda}}{\det\boldsymbol{\Lambda}}\,d\xi,\\
\overline{\mathbb{A}}_s^+ &= \frac{3}{8h}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\det\boldsymbol{\Lambda})^+\int_H (1-\varsigma^2)(1-2\varsigma-3\varsigma^2)\frac{\boldsymbol{\Lambda}\mathbb{A}_s\boldsymbol{\Lambda}}{\det\boldsymbol{\Lambda}}\,d\xi,\\
\overline{\mathbb{A}}_s^- &= \frac{3}{8h}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\det\boldsymbol{\Lambda})^-\int_H (1-\varsigma^2)(1+2\varsigma-3\varsigma^2)\frac{\boldsymbol{\Lambda}\mathbb{A}_s\boldsymbol{\Lambda}}{\det\boldsymbol{\Lambda}}\,d\xi.
\end{aligned} \quad (9.202)$$

Claramente, el máximo del funcional Π^* es alcanzado cuando la primera variación de Gâteax (9.199) se anula para todo $\delta\mathbf{N}_t$, $\delta\mathbf{M}_t$ y $\delta\mathbf{Q}$. Obtenemos así las ecuaciones constitutivas que relacionan las deformaciones generalizadas en función de las tensiones generalizadas y que están dadas por

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{h^2}\overline{\mathbb{A}}_t^0\mathbf{N}_t + \frac{12}{h^4}\overline{\mathbb{A}}_t^1\mathbf{M}_t,\\
\boldsymbol{\chi} &= \frac{12}{h^4}\overline{\mathbb{A}}_t^1\mathbf{N}_t + \frac{144}{h^6}\overline{\mathbb{A}}_t^2\mathbf{M}_t,\\
\boldsymbol{\psi} &= \overline{\mathbb{A}}_s\mathbf{Q} - \overline{\mathbb{A}}_s^+\mathbf{f}_t^+ + \overline{\mathbb{A}}_s^-\mathbf{f}_t^-.
\end{aligned} \quad (9.203)$$

Las ecuaciones constitutivas obtenidas en (9.203) son llamadas *exactas* porque ninguna hipótesis relacionada con la relación $\frac{h}{R_m}$ (donde R_m es el menor radio de curvatura de la cáscara) ha sido incorporada durante su deducción.

En lo que sigue vamos a obtener ecuaciones constitutivas donde incorporamos aproximaciones resultantes de suponer $\frac{h}{R_m} \ll 1$. Para ello usaremos la identidad

$$\det \boldsymbol{\Lambda} = 1 + \xi \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \xi^2 \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}). \tag{9.204}$$

Como $\xi \in [-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ y siendo $R_m = \min\{R_1, R_2\}$ el menor de los radios principales de curvatura de la cáscara (R_1 y R_2 son los autovalores de $\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$) el siguiente resultado se verifica

$$|\xi \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \xi^2 \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})| < \frac{h}{R_m} + \frac{h^2}{4R_m^2}. \tag{9.205}$$

Introduciendo ahora la hipótesis de cáscaras finas, $\frac{h}{R_m} \ll 1$ tenemos $|\xi \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \xi^2 \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})| \ll 1$. Luego podemos expandir la inversa del determinante de $\boldsymbol{\Lambda}$ como sigue

$$(\det \boldsymbol{\Lambda})^{-1} = 1 - \xi \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \xi^2 \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \xi^2 (\operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^2 + \mathscr{O}\left(\frac{h^3}{R^3}\right). \tag{9.206}$$

Tenemos así

$$\xi \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} = \mathscr{O}\left(\frac{h}{R_m}\right) \quad \xi \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) = \mathscr{O}\left(\frac{h}{R_m}\right) \quad \xi^2 \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) = \mathscr{O}\left(\frac{h^2}{R_m^2}\right). \tag{9.207}$$

Introduciendo (9.206) en (9.202), considerando que las propiedades del material son constantes a lo largo del espesor de la cáscara (es decir $\mathbb{D} = \mathbb{D}(\mathbf{x}_o)$ y $\mathbb{A} = \mathbb{A}(\mathbf{x}_o)$), despreciando los términos de orden $\mathscr{O}(\frac{h^3}{R_m^3})$ y, finalmente, integrando en el espesor de la cáscara, obtenemos las siguientes expresiones aproximadas para los tensores generalizados $\overline{\mathbb{A}}_s$, $\overline{\mathbb{A}}_s^+$ y $\overline{\mathbb{A}}_s^-$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{A}}_s = \frac{6}{5h}\Bigg[\mathbb{A}_s + \frac{h^2}{28}\big((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s) \\ + ((\operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^2 - \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))\mathbb{A}_s\big)\Bigg],\end{aligned} \tag{9.208}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mathbb{A}}_s^+ = \frac{3}{8h}(\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\det\boldsymbol{\Lambda})^+\Bigg[\frac{4h}{15}\mathbb{A}_s - \frac{2h^2}{15}\big(\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s - \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s\big) \\ - \frac{h^3}{105}\big((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s) \\ + ((\operatorname{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^2 - \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))\mathbb{A}_s\big)\Bigg],\end{aligned} \tag{9.209}$$

$$\overline{\mathbb{A}}_s^{-} = \frac{3}{8h}(\Lambda^{-1}\det\Lambda)^{-}\left[\frac{4h}{15}\mathbb{A}_s + \frac{2h^2}{15}\left(\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s - \mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s\right)\right.$$
$$- \frac{h^3}{105}\left((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\mathbb{A}_s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbb{A}_s)\right.$$
$$\left.\left. + ((\mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^2 - \det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))\mathbb{A}_s\right)\right]. \quad (9.210)$$

Procediendo de manera análoga con (9.206) en (9.201), obtenemos las siguientes expresiones aproximadas para los tensores $\overline{\mathbb{A}}_t^k$, $k = 0,1,2$

$$[\overline{\mathbb{A}}_t^0]_{\alpha\mu\gamma\rho} = [\mathbb{A}_t]_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[h\delta_{\rho\delta}\delta_{\mu\beta} + \frac{h^3}{12}\left([\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\rho\delta}[\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\beta\mu}\right.\right.$$
$$- \mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\delta_{\rho\delta}[\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\beta\mu} + [\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\rho\delta}\delta_{\beta\mu})$$
$$\left.\left. - (\det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^2)\delta_{\rho\delta}\delta_{\mu\beta}\right)\right], \quad (9.211)$$

$$[\overline{\mathbb{A}}_t^1]_{\alpha\mu\gamma\rho} = [\mathbb{A}_t]_{\alpha\beta\gamma\delta}\frac{h^3}{12}\left[\delta_{\rho\delta}[\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\beta\mu} + [\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\rho\delta}\delta_{\beta\mu} - \mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\delta_{\rho\delta}\delta_{\mu\beta}\right], \quad (9.212)$$

$$[\overline{\mathbb{A}}_t^2]_{\alpha\mu\gamma\rho} = [\mathbb{A}_t]_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\frac{h^3}{12}\delta_{\rho\delta}\delta_{\mu\beta} + \frac{h^5}{80}\left([\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\rho\delta}[\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\beta\mu}\right.\right.$$
$$- \mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\delta_{\rho\delta}[\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\beta\mu} + [\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}]_{\rho\delta}\delta_{\beta\mu})$$
$$\left.\left. - (\det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^2)\delta_{\rho\delta}\delta_{\mu\beta}\right)\right]. \quad (9.213)$$

Las expresiones (9.208)-(9.210) y (9.211)-(9.213) caracterizan el comportamiento constitutivo de un material ortotrópico con restricciones internas consistentes con el modelo de Naghdi. Estas expresiones pueden ser explicitadas aun más si consideramos que la base $(\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{n})$ (para la cual hemos obtenido la representación de los tensores inversos generalizados de elasticidad) es tal que los vectores $\mathbf{e}_{(1)}$ y $\mathbf{e}_{(2)}$ son paralelos a las direcciones principales de curvatura de la cáscara. En tal caso obtenemos

$$\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2} \end{pmatrix}, \quad (9.214)$$

donde como ya mencionamos R_1 y R_2 son, respectivamente, los radios principales de curvatura de la cáscara en las direcciones $\mathbf{e}_{(1)}$ y $\mathbf{e}_{(2)}$. En este caso tenemos $\det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) = \frac{1}{R_1R_2}$ y $\mathrm{tr}\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Incorporando esto en (9.208)-(9.210) y (9.211)-(9.213) y luego en (9.203) obtenemos

$$
\begin{aligned}
[\varepsilon]_{11} &= \frac{1}{I\!E_1 h}\left[\left(1+\frac{h^2}{12R_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right)[\mathbf{N}_t]_{11} - \nu_{21}[\mathbf{N}_t]_{22} - \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)[\mathbf{M}_t]_{11}\right],\\
[\varepsilon]_{22} &= \frac{1}{I\!E_2 h}\left[\left(1+\frac{h^2}{12R_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right)[\mathbf{N}_t]_{22} - \nu_{12}[\mathbf{N}_t]_{11} - \left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)[\mathbf{M}_t]_{22}\right],\\
[\varepsilon]_{12} &= \frac{1}{I\!G_{12} h}\left[\left(1+\frac{h^2}{12R_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right)[\mathbf{N}_t]_{12} + [\mathbf{N}_t]_{21} - \left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)[\mathbf{M}_t]_{12}\right],\\
[\varepsilon]_{21} &= \frac{1}{I\!G_{12} h}\left[\left(1+\frac{h^2}{12R_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right)[\mathbf{N}_t]_{21} + [\mathbf{N}_t]_{12} - \left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)[\mathbf{M}_t]_{21}\right],
\end{aligned}
\tag{9.215}
$$

$$
\begin{aligned}
[\chi]_{11} &= \frac{12}{I\!E_1 h^3}\left[\left(1+\frac{3h^2}{20R_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right)[\mathbf{M}_t]_{11} - \nu_{21}[\mathbf{M}_t]_{22} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)[\mathbf{N}_t]_{11}\right],\\
[\chi]_{22} &= \frac{12}{I\!E_2 h^3}\left[\left(1+\frac{3h^2}{20R_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right)[\mathbf{M}_t]_{22} - \nu_{12}[\mathbf{M}_t]_{11} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)[\mathbf{N}_t]_{22}\right],\\
[\chi]_{12} &= \frac{12}{I\!G_{12} h^3}\left[\left(1+\frac{3h^2}{20R_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right)[\mathbf{M}_t]_{12} + [\mathbf{M}_t]_{21} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)[\mathbf{N}_t]_{12}\right],\\
[\chi]_{21} &= \frac{12}{I\!G_{12} h^3}\left[\left(1+\frac{3h^2}{20R_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right)[\mathbf{M}_t]_{21} + [\mathbf{M}_t]_{12} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)[\mathbf{N}_t]_{21}\right],
\end{aligned}
\tag{9.216}
$$

$$
\begin{aligned}
[\psi]_1 &= \frac{1}{I\!G_{1n} h}\left[\frac{6}{5}[\mathbf{Q}]_1\left(1+\frac{h^2}{28R_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right) - \frac{h^2}{20}[\mathbf{p}_t]_1\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{5}[\mathbf{m}_t]_1\left(1-\frac{h^2}{28R_2}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\right)\right],\\
[\psi]_2 &= \frac{1}{I\!G_{2n} h}\left[\frac{6}{5}[\mathbf{Q}]_2\left(1+\frac{h^2}{28R_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right) - \frac{h^2}{20}[\mathbf{p}_t]_2\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right.\\
&\quad \left. - \frac{1}{5}[\mathbf{m}_t]_2\left(1-\frac{h^2}{28R_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right)\right].
\end{aligned}
\tag{9.217}
$$

En las expresiones anteriores las componentes $[\varepsilon]_{ij}$, $[\chi]_{ij}$, $[\psi]_i$, $[\mathbf{N}_t]_{ij}$, $[\mathbf{M}_t]_{ij}$, $[\mathbf{Q}]_i$, $[\mathbf{p}_t]_i$, $[\mathbf{m}_t]_i$, $i,j=1,2$ son las respectivas componentes en las direcciones dadas por $\mathbf{e}_{(1)}$ y $\mathbf{e}_{(2)}$.

9.6.3 Modelos con Hipótesis de Kirchhoff-Love

En esta sección vamos a desarrollar una teoría similar a la anterior pero ahora aplicada a los otros modelos de cáscaras baseados en el modelo de Kirchhoff-Love. Para las hipótesis cinemáticas dadas por (9.86)-(9.87), y bajo la hipótesis de pequeñas deformaciones y desplazamientos, tenemos que las deformaciones generalizadas correspondientes a esos modelos resultan dadas por

$$\begin{aligned}
\varepsilon^L &= (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{u}_t^o))^s + u_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n},\\
\chi^L &= (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\theta_t^{KL}))^s,\\
\chi^K &= (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\theta_t^{KL}))^s + ((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{u}_t^o))^s + u_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2,\\
\chi^S &= (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\theta_t^{KL}))^s + ((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Xi_t^o)^s,
\end{aligned} \tag{9.218}$$

donde $\Xi_t^o = (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{u}_t^o))^a$. Recordando las componentes de $\mathbf{E}$, para los modelos baseados en las hipótesis de Kirchhoff-Love tenemos que $\mathbf{E}_s = \Pi_t\mathbf{E}\mathbf{n} = \mathbf{0}$ (es decir $E_{1n} = E_{2n} = 0$) y $E_n = \mathbf{E}\mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = 0$. Luego, y de la misma manera que en la sección anterior, usando la base $(\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{n})$, identificamos tres restricciones internas que están asociadas a los siguientes subespacios

$$\begin{aligned}
\mathscr{W}_{\mathscr{C}_1} &= \{\mathbf{E}\in\mathscr{W}, \mathbf{E}\cdot(\mathbf{e}_{(1)}\otimes\mathbf{n}) = 0\},\\
\mathscr{W}_{\mathscr{C}_2} &= \{\mathbf{E}\in\mathscr{W}, \mathbf{E}\cdot(\mathbf{e}_{(2)}\otimes\mathbf{n}) = 0\},\\
\mathscr{W}_{\mathscr{C}_3} &= \{\mathbf{E}\in\mathscr{W}, \mathbf{E}\cdot(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}) = 0\}.
\end{aligned} \tag{9.219}$$

Así, para toda deformación admisible con el modelo de Kirchhoff-Love, el tensor $\mathbf{E}$ debe satisfacer

$$\mathbf{E}\in\mathscr{W}_\cap \quad \text{con} \quad \mathscr{W}_\cap = \mathscr{W}_{\mathscr{C}_1}\cap\mathscr{W}_{\mathscr{C}_2}\cap\mathscr{W}_{\mathscr{C}_3}. \tag{9.220}$$

Nuevamente asociando los elementos $\mathbf{T}\in W'$ con el espacio de los campos tensoriales simétricos, lo mismo ocurrirá con las componentes del estado de tensiones activo del material. Es decir, $\mathbf{T}^{(a)}\in\mathscr{W}_\cap$, por lo que

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{(a)} &= \mathbf{T}_t^{(a)},\\
\mathbf{T}^{(r)} &= \mathbf{T}_s^{(r)}\otimes\mathbf{n} + \mathbf{n}\otimes\mathbf{T}_s^{(r)} + T_n^{(r)}(\mathbf{n}\otimes\mathbf{n}),
\end{aligned} \tag{9.221}$$

donde $\mathbf{T}_t = \mathbf{T}_t^{(a)}$, $\mathbf{T}_s = \mathbf{T}_s^{(r)}$ y $T_n = T_n^{(r)}$. Por lo tanto, en este caso tendremos $\mathbf{T}^{(a)} = \mathbb{D}\mathbf{E}$, con $\mathbf{E}\in\mathscr{W}_\cap$ y $\mathbb{D}:\mathscr{W}_\cap\to\mathscr{W}_\cap$. Por su vez, el grupo de simetría para este material está dado por la colección de todos los tensores $\mathbf{Q}\in Orth$ tales que

$$\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T\in\mathscr{W}_\cap \quad \text{y} \quad \mathbf{Q}\mathbf{T}^{(a)}\mathbf{Q}^T = \mathbb{D}[\mathbf{Q}\mathbf{E}\mathbf{Q}^T] \quad \forall\mathbf{E}\in\mathscr{W}_\cap. \tag{9.222}$$

En lo que sigue vamos a usar la misma metodología presentada en la Sección 9.6.2 para realizar la derivación de las ecuaciones constitutivas generalizadas para los modelos basados en las hipótesis de Kirchhoff-Love. Tenemos así

$$\mathbf{T}_t^{(a)} = \mathbb{D}_t\mathbf{E}_t, \tag{9.223}$$

y su relación inversa

$$\mathbf{E}_t = \mathbb{A}_t\mathbf{T}_t^{(a)}. \tag{9.224}$$

Como en la sección anterior, estas relaciones están dadas por

$$\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11}^{(a)} \\ T_{22}^{(a)} \\ T_{12}^{(a)} \end{pmatrix}, \tag{9.225}$$

mientras que el funcional $\Pi^*(\mathbf{T}^{(a)}, \mathbf{E})$, como definido en la Sección 9.6.2, resulta

$$\Pi^*(\mathbf{T}^{(a)}, \mathbf{E}) = \int_{\Sigma_o} \int_H \left[\mathbf{T}_t^{(a)} \cdot \mathbf{E}_t - \frac{1}{2} (\mathbb{A}_t \mathbf{T}_t^{(a)} \cdot \mathbf{T}_t^{(a)}) \right] \det \Lambda \, d\xi \, d\Sigma_o. \tag{9.226}$$

De la misma forma que en la sección anterior, aquí introduciremos la aproximación de que la relación $\frac{h}{R_m}$ es suficientemente pequeña. Nuestro objetivo es encontrar las expresiones que caracterizan el tensor de tensiones $\mathbf{T}_t^A$ en función de los esfurezos generalizados $\mathbf{N}_t^A$ y $\mathbf{M}_t^A$, donde el índice $A = L, K, S$ representa respectivamente los modelos de Love, Koiter y Sanders. De la misma manera que antes, consideraremos que el tensor de tensiones $\mathbf{T}_t^A$ depende linealmente de ξ. Por lo tanto y para satisfacer las definiciones (9.120), (9.135) y (9.148) es necesario que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_t^L &= \left[\frac{1}{h} \mathbf{N}_t^L + \frac{6}{h^2} \varsigma \mathbf{M}_t^L \right], \\ \mathbf{T}_t^K &= \Lambda \left[\frac{1}{h} \mathbf{N}_t^K + \frac{6}{h^2} \varsigma \mathbf{M}_t^K \right] \frac{\Lambda}{\det \Lambda}, \\ \mathbf{T}_t^S &= \frac{\Lambda}{\det \Lambda} \left[\frac{1}{h} \mathbf{N}_t^S + \frac{6}{h^2} \varsigma \mathbf{M}_t^S \right], \end{aligned} \tag{9.227}$$

donde $\varsigma = \frac{\xi}{h/2}$. Ahora, introduciendo (9.227) en (9.226) resolvemos el problema de encontrar el máximo del funcional $\Pi^*(\mathbf{N}_t^A, \mathbf{M}_t^A, \varepsilon^L, \chi^A)$ haciendo $\delta\Pi^* = 0$, $\forall \delta\mathbf{N}_t^A, \delta\mathbf{M}_t^A$. Es importante resaltar aquí que ε^L es el mismo para los tres modelos que estamos estudiando. La solución de este problema conduce a las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \varepsilon^L &= \frac{1}{h^2} \widetilde{\mathbb{A}}_t^0 \mathbf{N}_t^A + \frac{12}{h^4} \widetilde{\mathbb{A}}_t^1 \mathbf{M}_t^A, \\ \chi^A &= \frac{12}{h^4} \widetilde{\mathbb{A}}_t^1 \mathbf{N}_t^A + \frac{144}{h^6} \widetilde{\mathbb{A}}_t^2 \mathbf{M}_t^A, \end{aligned} \tag{9.228}$$

donde los tensores $\widetilde{\mathbb{A}}_t^k$, $k = 0, 1, 2$ están definidos por

$$\widetilde{\mathbb{A}}_t^k = \int_H \mathbb{A}_t \xi^k \, d\xi \qquad k = 0, 1, 2. \tag{9.229}$$

Asumiendo que la propiedades del material son constantes en el espesor de la cáscara, podemos integrar (9.229) obteniendo

$$\widetilde{\mathbb{A}}_t^0 = h\mathbb{A}_t \quad \widetilde{\mathbb{A}}_t^1 = \mathbf{O} \quad \widetilde{\mathbb{A}}_t^2 = \frac{h^3}{12} \mathbb{A}_t. \tag{9.230}$$

Introduciendo este resultado en (9.228) obtenemos las ecuaciones constitutivas generalizadas

$$\begin{aligned} \varepsilon^L &= \frac{1}{h}\mathbb{A}_t \mathbf{N}_t^A \\ \chi^A &= \frac{12}{h^3}\mathbb{A}_t \mathbf{M}_t^A. \end{aligned} \tag{9.231}$$

Es importante notar aquí que, debido a las hipótesis introducidas durante la derivación de estas ecuaciones, las tensiones de membrana y de flexión resultan desacopladas en la ecuación constitutiva, al contrario de lo que ocurre en el modelo de Naghdi. De acuerdo con Koiter [155], el desacoplamiento de las tensiones de membrana y flexión a nivel de las ecuaciones constitutivas es compatible con la aproximación de primer orden realizada en las teorías de cáscaras delgadas.

Finalmente, usando la base $(\mathbf{e}_{(1)}, \mathbf{e}_{(2)}, \mathbf{n})$, las ecuaciones constitutivas (9.231) están dadas por

$$\begin{aligned} [\varepsilon^L]_{11} &= \frac{1}{I\!E_1 h}([\mathbf{N}_t^A]_{11} - \nu_{21}[\mathbf{N}_t^A]_{22}), \\ [\varepsilon^L]_{22} &= \frac{1}{I\!E_2 h}([\mathbf{N}_t^A]_{22} - \nu_{12}[\mathbf{N}_t^A]_{11}), \\ [\varepsilon^L]_{12} &= \frac{2}{I\!G_{12} h}[\mathbf{N}_t^A]_{12} = [\varepsilon^L]_{21}, \end{aligned} \tag{9.232}$$

$$\begin{aligned} [\chi^A]_{11} &= \frac{12}{I\!E_1 h^3}([\mathbf{M}_t^A]_{11} - \nu_{21}[\mathbf{M}_t^A]_{22}), \\ [\chi^A]_{22} &= \frac{12}{I\!E_2 h^3}([\mathbf{M}_t^A]_{22} - \nu_{12}[\mathbf{M}_t^A]_{11}), \\ [\chi^A]_{12} &= \frac{24}{I\!G_{12} h^3}[\mathbf{M}_t^A]_{12} = [\chi^A]_{21}. \end{aligned} \tag{9.233}$$

9.7 Principales Características de los Modelos

En esta sección vamos a estudiar tres aspectos relevantes relacionados con los modelos de cáscaras estudiados

- la relación entre las tensiones generalizadas correspondientes a cada modelo;
- la consistencia de los modelos con respecto a lo que es conocido en la literatura como *equilibrio alrededor de la normal*;
- el cálculo de las tensiones reactivas correspondientes a cada modelo.

9.7.1 Relación entre Tensiones Generalizadas

Aquí vamos a presentar la relación entre la tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$, $\mathbf{N}_t^K$, $\mathbf{M}_t^K$, $\mathbf{N}_t^S$ y $\mathbf{M}_t^S$ descriptas en las secciones anteriores. Para hacer esto consideremos primero que la inversa de Λ puede ser escrita de la siguiente forma

$$\Lambda^{-1} = \mathbf{I} - \xi\,(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}, \tag{9.234}$$

que conduce a la siguiente expansión en potencias de ξ (ver también (9.324))

$$\Lambda^{-1} = \mathbf{I} - \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} + \xi^2(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2 - \ldots + (-1)^n\xi^n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^n\Lambda^{-1}. \tag{9.235}$$

Substituyendo (9.234) en (9.135) y haciendo uso de (9.235) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_t^K &= \int_H \mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\det\Lambda\, d\xi - \int_H (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t\xi\,(\mathbf{I} - \mathscr{O}(\tfrac{h}{R}))\det\Lambda d\xi,\\
\mathbf{M}_t^K &= \int_H (\mathbf{I} - \mathscr{O}(\tfrac{h}{R}))\mathbf{T}_t\xi\Lambda^{-1}\det\Lambda d\xi.
\end{aligned} \tag{9.236}$$

Despreciando los términos de orden $\mathscr{O}(\frac{h}{R})$ y observando que, por definición, sólo la parte simétrica del tensor $\mathbf{M}_t$ interviene en el modelo de Koiter, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_t^K &= \mathbf{N}_t - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\mathbf{M}_t)^T,\\
\mathbf{M}_t^K &= (\mathbf{M}_t)^s.
\end{aligned} \tag{9.237}$$

Por otro lado, vimos en la Sección 9.5.6 que

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_t^S &= (\mathbf{N}_t)^s,\\
\mathbf{M}_t^S &= (\mathbf{M}_t)^s.
\end{aligned} \tag{9.238}$$

Para relacionar $\mathbf{N}_t^K$, $\mathbf{M}_t^K$ con $\mathbf{N}_t^S$ y $\mathbf{M}_t^S$ observamos por la simetría de $\mathbf{N}_t^K$ y de (9.236) que, sin despreciar los términos de orden $\mathscr{O}(\frac{h}{R})$, podemos escribir

$$\mathbf{N}_t^K = \int_H (\mathbf{T}_t\Lambda^{-1})^s\det\Lambda d\xi - \int_H ((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\mathbf{T}_t\Lambda^{-1})^s\xi\det\Lambda d\xi. \tag{9.239}$$

Ahora, combinando (9.135), (9.148) y (9.237) con la expresión (9.239), las tensiones generalizadas en el modelo de Sanders resultan

$$\begin{aligned}
\mathbf{N}_t^S &= \mathbf{N}_t^K + ((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^K)^s,\\
\mathbf{M}_t^S &= \mathbf{M}_t^K.
\end{aligned} \tag{9.240}$$

9.7.2 Equilibrio Alrededor de la Normal

En esta sección vamos a analizar un aspecto importante en la teoría de cáscaras relacionado con el equilibrio alrededor de la normal que resulta de las hipótesis cinemáticas usadas en cada modelo. Desde un punto de vista tridimensional, donde ninguna hipótesis de cáscara ha sido incorporada, esta ecuación es automáticamente satisfecha por la propia simetría del tensor de Cauchy, lo que asegura el equilibrio alrededor de ejes ortonormales. Sin embargo, y debido a las hipótesis y aproximaciones existentes en los modelos estudiados, este equilibrio debe ser verificado. A continuación estudiaremos cada modelo.

9.7.2.1 Modelo de Kirchhoff-Love

En primer lugar, y como ya observado, $\mathbf{v}_t^o$ es un vector en el plano tangente y $\mathbf{n}$ es el vector normal a la superficie media de la cáscara, tenemos así

$$(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{v}_t^o = -(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)^T\mathbf{n}, \tag{9.241}$$

y ω_t^{KL} dado por (9.88) puede ser escrito como

$$\omega_t^{KL} = -(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)^T\mathbf{n} - \nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o. \tag{9.242}$$

Introduciendo (9.242) la expresión (9.105) del PPV, obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \big[&\mathbf{N}_t\cdot(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o) + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) \\ &- \mathbf{M}_t\cdot((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)^T(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\Pi_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)\mathbf{n} + \nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o)\big]d\Sigma_o.\end{aligned} \tag{9.243}$$

Luego, teniendo en cuenta que $\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} = \Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})$, resulta

$$(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)^T(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) = (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)^T\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) = (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^T(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}). \tag{9.244}$$

Descomponiendo $\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)$ en sus partes simétricas y antisimétricas, tenemos

$$\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o) = (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s + \Omega_t^o, \tag{9.245}$$

donde Ω_t^o ha sido definido en (9.144). Este tensor está asociado con el rotacional superficial del campo de velocidades $\mathbf{v}_t^o$, y representa la rotación alrededor del vector normal [232]. Usando (9.244) y (9.245) en (9.243) obtenemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \big[&\mathbf{N}_t\cdot((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^S + \Omega_t^o + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) \\ &- \mathbf{M}_t\cdot((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \Omega_t^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) \\ &+ (\Pi_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)\mathbf{n} + \nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o)\big]\,d\Sigma_o.\end{aligned} \tag{9.246}$$

Tomando la parte de la potencia interna virtual asociada con Ω_t^o en la expresión (9.246), y observando que la potencia externa virtual asociada a Ω_t^o es nula, obtenemos el equilibrio alrededor del vector normal

$$\int_{\Sigma_o} (\mathbf{N}_t + \mathbf{M}_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})) \cdot \Omega_t^o d\Sigma_o = 0 \quad \forall \Omega_t^o \in \mathscr{W}^a, \tag{9.247}$$

donde

$$\mathscr{W}^a = \{\Omega_t^o \in \mathscr{W}, \Omega_t^o = (\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^a, (\mathbf{v}_t^o, 0) \in \mathrm{Var}_v\}. \tag{9.248}$$

Aquí es importante resaltar que, como $\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)$ es un campo tensorial definido en el plano tangente, $\mathscr{W}^a$ no es otra cosa que el subespacio de los tensores antisimétricos definidos en dicho plano.

Finalmente, de (9.247) concluimos que el equilibrio alrededor de la normal puede ser escrito de la siguiente forma

$$(\mathbf{N}_t + \mathbf{M}_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^a = \mathbf{O}. \tag{9.249}$$

Para verificar esto recordemos las definiciones de $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{M}_t$ dadas en (9.60), a su vez tengamos presente que $(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})$. Luego, podemos verificar lo siguiente

$$\begin{aligned}(\mathbf{N}_t + \mathbf{M}_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^a = \int_H (\mathbf{T}_t\Lambda^{-1} + \xi\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^a \det\Lambda d\xi = \\ \int_H (\mathbf{T}_t(\mathbf{I} + \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1})^a \det\Lambda d\xi = \int_H (\mathbf{T}_t)^a \det\Lambda d\xi = \mathbf{O}.\end{aligned} \tag{9.250}$$

El resultado anterior nos muestra que la teoría exacta de Kirchhoff-Love satisface automáticamente el equilibrio alrededor de la normal.

9.7.2.2 Modelo de Love

Siguiendo los mismos pasos que realizamos en la sección anterior, podemos ver que el equilibrio alrededor de la normal en el modelo de Love toma una forma similar a la expresión (9.249), pero ahora con $\mathbf{N}_t^L$ y $\mathbf{M}_t^L$ en lugar de $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{M}_t$

$$(\mathbf{N}_t^L + \mathbf{M}_t^L(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^a = \mathbf{O}. \tag{9.251}$$

Para verificar esta ecuación y recordando la definición de las tensiones generalizadas en el modelo de Love dadas en (9.120) obtenemos

$$(\mathbf{N}_t^L + \mathbf{M}_t^L(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^a = \int_H (\mathbf{T}_t + \xi\mathbf{T}_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}))^a d\xi = \int_H (\mathbf{T}_t\Lambda)^a d\xi. \tag{9.252}$$

Como podemos apreciar de la (9.252), la ecuación de equilibrio alrededor de la normal para el modelo de Love dada por la (9.251) no se verifica en general. Sin

embargo, debemos notar que, para los siguientes casos particulares, este equilibrio se cumple: (i) placas donde tenemos $\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} = \mathbf{O}$, (ii) para cáscaras esféricas donde tenemos $\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} = \frac{1}{R}\Pi_t$ (R es el radio de curvatura de la esfera) y (iii) cáscaras con simetría de revolución tanto en lo que se refiere a su geometría como a las cargas aplicadas.

9.7.2.3 Modelo de Koiter

En este caso descomponemos el tensor $\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)$ en su parte simétrica $(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s$ y su parte antisimétrica Ω_t^o, como indicado en (9.245). Luego, la potencia virtual interna dada por (9.136) puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \big[&\mathbf{N}_t^K\cdot((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s + \Omega_t^o + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\\ &-\mathbf{M}_t^K\cdot((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \Omega_t^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\Pi_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)\mathbf{n}\\ &+\nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Omega_t^o - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})(\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s - v_n^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2\big]d\Sigma_o. \quad (9.253)\end{aligned}$$

Como realizado en las secciones anteriores, vamos a limitarnos a estudiar la potencia interna virtual asociada a la rotación alrededor de la normal, es decir $\Omega_t^o \in \mathscr{W}^a$. La expresión análoga a (9.247) pero ahora restringida al modelo de Koiter conduce a

$$\int_{\Sigma_o}(\mathbf{N}_t^K + \mathbf{M}_t^K(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^K)\cdot\Omega_t^o d\Sigma_o = 0 \quad \forall\Omega_t^o \in \mathscr{W}^a, \quad (9.254)$$

donde $\mathscr{W}^a$ es como indicado en (9.248). Luego, las ecuaciones de Euler-Lagrange que expresan el equilibrio alrededor de la normal toman la forma

$$(\mathbf{N}_t^K + \mathbf{M}_t^K(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^K)^a = \mathbf{O}. \quad (9.255)$$

Como los tensores $\mathbf{N}_t^K$, $\mathbf{M}_t^K$ y $\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$ son simétricos, la ecuación (9.255) se verifica, estableciendo que el modelo de Koiter (al igual que el modelo de Kirchhoff-Love) también satisface el equilibrio alrededor de la normal.

9.7.2.4 Modelo de Sanders

En este caso, nuevamente, vamos a descomponer el tensor $\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)$ en sus partes simétrica y antisimétrica (ver (9.245)). A su vez, y haciendo uso de la potencia interna asociada al modelo de Sanders dada por (9.147), introduciendo en esta expresión las tensiones generalizadas del modelo dadas en (9.148) y la descomposición de $\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)$ tenemos

$$\int_{\Omega} \mathbf{T}\cdot(\nabla\mathbf{v})^s d\Omega = \int_{\Sigma_o} \big[\mathbf{N}_t^S\cdot((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^s + \Omega_t^o + v_n^o\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \mathbf{M}_t^S\cdot((\Pi_t(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o))^S(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \Omega_t^o(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\Pi_t\nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{v}_t^o)\mathbf{n} + \nabla_{\mathbf{x}_o}\nabla_{\mathbf{x}_o}v_n^o - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Omega_t^o)\big]d\Sigma_o. \quad (9.256)$$

La parte de la potencia interna asociada con $\Omega_t^o \in \mathscr{W}^a$ está dada por

$$\int_{\Sigma_o} (\mathbf{N}_t^S + \mathbf{M}_t^S(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^S)\cdot\Omega_t^o d\Sigma_o = 0 \quad \forall\Omega_t^o \in \mathscr{W}^a, \quad (9.257)$$

donde $\mathscr{W}^a$ fue definido en (9.248). Finalmente, las ecuaciones de Euler-Lagrange correspondientes al equilibrio alrededor de la normal pueden ser escritas de la siguiente forma

$$(\mathbf{N}_t^S + \mathbf{M}_t^S(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\mathbf{M}_t^S)^a = \mathbf{O}. \quad (9.258)$$

De las definiciones de $\mathbf{N}_t^S$ and $\mathbf{M}_t^S$ dadas en (9.148), y observando la simetría de $\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$, concluimos que (9.258) también es satisfecha en el modelo de Sanders. De esta manera, y de la misma forma que en el modelo de Koiter, el modelo de Sanders es consistente en el sentido de que el equilibrio alrededor de la normal se verifica, no obstante la aproximación introducida por medio de la cual se desconsideran los términos de orden $\mathscr{O}(\frac{h}{R})$.

9.7.3 Tensiones Generalizadas Reactivas

Los modelos de cáscaras estudiados en este capítulo introducen un conjunto de hipótesis cinemáticas que permitieron reducir la dimensión del dominio donde el problema está definido. En efecto, estos modelos permiten pasar de un problema mecánico originalmente definido en un dominio tridimensional para otro definido en un dominio bidimensional correspondiente a la superficie media de la cáscara. Surge así una nueva pregunta que es la de saber cuando un modelo de cáscara es adecuado para el problema en estudio. Evidentemente, la respuesta a esta pregunta depende de la propia geometría del cuerpo así como de las cargas a la cual está sometido.

Por otra parte, una vez escogido un modelo, otra cuestión que surge es saber cuan lejos de la realidad este modelo se encuentra. Con el objetivo de proporcionar herramientas para responder a esta cuestión, debemos como mínimo evaluar los términos que han sido desconsiderados en la expresión de la potencia interna debido a la introducción de las hipótesis cinemáticas asociadas al modelo de cáscara escogido. Luego, un paso importante para establecer el grado de confiabilidad en el modelo adoptado consiste en establecer expresiones para medir la magnitud de las tensiones generalizadas reactivas (que no toman parte en el equilibrio por tener potencia nula para toda deformación generalizada admisible) cuando las mismas son comparadas con el nivel de las tensiones generalizadas activas. Si estas reacciones

son significativas esto puede ser un indicador de que el modelo de cáscara no es adequado para aproximar el problema real tridimensional.

En las secciones siguientes vamos a obtener expresiones que nos permiten evaluar estas tensiones generalizadas reactivas para los modelos basados en las hipótesis de Naghdi y de Kirchhoff-Love. Para ello vamos a tratar de obtener expresiones aproximadas para estas tensiones empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la solución del problema variacional definido en (9.165) adaptado a cada modelo de cáscara en estudio.

9.7.3.1 Reacciones en el Modelo de Naghdi

La teoría asociada al modelo de Naghdi desarrollada en la Sección 9.5.2 juntamente con la derivación de las ecuaciones constitutivas asociadas a este modelo (ver 9.6.2) permite caracterizar el PPV para este modelo (ver (9.80)). Como ya mencionamos, una vez que este problema de equilibrio es resuelto obtenemos las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{Q}$.

El cálculo de la tensión reactiva en el modelo de Naghdi consiste en obtener una expresión para T_n. Como es una tensión reactiva ella debe ser calculada una vez obtenido el equilibrio de la cáscara y por lo tanto una vez conocido su estado de tensiones $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{Q}$. Para esto, como ya fue mencionado, será necesario resolver un nuevo problema de equilibrio donde ahora la deformación normal está permitida y, de esta manera, la potencia asociada a T_n no es nula. Este nuevo problema está dado por la ecuación variacional correspondiente a un cuerpo tridimensional pero escrito haciendo uso de la geometría de una cáscara y dado por (9.52). Haciendo uso de esta ecuación variacional, donde ahora el único campo a determinar es T_n, obtenemos las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange para tal incógnita T_n

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi}(T_n \det \Lambda) = (\mathbf{T}_t \Lambda^{-1} \det \Lambda) \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) \\ \qquad\qquad - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}(\Lambda^{-1} \mathbf{T}_s \det \Lambda) - b_n \det \Lambda & \text{en } \Sigma_o, \\ T_n = f_n^+ & \text{en } \xi = \frac{h}{2}, \\ T_n = -f_n^- & \text{en } \xi = -\frac{h}{2}. \end{cases} \tag{9.259}$$

Este problema de valor de contorno, escrito en función de la coordenada en el sentido del espesor de la cáscara ξ, es un sistema de ecuaciones de primer orden que admite una solución única si las tensiones $\mathbf{T}_t$ y $\mathbf{T}_s$ fueron obtenidas de un problema variacional también tridimensional pero donde fueron introducidas las hipótesis cinemáticas (9.69)-(9.70) (ver [69]). Integrando $(9.259)_1$ y haciendo uso de $(9.259)_3$ obtenemos lo siguiente para T_n

$$\begin{aligned} T_n &= -f_n^- \\ &\quad + \frac{1}{\det \Lambda} \int_{-\frac{h}{2}}^{\xi} \left[(\mathbf{T}_t \Lambda^{-1} \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}) - b_n) \det \Lambda - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}(\Lambda^{-1} \mathbf{T}_s \det \Lambda) \right] d\zeta. \end{aligned} \tag{9.260}$$

Esta es la expresión exacta para T_n correspondiente a las hipótesis cinemáticas de Naghdi que, como podemos apreciar, satisface automáticamente la condición de contorno en $\xi = -\frac{h}{2}$. No obstante esto, la solución del equilibrio de una cáscara no proporciona las tensiones $\mathbf{T}_t$ y $\mathbf{T}_s$, sino que proporciona las tensiones generalizadas que, para el Modelo de Naghdi, están dadas por $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{Q}$. Luego, es interesante obtener la aproximación de T_n en función de estas tensiones generalizadas. Esta aproximación puede ser obtenida introduciendo en la expresión anterior (9.260) las expresiones (aproximadas) que hemos obtenido para $\mathbf{T}_t$ and $\mathbf{T}_s$ en función de estas tensiones generalizadas (ver (9.196) y (9.197)). Haciendo esto, e integrando en el espesor de la cáscara, obtenemos la siguiente expresión aproximada para T_n en función de las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t$, $\mathbf{M}_t$ y $\mathbf{Q}$, y de las cargas generalizadas f_n^-, $\mathbf{f}_t^+$, $\mathbf{f}_t^-$ y b_n

$$\begin{aligned} T_n = -f_n^- - \frac{1}{\det\Lambda}\Bigg[& \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{1}{4}\mathbf{Q}(2+3\varsigma-\varsigma^3)\right) \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{8}(\Lambda^{-1}\det\Lambda)^+\mathbf{f}_t^+(\varsigma^3+\varsigma^2-\varsigma-1)\right) \\ & - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{8}(\Lambda^{-1}\det\Lambda)^-\mathbf{f}_t^-(\varsigma^3-\varsigma^2-\varsigma+1)\right) \\ & - \left(\frac{1}{2}\mathbf{N}_t(\varsigma+1)+\frac{3}{2h}\mathbf{M}_t(\varsigma^2-1)\right)\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \int_{-\frac{h}{2}}^{\xi} b_n \det\Lambda\, d\zeta\Bigg], \end{aligned} \tag{9.261}$$

donde $\varsigma = \frac{\xi}{h/2}$. Esta expresión aproximada para T_n satisface la condición de contorno en $\xi = -\frac{h}{2}$. Vamos a verificar ahora si la condición de contorno en $\xi = \frac{h}{2}$ es satisfecha. Para calcular el valor de T_n en $\xi = \frac{h}{2}$ vamos a recordar la definición de la carga generalizada p_{bn}, definida en (9.64), obtenemos así

$$T_n|_{\xi=\frac{h}{2}} = -f_n^- - \frac{1}{(\det\Lambda)^+}\left[\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{Q} - \mathbf{N}_t\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + p_{bn}\right]. \tag{9.262}$$

Como $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{Q}$ son soluciones del Modelo de Naghdi, podemos substitutir $(9.82)_2$ en (9.262) para obtener

$$T_n|_{\xi=\frac{h}{2}} = f_n^+ + \left[\frac{(\det\Lambda)^-}{(\det\Lambda)^+} - 1\right] f_n^-, \tag{9.263}$$

donde hemos hecho uso de la definición de la fuerza generalizada p_n dada en (9.64).

Analizando la expresión (9.263) observamos que, como fue necesario introducir aproximaciones en su derivación, la tensión reactiva T_n no satisface en general la condición de contorno $(9.259)_2$. No obstante esto, es importante notar que para el caso en que $f_n^- = 0$, para el caso de placas (donde $\Lambda = \mathbf{I}$) y para el caso de cáscaras finas (cuando despreciamos los términos de orden $\mathscr{O}(\frac{h}{R_m})$) la expresión que hemos obtenido es consistente con la condición de contorno $(9.259)_2$.

9.7.3.2 Reacciones en el Modelo de Kirchhoff-Love

La teoría de Kirchhoff-Love desarrollada en las Secciones 9.5.3 y 9.6.3 nos llevó a las ecuaciones de equilibrio (9.111) y a las ecuaciones constitutivas generalizadas (9.228). La solución del problema de equilibrio (9.111) nos permite evaluar las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t$ y $\mathbf{M}_t$.

De las hipótesis cinemáticas correspondientes a la teoría de Kirchhoff-Love (y sus modelos derivados), obtener las tensiones generalizadas reactivas consistirá en calcular las tensiones $\mathbf{T}_s$ y T_n que dentro de este modelo tienen potencia interna nula. Así, el procedimiento que seguiremos para evaluar estas dos tensiones reactivas seguirá básicamente los mismos pasos realizados en la sección anterior. Para esto, y como ya fue mencionado, será necesario resolver un nuevo problema de equilibrio donde ahora las deformación normal y cizallante están ahora permitidas y, de esta manera, la potencia asociada a T_n y $\mathbf{T}_s$ pueden ser evaluadas. Este nuevo problema está dado por la misma ecuación variacional que vimos en la sección anterior correspondiente a un cuerpo tridimensional pero escrito haciendo uso de la geometría de una cáscara y dado por (9.52). Haciendo uso de esta ecuación variacional, donde ahora los únicos campos a determinar son T_n y $\mathbf{T}_s$, es posible obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada campo. Primeramente, para $\mathbf{T}_s$ estas ecuaciones resultan

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi}(\mathbf{T}_s \det \Lambda) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1}\mathbf{T}_s \det \Lambda = \\ \qquad\qquad -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{T}_t \Lambda^{-1}\det\Lambda) - \mathbf{b}_t \det\Lambda & \text{en } \Sigma_o, \\ \mathbf{T}_s = \mathbf{f}_t^+ & \text{en } \xi = \frac{h}{2}, \\ \mathbf{T}_s = -\mathbf{f}_t^- & \text{en } \xi = -\frac{h}{2}. \end{cases} \tag{9.264}$$

El mismo comentario realizado en la sección anterior vale también aquí. Esto es, no obstante el sistema ser de primer orden en la variable ξ con dos condiciones de contorno, la solución existe siempre que el campo $\mathbf{T}_t$ sea la solución del problema variacional de un cuerpo tridimensional con las hipótesis de Kirchhoff-Love (9.86)-(9.87) (ver [69]). Ahora bien, dado que $\Lambda = \mathbf{I} + \xi \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$, podemos reescribir la ecuación $(9.264)_1$, de la siguiente forma

$$\Lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial \xi}(\Lambda \mathbf{T}_s \det\Lambda) = -\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\det\Lambda) - \mathbf{b}_t\det\Lambda \quad \text{en } \Sigma_o. \tag{9.265}$$

Integrando esta expresión en el espesor de la cáscara y usando $(9.264)_3$ obtenemos la expresión exacta para $\mathbf{T}_s$

$$\mathbf{T}_s = -\mathbf{f}_t^- - \frac{\Lambda^{-1}}{\det\Lambda}\int_{-\frac{h}{2}}^{\xi} \Lambda\left[\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}(\mathbf{T}_t\Lambda^{-1}\det\Lambda) + \mathbf{b}_t\det\Lambda\right] d\zeta. \tag{9.266}$$

De la misma manera, las ecuaciones de Euler-Lagrange para T_n son exactamente las mismas que mostramos en (9.259). Estas ecuaciones permiten obtener la expresión exacta dada por (9.260). En este caso, $\mathbf{T}_t$ debe corresponder a la solución

del problema tridimensional donde hemos incorporado las hipótesis de Kirchhoff-Love mientras que $\mathbf{T}_s$ es el valor de la tensión reactiva obtenida en (9.266).

Ahora vamos a proceder de la misma manera que en la sección anterior substituyendo $\mathbf{T}_t$ por su expresión (aproximada) en función de las tensiones generalizadas de los modelos que estamos estudiando. En particular, vamos a trabajar con el modelo de Love dado que los otros modelos tienen en común el mismo orden de aproximación en función de la relación $\frac{h}{R}$. En otras palabras, los resultados que vamos a presentar podrán ser extendidos para los modelos de Koiter y de Sanders directamente.

Para simplificar la presentación vamos a considerar por simplicidad que $\mathbf{b}_t = b_n\mathbf{n} = \mathbf{0}$. También, como en el modelo de Love (al igual que en el de Koiter y Sanders) la aproximación está relacionada con la suposición $\frac{h}{R} \ll 1$, y por lo tanto adoptamos $\Lambda \simeq \mathbf{I}$ y $\det\Lambda \simeq 1$.

En lo que sigue, primero vamos a derivar una expresión aproximada para $\mathbf{T}_s$. Haciendo uso de las consideraciones anteriores, la expresión (9.266) se simplifica como sigue

$$\mathbf{T}_s = -\mathbf{f}_t^- - \int_{-\frac{h}{2}}^{\xi} \left[\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{T}_t + \zeta(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{T}_t\right] d\zeta. \tag{9.267}$$

Substituyendo la aproximación para $\mathbf{T}_t$ dada por $(9.227)_1$ (la correspondiente al modelo de Love), e integrando (9.267) en el espesor de la cáscara, obtenemos la expresión de $\mathbf{T}_s$ en función de las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t^L$ y $\mathbf{M}_t^L$ y de la carga generalizada $\mathbf{f}_t^-$

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_s = -\mathbf{f}_t^- - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{1}{2}\mathbf{N}_t^L(\varsigma+1) + \frac{3}{2h}\mathbf{M}_t^L(\varsigma^2-1)\right)\\ - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{8}\mathbf{N}_t^L(\varsigma^2-1) + \frac{1}{2}\mathbf{M}_t^L(\varsigma^3+1)\right),\end{aligned} \tag{9.268}$$

que satisface automáticamente la condición de contorno en $\xi = -\frac{h}{2}$ (o sea $\varsigma = -1$). Por otro lado, para $\xi = \frac{h}{2}$ obtenemos

$$\mathbf{T}_s|_{\xi=\frac{h}{2}} = -\mathbf{f}_t^- - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{N}_t^L - (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t, \tag{9.269}$$

y usando $(9.113)_1$ se tiene

$$\mathbf{T}_s|_{\xi=\frac{h}{2}} = -\mathbf{f}_t^- + \mathbf{p}_t^{KL}. \tag{9.270}$$

Luego, haciendo uso de la definición de la fuerza generalizada $\mathbf{p}_t^{KL}$, recordando que $\mathbf{b}_t = \mathbf{0}$ y $b_n = 0$, y haciendo $\Lambda\det\Lambda \simeq \mathbf{I}$, la expresión (9.270) nos permite obtener

$$\mathbf{T}_s|_{\xi=\frac{h}{2}} = \mathbf{f}_t^+. \tag{9.271}$$

Concluimos así que la expresión aproximada para la tensión reactiva $\mathbf{T}_s$ satisface también la condición de contorno en la cara opuesta de la cáscara dada por $(9.264)_2$.

Veamos ahora la aproximación para T_n. Con las consideraciones mencionadas anteriormente, la ecuación (9.260) resulta en

$$T_n = -f_n^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\xi} \left[\mathbf{T}_t \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{T}_s\right] d\zeta. \tag{9.272}$$

Introduciendo $(9.227)_1$ y (9.268) en (9.272) obtenemos

$$\begin{aligned} T_n = -f_n^- + \int_{-\frac{h}{2}}^{\xi} \Bigg[& \left(\frac{1}{h}\mathbf{N}_t^L + \frac{6}{h^2}\mathbf{M}_t^L\varpi\right)\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{f}_t^- \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{1}{2}\mathbf{N}_t^L(\varpi+1) + \frac{3}{2h}\mathbf{M}_t^L(\varpi^2-1)\right) \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{8}\mathbf{N}_t^L(\varpi^2-1) + \frac{1}{2}\mathbf{M}_t^L(\varpi^3+1)\right)\right)\Bigg] d\zeta, \end{aligned} \tag{9.273}$$

donde $\varpi = \frac{\zeta}{h/2}$. Llevando en cuenta el orden de aproximacón de este modelo, la siguiente expresión se verifica

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{1}{2}\mathbf{N}_t^L(\varpi+1)\right) + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{8}\mathbf{N}_t^L(\varpi^2-1)\right) \simeq \\ \frac{1}{2}(\varpi+1)\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{N}_t^L. \end{aligned} \tag{9.274}$$

Usando esta expresión en (9.273), reordenando términos, e integrando en el espesor de la cáscara, obtenemos la caracterización para T_n en función de las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t^L$ y $\mathbf{M}_t^L$ y de las fuerzas generalizadas f_n^- y $\mathbf{f}_t^-$

$$\begin{aligned} T_n = -f_n^- + & \left(\frac{1}{2}\mathbf{N}_t^L(\varsigma+1) + \frac{3}{2h}\mathbf{M}_t^L(\varsigma^2-1)\right)\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{2}\mathbf{f}_t^-(\varsigma+1)\right) \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{8}\mathbf{N}_t^L(\varsigma^2+2\varsigma+1) + \frac{1}{4}\mathbf{M}_t^L(\varsigma^3-3\varsigma-2)\right) \\ & + \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left((\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\frac{h}{16}(\varsigma^4+4\varsigma+3)\mathbf{M}_t^L\right)\right). \end{aligned} \tag{9.275}$$

Nuevamente esta expresión satisface la condición de contorno en la cara $\xi = -\frac{h}{2}$. Para la cara $\xi = \frac{h}{2}$ la expresión anterior conduce a

$$\begin{aligned} T_n\big|_{\xi=\frac{h}{2}} = -f_n^- + \mathbf{N}_t^L\cdot(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) - \operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^L + h\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{f}_t^- \\ + \frac{h}{2}\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\left(\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{N}_t^L + (\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\operatorname{div}_{\mathbf{x}_o}\mathbf{M}_t^L\right). \end{aligned} \tag{9.276}$$

Observando que $\mathbf{N}_t^L$ y $\mathbf{M}_t^L$ satisfacen $(9.113)_1$ y $(9.113)_2$ obtenemos

$$T_n|_{\xi=\frac{h}{2}} = -f_n^- + p_n^{KL} + h\,\mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\,\mathbf{f}_t^- - \frac{h}{2}\,\mathrm{div}_{\mathbf{x}_o}\,\mathbf{p}_t^{KL}. \tag{9.277}$$

Finalmente, de las definiciones de $\mathbf{p}_t^{KL}$ y p_n^{KL} obtenemos

$$T_n|_{\xi=\frac{h}{2}} = f_n^+. \tag{9.278}$$

Nuevamente, vemos que en esta teoría la tensión reactiva satisface la condición de contorno en la cara superior de la cáscara. Esto nos dice que la aproximación propuesta es consistente con la condición de contorno $(9.259)_2$ válida para el problema exacto de T_n.

Finalmente, la derivación de las expresiones aproximadas para las tensiones reactivas en función de las tensiones generalizadas $\mathbf{N}_t^L$ and $\mathbf{M}_t^L$ resultaron de la solución de las eccuaciones de equilibrio asociadas con la primera aproximación de Love. No obstante esto, y dado que los modelos de Koiter y Sanders poseen el mismo orden de aproximación en términos de la relación $\frac{h}{R}$, en las expresiones para $\mathbf{T}_s$ y T_n (ver las ecuaciones (9.268) y (9.275)), $\mathbf{N}_s^L$ y $\mathbf{M}_s^L$ pueden ser substituidos por sus similares asociados a los modelos de Koiter o de Sanders, es decir por $(\mathbf{N}_s^K, \mathbf{M}_s^K)$ o por $(\mathbf{N}_s^S, \mathbf{M}_s^S)$.

9.8 Nociones Básicas sobre Superficies

9.8.1 Preliminares

Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^2$. Por simplicidad en este conjunto Ω vamos a considerar que hemos adoptado un sistema ortogonal de coordenadas $\{0, \xi^\alpha, \alpha = 1,2\}$ siendo su base dada por los vectores unitarios $\mathbf{e}_\alpha$, $\alpha = 1,2$. Luego, cada punto $\xi \in \Omega$ puede ser caracterizado por $\xi = \xi^\alpha \mathbf{e}_\alpha$. Decimos que la función (aplicación) vectorial $\phi : \xi \in \Omega \mapsto \mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ es de clase $\mathscr{C}^1$ si ϕ y sus derivdas parciales $\phi_\alpha = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^\alpha}$, $\alpha = 1,2$, son todas continuas. De la misma manera decimos que ϕ es de clase $\mathscr{C}^k$, $k \geq 2$, si ϕ y todas sus derivadas parciales hasta el orden k son continuas. En particular, decimos que ϕ es *suave* si es de clase $\mathscr{C}^k$ para todo número entero positivo k. Un aspecto fundamental en la geometría diferencial es que si ϕ es de clase $\mathscr{C}^k$, $k \geq 2$, se verifica que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2 \partial \xi^1}$ (y algo similar vale para las derivadas parciales de mayor orden). Con estos elementos en manos podemos introducir la siguiente definición.

Diremos que una función vectorial suave $\phi : \xi \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbf{X} \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ es una *parametrización de la superficie* $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ constituida por todos los puntos $\mathbf{X}$ tales que $\mathbf{X} = \phi(\xi)$ con $\xi \in \Omega$, ver Figura 9.13, si

1. ϕ es un mapeamiento uno-a-uno (inyectivo), es decir, a todo punto en Σ le corresponde un único punto en Ω;

2. las derivadas parciales $\phi_{\xi^1}(\xi_o) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^1}|_{\xi_o}$ y $\phi_{\xi^2}(\xi_o) = \frac{\partial \phi}{\partial \xi^2}|_{\xi_o}$ son linealmente independientes para todo punto $\xi_o = (\xi_o^1, \xi_o^2) \in \Omega$.

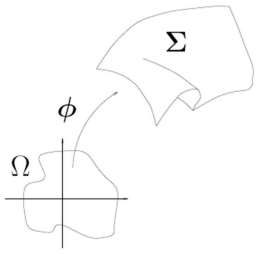


Fig. 9.13 Parametrización de una superficie.

De esta manera, una familia de rectas ortogonales paralelas a las direcciones $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ en Ω son transformadas a través de la parametrización ϕ en las curvas ξ^1-curva y ξ^2-curva sobre la superficie Σ, conforme muestra la Figura 9.14, definiendo así lo que podríamos llamar *coordenadas curvilíneas* sobre la superficie. Como para cada punto $\mathbf{X} = \phi(\xi)$ los vectores ϕ_{ξ^1} y ϕ_{ξ^2} son linealmente independientes, podemos definir en cada punto $\mathbf{X}$ de Σ el (único) plano tangente $P_t(\mathbf{X})$ caracterizado por su normal unitaria $\mathbf{n}(\mathbf{X})$ que, para la parametrización ϕ, está definida por

$$\mathbf{n}(\mathbf{X}) = \frac{\phi_{\xi^1} \times \phi_{\xi^2}}{\|\phi_{\xi^1} \times \phi_{\xi^2}\|}. \tag{9.279}$$

Es importante observar aquí que al proceder de esta forma estamos también *orientando* la superficie Σ.

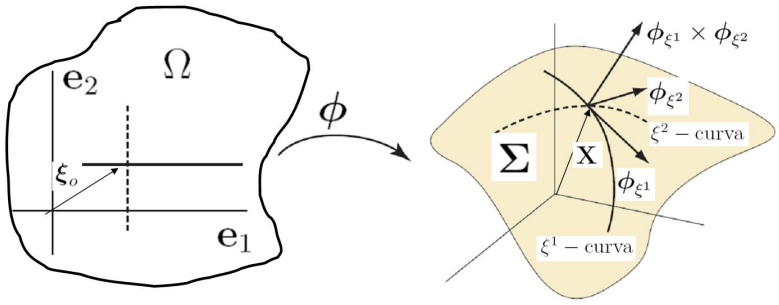


Fig. 9.14 Plano tangente y su normal. Sistema intrínseco de coordenadas de una superficie

Con estos elementos en mano, podemos definir para toda superficie regular (suave) un sistema intrínseco de coordenadas caracterizado en cada punto de la

superficie por (i) su plano tangente, y (ii) su normal, que es independiente de la parametrización utilizada para definir la superficie. Justamente fue la propiedad de independencia de este sistema intrínseco que nos llevó a presentar la teoría de cáscaras desarrollada en este capítulo. En particular, la base $\{P_t(\mathbf{X}), \mathbf{n}(\mathbf{X})\}$ (que para una dada parametrización ϕ está dada por la terna $\{\phi_{\xi^1}, \phi_{\xi^2}, \mathbf{n}\}$), es una base para el espacio vectorial $\mathscr{V}$ asociado al espacio Euclidiano puntual $\mathbb{R}^3$.

9.8.2 Primera Forma Fundamental

En esta sección y en las dos siguientes vamos a estudiar el comportamiento del producto escalar de vectores infinitesimales en el plano tangente y en su dirección normal a este plano en función del elemento diferencial $d\xi \in \Omega$.

Para esto es interesante observar que, dada una parametrización ϕ de una superficie Σ, si bien los vectores ϕ_{ξ^1} y ϕ_{ξ^2} son linealmente independientes, definiendo una base para el plano tangente, $\{\phi_{\xi^1}, \phi_{\xi^2}\}$, en general no son ortogonales, ni mucho menos unitarios. Luego, la longitud (norma) de cualquier vector en este plano tangente expreso en función de una combinación lineal en esta base no podrá ser calculada empleando el *Teorema de Pitágoras* válido para una base ortonormal (ortogonal y unitária).

Para ver esto en detalle podemos, a partir de esta base, definir otra, $\{\phi^{\xi^1}, \phi^{\xi^2}\}$, que en el Capítulo 1 ha sido llamada *base dual*, y que está caracterizada por

$$\phi^{\xi^\alpha} \cdot \phi_{\xi^\beta} = \delta^\alpha_\beta \qquad \delta^\alpha_\beta = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta, \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases} \tag{9.280}$$

De esta manera, un vector $\mathbf{v}$ perteneciente al plano tangente ($\mathbf{v} \in P_t(\mathbf{X})$, $\mathbf{X} \in \Sigma$), puede ser expresado como combinación lineal de los vetores bases o de los vectores duales. Es decir

$$\mathbf{v} = v^\alpha \phi_{\xi^\alpha} = v_\alpha \phi^{\xi^\alpha}, \tag{9.281}$$

donde recuerde que el índice repetido indica suma sobre todos los valores que el índice puede tomar (es decir para $\alpha = 1,2$ y donde $v_\alpha = \mathbf{v} \cdot \phi_{\xi^\alpha}$ y $v^\alpha = \mathbf{v} \cdot \phi^{\xi^\alpha}$ son llamadas *componentes covariantes* y *componentes contravariantes*, respectivamente. A su vez, podemos verificar fácilmente que el producto escalar de vectores en el plano tangente, digamos $\mathbf{v}$ y $\mathbf{u}$, está dado por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = g_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = v^\alpha u_\alpha = v_\alpha u^\alpha, \tag{9.282}$$

donde

$$g_{\alpha\beta} = \phi_{\xi^\alpha} \cdot \phi_{\xi^\beta} \qquad g^{\alpha\beta} = \phi^{\xi^\alpha} \cdot \phi^{\xi^\beta}, \tag{9.283}$$

y donde, dada la simetría del producto escalar, resulta $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}$ y $g^{\alpha\beta} = g^{\beta\alpha}$. Es importante notar que como los vectores bases son campos vectoriales definidos sobre la superficie, los coeficientes $g_{\alpha\beta}$ (y por lo tanto $g^{\alpha\beta}$) son campos escalares

definidos sobre la superficie designados usualmente como

$$\begin{aligned} E(\xi) &= g_{11}(\xi) = \phi_{\xi^1}(\xi)\cdot\phi_{\xi^1}(\xi), \\ F(\xi) &= g_{12}(\xi) = \phi_{\xi^1}(\xi)\cdot\phi_{\xi^2}(\xi) = g_{21}(\xi), \\ G(\xi) &= g_{22}(\xi) = \phi_{\xi^2}(\xi)\cdot\phi_{\xi^2}(\xi). \end{aligned} \tag{9.284}$$

Evidentemente $E > 0$ y $G > 0$ y en general diferentes del valor unitario indicando que los vectores de la base del plano tangente no son vectores unitarios. Por otro lado, el campo F es el indicador de como las coordenadas curvilíneas intersectan en cada punto de la superficie. De hecho, si $F = 0$ las coordenadas curvilíneas son ortogonales. Si ahora adoptamos $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ obtenemos

$$\|\mathbf{v}\|^2 = g_{11}(v^1)^2 + 2g_{12}v^1v^2 + g_{22}(v^2)^2 = E(v^1)^2 + 2Fv^1v^2 + G(v^2)^2. \tag{9.285}$$

Luego, los coeficientes (campos) E, F y G pueden ser interpretados como los factores de corrección del teorema clásico de Pitágoras.

Repitiendo el análisis anterior, vamos a estudiar como se transforman vectores infinitesimales en Ω ($d\xi \in \Omega$) en vectores infinitesimales en Σ ($d\mathbf{X} \in P_t(\mathbf{X})$). Dada la parametrización ϕ esta tansformación toma la forma

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi^1}d\xi^1 + \frac{\partial\phi}{\partial\xi^2}d\xi^2 = \phi_{\xi^1}d\xi^1 + \phi_{\xi^2}d\xi^2. \tag{9.286}$$

La expresión anterior puede ser reescrita de manera compacta (independiente del sistema de coordenadas), introduciendo el campo tensorial $\nabla_\xi\phi(\xi)$ que pone en evidencia la relación entre un elemento diferencial $d\xi$ en $\xi \in \Omega$ y su correspondiente $d\mathbf{X} = d\mathbf{X}(\xi)$ en Σ mediante la parametrización ϕ

$$d\mathbf{X} = (\nabla_\xi\phi)d\xi. \tag{9.287}$$

Para el sistema de coordenadas adoptado en Ω resulta $d\xi = d\xi^1\mathbf{e}_1 + d\xi^2\mathbf{e}_2$. Substituyendo esta expresión en (9.287) es fácil verificar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \phi_{\xi^1} &= (\nabla_\xi\phi)\mathbf{e}_1, \\ \phi_{\xi^2} &= (\nabla_\xi\phi)\mathbf{e}_2. \end{aligned} \tag{9.288}$$

De estas expresiones obtenemos también la relación entre la longitud de un elemento infinitesimal en el plano tangente de la superficie y su correspondiente en el dominio Ω. De hecho, tenemos

$$\begin{aligned} \|d\mathbf{X}\|^2 = d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X} = (\nabla_\xi\phi)d\xi\cdot(\nabla_\xi\phi)d\xi = \\ (\nabla_\xi\phi)^T(\nabla_\xi\phi)d\xi\cdot d\xi = \mathbf{g}d\xi\cdot d\xi. \end{aligned} \tag{9.289}$$

conocida en la literatura como *Primera Forma Fundamental* de la superficie Σ y donde $\mathbf{g} = (\nabla_\xi\phi)^T(\nabla_\xi\phi)$ es llamado *tensor métrico* asociado a esta superficie. Por

definición, el tensor métrico es simétrico y sus componentes en la base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ están dadas por

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}\mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta = \mathbf{g}\mathbf{e}_\beta \cdot \mathbf{e}_\alpha = g_{\beta\alpha}. \tag{9.290}$$

Finalmente, llevando en cuenta que un elemento de área $d\Sigma$ en cada punto $\mathbf{X} \in \Sigma$ está relacionado con el correspondiente elemento de área $d\Omega$ a través de

$$d\Sigma = \sqrt{\det \mathbf{g}}\, d\Omega, \tag{9.291}$$

la integral en Σ de un campo escalar, vectorial o tensorial ψ definido en Σ puede ser calculada a través de la siguiente expresión

$$\int_\Sigma \psi(\mathbf{X}) d\Sigma = \int_\Omega \psi(\phi(\xi)) \sqrt{\det \mathbf{g}}\, d\Omega. \tag{9.292}$$

9.8.3 Segunda Forma Fundamental

Dada la superficie suave Σ, hemos visto que en todo punto $\mathbf{X} \in \Sigma$ está definido su plano tangente $P_t(\mathbf{X})$ y, en consecuencia, tenemos definido en cada punto $\mathbf{X}$ el vector unitario normal $\mathbf{n}(\mathbf{X})$. Como $\mathbf{n}(\mathbf{X})$ es unitario por definición, tenemos que el campo escalar $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}$ es constante (y unitario) en toda la superficie, luego

$$d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 2d\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\mathbf{n} \perp \mathbf{n} \quad \text{en todo punto } \mathbf{X} \in \Sigma. \tag{9.293}$$

En otras palabras $d\mathbf{n}(\mathbf{X})$ pertenece al plano tangente $P_t(\mathbf{X})$.

A su vez, de la definición del gradiente de un campo vectorial tenemos

$$d\mathbf{n} = (\nabla \mathbf{n}) d\mathbf{X}, \tag{9.294}$$

donde $\nabla \mathbf{n}$ es el gradiente (en relación a las coordenadas $\mathbf{X}$) del campo vectorial $\mathbf{n}$ en el punto $\mathbf{X}$ de Σ[1]. En particular, el campo tensorial $\nabla \mathbf{n}$ es llamado *tensor curvatura* de la superficie que tiene las siguientes propiedades. En primer lugar por ser $d\mathbf{X}$ un vector perteneciente al plano tangente en $\mathbf{X}$, $\nabla \mathbf{n}$ es un endomorfismo del plano tangente ya que transforma vectores en el plano tangente en vectores en el mismo plano. Por otro lado, el tensor curvatura es simétrico, es decir $\nabla \mathbf{n} = (\nabla \mathbf{n})^T$, o equivalentemente

$$(\nabla \mathbf{n})\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{n})\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in P_t(\mathbf{X}). \tag{9.295}$$

[1] Observe que este gradiente $\nabla \mathbf{n}$ en relación a las coordenadas $\mathbf{X}$ se corresponde con el tensor $\nabla_{\mathbf{x}_o} \mathbf{n}$ que hemos introducido a lo largo de este capítulo al estudiar los modelos mecánicos de cáscaras, y que expresa el gradiente del vector normal de la cáscara en relación a las coordenadas definidas sobre la superficie media de la cáscara Σ_o. En esta sección, hemos optado por no cargar la notación de forma innecesaria.

Para demostrar esto consideremos una parametrización suave $\phi : \xi \in \Omega \mapsto \mathbf{X} \in \Sigma$. Luego, podemos ver $\mathbf{n}$ ya no como una función de $\mathbf{X}$ y sí como una función de ξ, es decir $\mathbf{n}(\xi) = \mathbf{n}(\mathbf{X}(\xi))$. Entonces, la derivada parcial de $\mathbf{n}$ con respecto a ξ^α, $\alpha = 1,2$, puede ser calculada a través de la regla de la cadena

$$\mathbf{n}_{\xi^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi^\alpha} = (\nabla \mathbf{n}) \frac{\partial \phi}{\partial \xi^\alpha} = (\nabla \mathbf{n}) \phi_{\xi^\alpha}. \tag{9.296}$$

Por otro lado, y dado que ϕ_{ξ^α}, $\alpha = 1,2$, pertenece al plano tangente $P_t(\mathbf{X})$, resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \phi_{\xi^\alpha} &= 0, \\ \mathbf{n} \cdot \phi_{\xi^\beta} &= 0. \end{aligned} \tag{9.297}$$

Derivando la primera respecto a ξ^β y la segunda respecto a ξ^α obtenemos, respectivamente

$$\mathbf{n}_{\xi^\beta} \cdot \phi_{\xi^\alpha} + \mathbf{n} \cdot \phi_{\xi^\alpha \xi^\beta} = 0, \tag{9.298}$$

$$\mathbf{n}_{\xi^\alpha} \cdot \phi_{\xi^\beta} + \mathbf{n} \cdot \phi_{\xi^\beta \xi^\alpha} = 0, \tag{9.299}$$

así, por ser ϕ una parametrización suave, tenemos $\phi_{\xi^\alpha \xi^\beta} = \phi_{\xi^\beta \xi^\alpha}$. Esto, y las expresiones anteriores nos permiten obtener

$$\mathbf{n}_{\xi^\beta} \cdot \phi_{\xi^\alpha} = \mathbf{n}_{\xi^\alpha} \cdot \phi_{\xi^\beta}, \tag{9.300}$$

la cual, haciendo uso de (9.296), puede ser reescrita de la siguiente forma

$$(\nabla \mathbf{n}) \phi_{\xi^\beta} \cdot \phi_{\xi^\alpha} = (\nabla \mathbf{n}) \phi_{\xi^\alpha} \cdot \phi_{\xi^\beta}. \tag{9.301}$$

Luego, dados $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores arbitrarios en el plano tangente en $\mathbf{X}$ tenemos

$$\begin{aligned} (\nabla \mathbf{n}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{n})(u^\alpha \phi_{\xi^\alpha}) \cdot (v^\beta \phi_{\xi^\beta}) = (\nabla \mathbf{n}) \phi_{\xi^\alpha} \cdot \phi_{\xi^\beta} u^\alpha v^\beta = \\ (\nabla \mathbf{n}) \phi_{\xi^\beta} \cdot \phi_{\xi^\alpha} u^\alpha v^\beta = (\nabla \mathbf{n})(v^\beta \phi_{\xi^\beta}) \cdot (u^\alpha \phi_{\xi^\alpha}) = (\nabla \mathbf{n}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \end{aligned} \tag{9.302}$$

con lo que demostramos la simetría del tensor curvatura.

Por otro lado, observando la expresión (9.296), podemos expresar el tensor curvatura en función de sus componentes en la base natural ($\{\phi_{\xi^1}, \phi_{\xi^2}, \mathbf{n}\}$) o en su base dual ($\{\phi^{\xi^1}, \phi^{\xi^2}, \mathbf{n}\}$). De hecho, teniendo presente que este tensor es un endomorfismo del plano tangente tenemos

$$\nabla \mathbf{n} = \mathbf{n}_{\xi^\alpha} \otimes \phi^{\xi^\alpha}, \tag{9.303}$$

y sus componentes están dadas por

$$[\nabla \mathbf{n}]^\beta_{\cdot\alpha} = -b^\beta_{\cdot\alpha} = (\nabla \mathbf{n}) \phi_{\xi^\alpha} \cdot \phi^{\xi^\beta} = \mathbf{n}_{\xi^\alpha} \cdot \phi^{\xi^\beta}, \tag{9.304}$$

$$[\nabla \mathbf{n}]_{\beta\alpha} = -b_{\beta\alpha} = (\nabla \mathbf{n})\boldsymbol{\phi}_{\xi^\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\xi^\beta} = \mathbf{n}_{\xi^\alpha} \cdot \boldsymbol{\phi}_{\xi^\beta}, \tag{9.305}$$

donde el signo negativo es introducido para adoptar la convención establecida en la literatura. Luego

$$\nabla \mathbf{n} = -b^{\beta}_{\cdot\alpha}(\boldsymbol{\phi}_{\xi^\beta} \otimes \boldsymbol{\phi}^{\xi^\alpha}) = -b_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\phi}^{\xi^\beta} \otimes \boldsymbol{\phi}^{\xi^\alpha}), \tag{9.306}$$

y recordando (9.296) tenemos también

$$\mathbf{n}_{\xi^\alpha} = -b^{\beta}_{\cdot\alpha}(\boldsymbol{\phi}_{\xi^\beta} \otimes \boldsymbol{\phi}^{\xi^\alpha})\boldsymbol{\phi}_{\xi^\alpha} = -b^{\beta}_{\cdot\alpha}\boldsymbol{\phi}_{\xi^\beta}, \tag{9.307}$$

$$\mathbf{n}_{\xi^\alpha} = -b_{\beta\alpha}(\boldsymbol{\phi}^{\xi^\beta} \otimes \boldsymbol{\phi}^{\xi^\alpha})\boldsymbol{\phi}_{\xi^\alpha} = -b_{\beta\alpha}\boldsymbol{\phi}^{\xi^\beta}. \tag{9.308}$$

Por último, otra propiedad que devemos resaltar del tensor $\nabla \mathbf{n}$ es su relación con la *Segunda Forma Fundamental* de la superficie que determina el producto escalar entre los vectores $d\mathbf{n}$ y $d\mathbf{X}$. De hecho, recordando la expresión de $d\mathbf{X}$ en función de $d\xi$ dada por (9.286) tenemos que la Segunda Forma Fundamental toma la forma

$$d\mathbf{n} \cdot d\mathbf{X} = (\nabla \mathbf{n})d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \nabla \mathbf{n}(\boldsymbol{\phi}_{\xi^\alpha} d\xi^\alpha) \cdot (\boldsymbol{\phi}_{\xi^\beta} d\xi^\beta) = -b_{\beta\alpha} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \tag{9.309}$$

Finalmente, dada la propiedad de simetría del tensor curvatura, existe una base ortonormal en el plano tangente, que designaremos $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, tal que el tensor curvatura puede ser expresado como

$$\nabla \mathbf{n} = \frac{1}{R_m}\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_1 + \frac{1}{R_M}\mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_2, \tag{9.310}$$

donde $\frac{1}{R_m}$ y $\frac{1}{R_M}$ son conocidos como las *curvaturas principales*, mínima y máxima respectivamente, asociadas a las *curvas coordenadas principales* (ortogonales) que pasan por el punto $\mathbf{X}$ y cuyas tangentes están dadas por los vectores (autovectores) $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$. A su vez, podemos verificar fácilmente que los invariantes del tensor curvatura están dados por

$$\mathrm{tr}(\nabla \mathbf{n}) = \frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_M} = 2\mathsf{H}, \tag{9.311}$$

$$\det(\nabla \mathbf{n}) = \frac{1}{R_m R_M} = \mathsf{K}, \tag{9.312}$$

donde H es la *curvatura media* y K la *curvatura Gausiana* o *curvatura total* de la superficie Σ en el punto $\mathbf{X}$.

9.8.4 Tercera Forma Fundamental

Como vimos en las secciones anteriores la Primera Forma Fundamental estaba asociada al producto escalar $d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}$. A su vez, la Segunda Forma Fundamental estaba

asociada al producto escalar $d\mathbf{n}\cdot d\mathbf{X}$. Por último tenemos un tercer producto escalar $d\mathbf{n}\cdot d\mathbf{n}$, denominado *Tercera Forma Fundamental*, dado por

$$d\mathbf{n}\cdot d\mathbf{n} = (\nabla\mathbf{n})d\mathbf{X}\cdot(\nabla\mathbf{n})d\mathbf{X} = (\nabla\mathbf{n})(\nabla\mathbf{n})d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X} = \mathbf{C}d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X}. \tag{9.313}$$

De la propia definición se verifica que $\mathbf{C} = (\nabla\mathbf{n})\nabla\mathbf{n} = (\nabla\mathbf{n})^2$ es un tensor simétrico, y las componentes de este tensor en la base natural del plano tangente $\{\phi_{\xi^1}, \phi_{\xi^2}\}$ están relacionadas con las componentes del tensor curvatura de la siguiente forma

$$d\mathbf{n}\cdot d\mathbf{n} = (\nabla\mathbf{n})(\nabla\mathbf{n})(d\xi^\beta\phi_{\xi\beta})\cdot(d\xi^\alpha\phi_{\xi\alpha}) = \\ (\nabla\mathbf{n})^2\phi_{\xi\beta}\cdot\phi_{\xi\alpha}d\xi^\beta d\xi^\alpha = [\mathbf{C}]_{\alpha\beta}d\xi^\beta d\xi^\alpha. \tag{9.314}$$

Luego, recordando (9.306), tenemos

$$\mathbf{C} = (\nabla\mathbf{n})^2 = (-b_{\alpha\gamma}(\phi^{\xi^\alpha}\otimes\phi^{\xi^\gamma}))(-b^\gamma_{\cdot\beta}(\phi_{\xi\gamma}\otimes\phi^{\xi^\beta})) = \\ b_{\alpha\gamma}b^\gamma_{\cdot\beta}(\phi^{\xi^\alpha}\otimes\phi^{\xi^\beta}), \tag{9.315}$$

de donde obtenemos

$$[\mathbf{C}]_{\alpha\beta} = b_{\alpha\gamma}b^\gamma_{\cdot\beta} = b^{\cdot\gamma}_{\alpha}b_{\gamma\beta}, \tag{9.316}$$

donde la última expresión se obtiene fácilmente de la siguiente igualdad

$$(\phi^{\xi^\alpha}\otimes\phi^{\xi^\gamma})(\phi_{\xi\gamma}\otimes\phi^{\xi^\beta}) = (\phi^{\xi^\alpha}\otimes\phi_{\xi\gamma})(\phi^{\xi^\gamma}\otimes\phi^{\xi^\beta}). \tag{9.317}$$

9.8.5 Propiedades del Tensor Λ

Cuando en este capítulo establecimos la descripción geométrica de una cáscara, definimos un punto cualquiera de la cáscara, $\mathbf{x}$, en función de su proyección ortogonal sobre la superficie media, que define el punto $\mathbf{x}_o$, y de la distancia entre estos dos puntos, que llamamos ξ, dando lugar a la relación $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \xi\mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$ la cual lleva el par $(\mathbf{x}_o, \xi) \in \Sigma\times H$, donde $H = [-\frac{h(\mathbf{x}_o)}{2}, \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2}]$, al punto $\mathbf{x}\in\Sigma$. En esa oportunidad admitimos que esta transformación era *uno-a-uno*, o sea inyectiva. En otras palabras, la transformación admite inversa. La condición necesaria para la existencia de esta inversa es que $\det\Lambda \neq 0$, donde $\Lambda = \mathbf{I} + \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$. Tenemos así

$$\det\Lambda = \det(\mathbf{I} + \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}(\mathbf{x}_o)) = 1 + \xi\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}) + \xi^2\det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}). \tag{9.318}$$

Recordando las expresiones de $\mathrm{tr}(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})$ y de $\det(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})$ en función de las curvaturas mínima y máxima dadas en (9.311) y (9.312) la condición límite para ξ está dada por

$$\det\Lambda = 1 + \xi\left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{R_M}\right) + \xi^2\frac{1}{R_mR_M} = 0, \tag{9.319}$$

cuyas raices son $\xi_1 = -R_m$ y $\xi_2 = -R_M$. Tenemos así la condición que asegura la inversa de la aplicación $(\mathbf{x}_o, \xi) \mapsto \mathbf{x}$

$$|\xi| \leq \frac{h(\mathbf{x}_o)}{2} \leq |R_m|. \tag{9.320}$$

Por otro lado recordando que $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \xi \mathbf{n}(\mathbf{x}_o)$, su diferencial está dado por

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_o + \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})d\mathbf{x}_o + d\xi\mathbf{n} = (\mathbf{I} + \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})d\mathbf{x}_o + d\xi\mathbf{n} = \Lambda d\mathbf{x}_o + d\xi\mathbf{n}, \tag{9.321}$$

que proyectado sobre el plano tangente $P_t(\mathbf{X}_o)$ resulta

$$\Pi d\mathbf{x} = \Pi\Lambda d\mathbf{x}_o = \Lambda d\mathbf{x}_o, \tag{9.322}$$

de donde obtenemos

$$d\mathbf{x}_o = \Lambda^{-1}\Pi d\mathbf{x}. \tag{9.323}$$

Estas expresiones muestran el papel de Λ y Λ^{-1} en las transformaciones de elementos diferenciales $\Pi d\mathbf{x}$ paralelos al plano tangente y su correspondiente $d\mathbf{x}_o$ en ese plano.

Por otro lado, dada la representación del tensor $\Lambda = \mathbf{I} + \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$, podemos obtener una expresión (exacta) para su inversa Λ^{-1}. En efecto, teniendo presente que $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbf{I}$, obtenemos fácilmente la siguiente forma recurrente (expansión) para este tensor

$$\Lambda^{-1} = \mathbf{I} - \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})\Lambda^{-1} = \\ \mathbf{I} - \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} + \xi^2(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2 - \ldots + (-1)^n\xi^n(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^n\Lambda^{-1}. \tag{9.324}$$

Veamos ahora las propiedades de las derivadas de Λ con respecto a ξ que designaremos $\dot{(\cdot)} = \frac{\partial \cdot}{\partial \xi}$. En primer lugar es directo verificar que los tensores Λ y $\dot{\Lambda}$ conmutan. De hecho, sabiendo que $\Lambda = \mathbf{I} + \xi\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$, tenemos $\dot{\Lambda} = \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n}$, luego

$$\Lambda\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}\Lambda = \nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n} + \xi(\nabla_{\mathbf{x}_o}\mathbf{n})^2. \tag{9.325}$$

Derivando ahora la relación $\Lambda\Lambda^{-1} = \mathbf{I}$ se tiene

$$\dot{\Lambda}\Lambda^{-1} + \Lambda\dot{(\Lambda^{-1})} = \mathbf{O}. \tag{9.326}$$

Premultiplicando la relación anterior por Λ^{-1} y posmultiplicando por Λ obtenemos las siguientes relaciones entre las derivadas de Λ y Λ^{-1}

$$\dot{(\Lambda^{-1})} = -\Lambda^{-1}\dot{\Lambda}\Lambda^{-1} \qquad \dot{\Lambda} = \Lambda\dot{(\Lambda^{-1})}\Lambda. \tag{9.327}$$

Por otro lado, derivando la identidad $\Lambda = \Lambda^{-1}\Lambda^2 = \Lambda^2\Lambda^{-1}$ tenemos

$$\dot{\Lambda} = (\dot{\Lambda^{-1}})\Lambda^2 + \Lambda^{-1}2\Lambda\dot{\Lambda} = (\dot{\Lambda^{-1}})\Lambda^2 + 2\dot{\Lambda}, \tag{9.328}$$

$$\dot{\Lambda} = 2\Lambda\dot{\Lambda}\Lambda^{-1} + \Lambda^2(\dot{\Lambda^{-1}}) = 2\dot{\Lambda} + \Lambda^2(\dot{\Lambda^{-1}}), \tag{9.329}$$

de donde obtenemos

$$\dot{\Lambda} = -(\dot{\Lambda^{-1}})\Lambda^2 = -\Lambda^2(\dot{\Lambda^{-1}}) = -\Lambda(\dot{\Lambda^{-1}})\Lambda, \tag{9.330}$$

$$(\dot{\Lambda^{-1}}) = -\dot{\Lambda}\Lambda^{-2} = -\Lambda^{-2}\dot{\Lambda} = -\Lambda^{-1}\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}. \tag{9.331}$$

Parte IV
OTROS PROBLEMAS DE LA FÍSICA

En esta parte de la monografía abordaremos el modelado de otros problemas típicamente encontrados en la física por medio de formulaciones variacionales. En el Capítulo 10 nos centraremos en el modelado de la conducción estacionaria de calor en cuerpos rígidos. Esta área de la física ha sido clásicamente abordada empleando el enfoque fuerte, es decir, utilizando ecuaciones diferenciales a derivadas parciales (ecuaciones de Euler-Lagrange). Mostraremos como es posible, haciendo uso de los conceptos presentados en el Capítulo 3, construir un modelo variacional para el problema, posibilitando analisar aspectos de estos modelos tales como ecuaciones constitutivas, reacciones de vínculo, restricciones cinemáticas y relaciones con problemas de minimización, de forma similar a lo realizado en el Capítulo 4. En particular, en relación al problema de conducción de calor en cuerpos sólidos, especial mención merece el trabajo de P. Podio-Guidugli, quien en [236] desarrolla de forma paralela el principio de potencia virtual para la dualidad entre tensión y tasa de deformación y la dualidad entre entropía y temperatura. Esos pares de dualidad, de hecho, entregan como resultado potencia. En nuestro caso, utilizaremos un abordaje variacional más clásico en el cual la dualidad se expresa entre temperatura y flujo de calor, dualidad que expresa potencia por unidad de temperatura.

En el Capítulo 11 trataremos el modelado del flujo incompresible de fluidos. Esta área también ha sido estudiada en el contexto de leyes de conservación, y la forma de derivación de los principios ha sido, por lo tanto, empleando ecuaciones de balance para volúmenes de control, abordaje que precisa de la hipótesis de la existencia de la entidad *tensión*. Veremos en este capítulo que una forma de modelado totalmente análoga a la empleada en la mecánica de sólidos (es decir, utilizando un modelo puramente cinemático y empleando el concepto de potencia virtual) es suficiente para desarrollar los modelos clásicos de la mecánica de fluidos, con la ventaja que el método variacional nos permite trabajar con el número mínimo de hipótesis en el modelo, nos permite entender el impacto de las restricciones cinemáticas de esta clase de flujos (incompresibles), y nos permite establecer, bajo algunas hipótesis adicionales, relaciones clásicas con problemas de mínimo, análogo a lo hecho en el Capítulo 4.

En el Capítulo 12 de esta parte abordaremos una problemática que posee un vínculo estrecho con el modelado multiescala (cuyo estudio en detalle es dejado para la Parte V), pues es una forma de modelado en la cual el modelo cinemático está enriquecido en comparación a lo ya visto en capítulos anteriores. Estamos hablando aquí de modelos continuos de más alto orden, dentro de los cuales se encuentran los modelos de tipo Cosserat [57, 123, 124], que luego han dado lugar al desarrollo de modelos micromórficos [79, 80], entre los cuales los llamados modelos de segundo gradiente pueden ser interpretados como casos particulares [237, 238]. Veremos que estos modelos pueden ser derivados de forma sistemática utilizando el marco teórico propuesto en el Capítulo 3, de forma similar a lo realizado por P. Germain en [115].

Los problemas discutidos en esta parte son un ejemplo de un abanico mayor de problemas pertenecientes a otras áreas de la física y los cuales, de forma enteramente análoga, podrían recibir el mismo tratamiento variacional. Son estos los denominados *problemas de campo*, dentro de los cuales podemos incluir el estudio

de la distribución de potenciales eléctricos (o magnéticos), análisis de problemas de lubricación, o flujo en medios porosos, entre otros.

Capítulo 10
Conducción Estacionaria de Calor

10.1 Introducción

En este capítulo desarrollaremos una formulación variacional para modelar la conducción estacionaria de calor en medios continuos rígidos, es decir, donde la misma posición espacial de las partículas del cuerpo permanece inalterada.

Como vimos en el Capítulo 3, precisamos como primer paso definir la cinemática del modelo. En el problema de conducción de calor la cinemática está caracterizada por la variable de naturaleza escalar que se denomina *temperatura*, y que mide el grado de agitación molecular en el medio en estudio. La temperatura en el cuerpo estará sujeta a ciertas restricciones, con lo cual será posible definir variaciones de esos campos de temperaturas admisibles. Con esto, estaremos en condiciones de introducir el operador de *tasa de deformación* que en este caso será denominado $\mathscr{G}$ (en el Capítulo 3 fue denominado $\mathscr{D}$) con lo cual estaremos en condiciones de definir la potencia virtual interna. A partir de eso podremos caracterizar las *fuerzas* internas y externas del modelo y el Principio de la Potencia Virtual será el responsable por establecer el concepto de equilibrio en el problema.

Consideremos el cuerpo ocupando la región limitada y regular $\mathscr{B}$ (la cual por hipótesis se encuentra fija en el espacio), de frontera $\partial\mathscr{B}$, del espacio Euclidiano tridimensional $\mathscr{E}$. Debido a esta hipótesis, las coordenadas espaciales $\mathbf{x}$ coinciden con las coordenadas asociadas a las partículas materiales $\mathbf{X}$. O sea, la configuración espacial y la material del cuerpo coinciden. Para el caso de conducción de calor en cuerpos cuyas deformaciones no son despreciables los desarrollos de este capítulo son totalmente válidos, considerando que la configuración del cuerpo es la configuración espacial.

10.2 Cinemática

De la misma manera que la *velocidade* se constituye en la variable *primal* del problema de equilibrio de los cuerpos deformables, el campo escalar denominado *temperatura*, θ, se constituye en la variable *primal* del problema de conducción de calor[1].

Llamamos de $\mathscr{T}$ al conjunto de todos los campos escalares suficientemente regulares de temperaturas *posibles* que podemos definir en el cuerpo $\mathscr{B}$. A su vez, $\mathscr{T}$, con las operaciones de suma y multiplicación por escalar usuales, constituye un espacio vectorial. Por *suficientemente regular* entendemos que θ es suficientemente regular de forma que todas las operaciones que serán realizadas están bien definidas.

Consideremos que existe una parte de la frontera del cuerpo, llamada $\partial\mathscr{B}_\theta$, donde la temperatura está prescripta. Así, definimos el conjunto

$$\text{Kin}_\theta = \{\theta \in \mathscr{T};\, \theta = \bar{\theta} \text{ en } \partial\mathscr{B}_\theta\}, \tag{10.1}$$

donde $\bar{\theta}$ es el valor de la temperatura prescripta en $\partial\mathscr{B}_\theta$. El conjunto Kin_θ contiene los campos de temperatura admisibles del problema en estudio. Definimos también el subespacio vetorial de $\mathscr{T}$ con condiciones homogéneas en $\partial\mathscr{B}_\theta$, es decir

$$\text{Var}_\theta = \{\theta \in \mathscr{T};\, \theta = 0 \text{ en } \partial\mathscr{B}_\theta\}. \tag{10.2}$$

Es fácil verificar que Kin_θ es la translación del subespacio Var_θ. Los elementos $\hat{\theta} \in \text{Var}_\theta$ serán llamados *acciones térmicas virtuais* o *variaciones admisibles de temperatura*. Con estos elementos así definidos tenemos

$$\text{Kin}_\theta = \theta_0 + \text{Var}_\theta \qquad \theta_0 \in \text{Kin}_\theta \text{ arbitrario.} \tag{10.3}$$

Admitiendo que la regularidad es suficiente para realizar las siguientes operaciones, expresamos la temperatura en un punto $\mathbf{x} \in \mathscr{B}$ próximo de $\mathbf{x}_o \in \mathscr{B}$ como sigue

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}_o) + \nabla\theta(\mathbf{x}_o)(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o) + \mathscr{O}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o). \tag{10.4}$$

Designando por $\mathbf{g}$ al campo vectorial $\nabla\theta$ y para todo ponto $\mathbf{x}$ suficientemente próximo de $\mathbf{x}_o$ podemos admitir que

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}_o) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_o)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_o). \tag{10.5}$$

Por otro lado, el campo θ se dice *constante* o *rígido* si se verifica que

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{x}_o) \quad \forall \mathbf{x}_o \in \mathscr{B}, \tag{10.6}$$

o lo que es totalmente equivalente

[1] En [236] se utiliza el concepto de *desplazamiento térmico* α en el desarrollo de la teoría propuesta, cuya relación con la temperatura es la siguiente $\theta = \dot{\alpha}$.

$$\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}. \tag{10.7}$$

Luego, el otro elemento importante de nuestro modelo serán los campos vectoriales $\mathbf{g}$ que representan los gradientes de temperatura (o gradientes térmicos). En particular, el conjunto de todos los campos vectoriales suficientemente regulares $\mathbf{g}$, será designado por $\mathscr{S}$.

Diremos que $\mathbf{g} \in \mathscr{S}$ es un *gradiente térmico*, o también *compatible*, si es posible determinar $\theta \in \mathscr{T}$ tal que

$$\mathbf{g} = \nabla\theta. \tag{10.8}$$

Podemos así definir el operador $\mathscr{G} = \nabla(\cdot) : \mathscr{T} \mapsto \mathscr{S}$ que a cada $\theta \in \mathscr{T}$ le hace corresponder el gradiente térmico $\mathbf{g} = \mathscr{G}\theta \in \mathscr{S}$.

El espacio nulo del operador $\mathscr{G}$, representado aquí por $\mathscr{N}(\mathscr{G})$, está caracterizado por

$$\mathscr{N}(\mathscr{G}) = \{\theta \in \mathscr{T}, \mathscr{G}\theta = \mathbf{0}\ \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}\}, \tag{10.9}$$

y agrupa todas las acciones térmicas *rígidas*. Todos los elementos y conceptos introducidos hasta aquí están representados en la Figura 10.1.

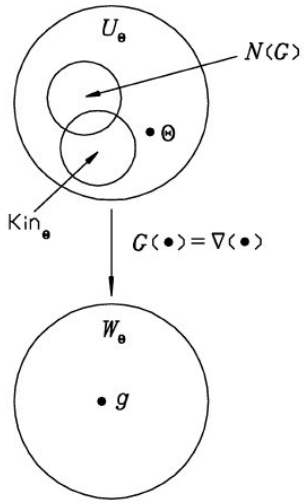


Fig. 10.1 Elementos de la *cinemática* del problema de conducción de calor.

10.3 Principio de la Potencia Térmica Virtual

Así como en la Mecánica, vamos a admitir que las acciones térmicas externas que atuan sobre el cuerpo $\mathscr{B}$ son dadas por todos los funcionales lineales (y continuos) $t : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$. Luego, las acciones térmicas externas son elementos del espacio dual de $\mathscr{T}$, aquí representado por $\mathscr{T}'$. Designaremos el valor que este funcional toma em $\mathbb{R}$ como la *potencia térmica externa*, dada entonces por

$$P_e = \langle t, \theta \rangle, \tag{10.10}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{T}' \times \mathscr{T} \to \mathbb{R}$.

Veremos, mas adelante, que estas acciones térmicas externas serán caracterizadas mediante el empleo del *Principio de la Potencia Térmica Virtual*, que vamos a enunciar en lo que sigue.

Antes de esto, debemos definir las llamadas *acciones térmicas internas* como los funcionales lineales (y continuos) definidos sobre el espacio de temperaturas $\mathscr{T}$ y de gradientes térmicos $\mathscr{S}$. El valor que este funcional toma em $(\theta, \mathbf{g})$ será llamado *potencia térmica interna*, o simplemente P_i. Novamente, así como en Mecánica, vamos a introducir una serie de hipótesis que nos permitirá encontrar una representación para el funcional anterior.

En primer lugar, vamos a admitir que este funcional tiene la siguiente representación general

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}} (p\theta + \mathbf{q} \cdot \mathbf{g}) dV. \tag{10.11}$$

La segunda hipótesis corresponde a admitir que P_i será nula para toda acción térmica rígida (y por lo tanto θ uniforme), es decir

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}} p\theta + \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} dV = 0 \quad \forall \theta \in \mathscr{N}(\mathscr{G}), \tag{10.12}$$

lo que resulta en

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}} p\theta \, dV = 0 \quad \forall \theta \in \mathscr{N}(\mathscr{G}), \tag{10.13}$$

lo cual, como debe ser válido para toda parte $\mathscr{P}$ del cuerpo $\mathscr{B}$, implica que

$$p = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}. \tag{10.14}$$

Así, tenemos

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} dV. \tag{10.15}$$

Observe que en esta teoría hemos llegado a la dualidad entre el gradiente térmico y el flujo de calor. [2]

[2] En realidad, la variable dual a la temperatura, en el sentido de potencia mecánica, es el denominado flujo de entropía, llamado **h**. En nuestro desarrollo, como estamos trabajando con potencia mecánica por unidad de temperatura (que es lo que hemos denominado simplemente *potencia*

Concluimos que las acciones térmicas internas son funcionales lineales (y continuos) sobre $\mathscr{S}$, esto es, son elementos del espacio dual de $\mathscr{S}$, aquí designado por $\mathscr{S}'$. Por el teorema de representación Riesz podemos colocar estos funcionales en correspondencia con el campo vetorial $\mathbf{q}$ que recibe el nombre de *vector flujo de calor*. Así, el valor de este funcional en $\mathbf{g} = \mathscr{G}\theta = \nabla\theta \in \mathscr{S}$ será dado por

$$P_i = -(\mathbf{q}, \mathbf{g}) = -\int_{\mathscr{B}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{g} dV. \tag{10.16}$$

Tenemos así definidos los espacios $\mathscr{T}$, $\mathscr{T}'$, $\mathscr{S}$ y $\mathscr{S}'$ y los productos de dualidad (o formas bilineales) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y $(\cdot, \cdot)$ que ponen en correspondencia estos espacios. Dado esto, podemos definir el *operador adjunto* o de *equilibrio térmico* $\mathscr{G}^* : \mathscr{S}' \to \mathscr{T}'$ dado por

$$(\mathbf{q}, \mathscr{G}\theta) = \langle \mathscr{G}^*\mathbf{q}, \theta \rangle \quad \theta \in \mathscr{S}. \tag{10.17}$$

En este punto, tenemos todos los elementos necesarios para enunciar el principio variacional que gobierna el problema, y que llamaremos Principio de la Potencia Térmica Virtual (PPTV). Decimos entonces que un cuerpo $\mathscr{B}$, bajo la acción térmica externa $t \in \mathscr{T}'$, se encuentra en equilibrio térmico estático si

- se satisface
$$P_e = \langle t, \hat{\theta} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta \cap \mathscr{N}(\mathscr{G}), \tag{10.18}$$
es decir, la potencia térmica virtual externa es nula para cualquier acción térmica rígida;
- y, además, se satisface
$$P_i + P_e = -(\mathbf{q}, \mathscr{G}\hat{\theta}) + \langle t, \hat{\theta} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta, \tag{10.19}$$
es decir, que la potencia térmica virtual interna sumada a la potencia térmica virtual externa es nula para cualquier acción térmica virtual admisible.

La primera parte del PPTV nos permite establecer cuales son las acciones térmicas externas compatibles con el equilibrio térmico. Observe que ella tiene sentido en la medida que es satisfecha al menos para $t = 0$. La segunda parte sólo tendrá sentido si demostramos la existencia de $\mathbf{q}$ para un dado t equilibrado. Lo anterior será establecido através del siguiente resultado.

Teorema 10.1 Teorema de Representación. *Si $t \in \mathscr{T}'$ está en equilibrio térmico, existe $\mathbf{q} \in \mathscr{S}'$ y $v \in \mathscr{T}'$ tales que*

$$t = \mathscr{G}^*\mathbf{q} - v, \tag{10.20}$$

$$\langle v, \hat{\theta} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta \Leftrightarrow v \in \mathrm{Var}_\theta^\perp, \tag{10.21}$$

donde v es llamada reacción de vínculo. Así, se dice que $\mathbf{q}$ y v equilibran t.

---

térmica aquí) la variable dual al gradiente térmico es, de hecho, el flujo de calor, cuya relación con el de entropía es la siguiente $\mathbf{h} = \frac{\mathbf{q}}{\theta}$.

Demostración. Si t está en equilibrio tenemos

$$t \in (\mathrm{Var}_\theta \cap \mathscr{N}(\mathscr{G}))^\perp \Leftrightarrow t \in \mathrm{Var}_\theta^\perp + \mathscr{N}(\mathscr{G})^\perp. \tag{10.22}$$

Debido a que $\theta \in \mathscr{N}(\mathscr{G})$ se tiene $\mathscr{G}\theta = \mathbf{0}$, lo que implica que, en tal caso

$$\langle \mathscr{G}^*\mathbf{q}, \theta \rangle = (\mathbf{q}, \mathscr{G}\theta) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathscr{S}', \tag{10.23}$$

es decir que $\theta \in R(\mathscr{G}^*)^\perp$, y por lo tanto $\mathscr{N}(\mathscr{G}) = R(\mathscr{G}^*)^\perp$, o sea

$$\mathscr{N}(\mathscr{G})^\perp = R(\mathscr{G}^*). \tag{10.24}$$

El resultado anterior, al ser substituido en (10.22) nos proporciona

$$t \in \mathrm{Var}_\theta^\perp + R(\mathscr{G}^*), \tag{10.25}$$

de donde concluimos que existen $\mathbf{q} \in \mathscr{S}'$ y $-v \in \mathrm{Var}_\theta^\perp$ tales que

$$t = \mathscr{G}^*\mathbf{q} - v, \tag{10.26}$$

y como $-v \in \mathrm{Var}_\theta^\perp$ resulta

$$\langle v, \hat{\theta} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta. \tag{10.27}$$

■

Así, y teniendo en manos los resultados anteriores, concluimos que

$$\langle t, \hat{\theta} \rangle = \langle \mathscr{G}^*\mathbf{q} - v, \hat{\theta} \rangle = \langle \mathscr{G}^*\mathbf{q}, \hat{\theta} \rangle = (\mathbf{q}, \mathscr{G}\hat{\theta}) \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta, \tag{10.28}$$

o sea,

$$(\mathbf{q}, \mathscr{G}\hat{\theta}) = \langle t, \hat{\theta} \rangle \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta. \tag{10.29}$$

Vemos así que el Teorema de Representación y la hipótesis de equilibrio para acciones térmicas rígidas nos permiten obter la segunda parte del PPTV.

De esta manera hemos llegado al punto de tener todos los elementos necesarios para formular las ecuaciones variacionales y derivar de ellas las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas que gobiernan la conducción de calor estacionaria. No obstante ello, hasta ahora hemos trabajado de forma abstracta. En lo que sigue, vamos a explicitar los resultados para el caso de un cuerpo tridimensional y para el operador $\mathscr{G}(\cdot) = \nabla(\cdot)$. En consecuencia, del PPTV tenemos

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{q} \cdot \nabla\hat{\theta} dV = \langle t, \hat{\theta} \rangle \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta. \tag{10.30}$$

Si $\mathbf{q}$ y θ son campos suficientemente regulares podemos integrar por partes

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{q}\cdot\nabla\hat{\theta}dV = \int_{\mathscr{B}} \left[\operatorname{div}(\mathbf{q}\hat{\theta}) - \operatorname{div}\mathbf{q}\hat{\theta}\right] dV = \int_{\partial\mathscr{B}_f} (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\hat{\theta}dS - \int_{\mathscr{B}} \operatorname{div}\mathbf{q}\hat{\theta}dV, \quad (10.31)$$

donde hemos usado el hecho de ser $\hat{\theta} = 0$ en $\partial\mathscr{B}_\theta$ y donde $\partial\mathscr{B} = \partial\mathscr{B}_\theta \cup \partial\mathscr{B}_f$ con $\partial\mathscr{B}_\theta \cap \partial\mathscr{B}_f = \emptyset$.

Reemplazando (10.31) en la (10.30) obtenemos la caracterización del elemento $t \in \mathscr{T}'$

$$\langle t, \hat{\theta}\rangle = \int_{\partial\mathscr{B}_f} (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\hat{\theta}dS - \int_{\mathscr{B}} \operatorname{div}\mathbf{q}\hat{\theta}dV. \quad (10.32)$$

El resultado anterior nos permite caracterizar dos tipos de cargas térmicas compatibles con el modelo que estamos desarrollando. En particular, notamos que este cargamento consiste en una densidad de energía calorífica suministrada al cuerpo por unidad de superficie, aquí designada por $\bar{q}$, y una densidad de energía por unidad de volumen aquí designada por r. En diversas aplicaciones prácticas, donde el material que circunda el sólido es un fluido en movimiento, $\bar{q}$ depende de la temperatura de la superficie del sólido, θ, de la temperatura del fluido, θ_∞, y de las propriedades del fluido, h, a través de la relación $\bar{q} = h(\theta - \theta_\infty)$. Llamamos a este fenómeno *intercambio de calor por convección*, y la superficie donde ocurre el mismo se llama $\partial\mathscr{B}_c$. Si consideramos $\partial\mathscr{B}_q = \partial\mathscr{B}_f \cup \partial\mathscr{B}_c$ tendremos la siguiente representación para $t \in \mathscr{T}'$

$$\langle t, \hat{\theta}\rangle = \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\hat{\theta}dS + \int_{\partial\mathscr{B}_c} h(\theta - \theta_\infty)\hat{\theta}dS + \int_{\mathscr{B}} r\hat{\theta}dV. \quad (10.33)$$

Luego el PPTV toma la siguiente forma final

$$\int_{\mathscr{B}} \mathbf{q}\cdot\nabla\hat{\theta}dV = \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\hat{\theta}dS + \int_{\partial\mathscr{B}_c} h(\theta - \theta_\infty)\hat{\theta}dS + \int_{\mathscr{B}} r\hat{\theta}dV \quad \forall\hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta. \quad (10.34)$$

Para incluir el caso de conducción de calor no estacionario basta substituir r por $r^* = r - \rho c\dot{\theta}$ donde ρ es la masa espacífica del material que compone $\mathscr{B}$ y $c > 0$ es el calor específico, siendo $c = c_p = c_v$ en el caso de sólidos.

Luego, para encontrar la forma local del problema (ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la ecuación variacional), cuya forma abstracta es $\mathscr{G}^*\mathbf{q} = t + v$ procedemos a realizar la integración por partes sobre el lado izquierdo de la equación (10.34), arribando a

$$\int_{\partial\mathscr{B}_f} (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\hat{\theta}dS - \int_{\mathscr{B}} \operatorname{div}\mathbf{q}\hat{\theta}dV = \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\hat{\theta}dS + \int_{\partial\mathscr{B}_c} h(\theta - \theta_\infty)\hat{\theta}dV + \int_{\mathscr{B}} r\hat{\theta}dV \quad \forall\hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta. \quad (10.35)$$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo de las Variaciones encontramos

$$\operatorname{div}\mathbf{q} + r = 0 \qquad \text{en } \mathscr{B}, \tag{10.36}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = \bar{q} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_q, \tag{10.37}$$

$$\mathbf{q}\cdot\mathbf{n} = h(\theta - \theta_\infty) \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_c, \tag{10.38}$$

que representan las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema variacional (10.34), es decir, la forma local del problema de conducción estacionária de calor.

Observe que, mismo en situaciones en las cuales el flujo de calor no sea regular lo suficiente para que la integración por partes sea realizada como hemos hecho, el PPTV continua siendo válido. Consideremos, por exemplo, que existe una superficie interna S que divide al cuerpo en dos partes, en cada una de las cuales el flujo de calor es suficientemente regular como para proceder con la integración por partes, pero que no es regular a través de S. En este caso, de la integraci´on por partes emerge un término de la forma $\int_S (\llbracket\mathbf{q}\rrbracket\cdot\mathbf{n})\hat{\theta}dS$. Esto nos indica que el elemento t podrá incluir una densidad de energía por unidad de superficie sobre S, digamos $\bar{q}_S$. Así, el equilibrio implica en tal caso que

$$\llbracket\mathbf{q}\rrbracket\cdot\mathbf{n} = \bar{q}_S \quad \text{en } S. \tag{10.39}$$

Vamos a caracterizar la reacción de vínculo $v \in \mathscr{T}'$ liberando las restricciones del espacio Var_θ. Para esto note que la (10.20) es equivalente a lo siguiente

$$\langle t, \hat{\theta}\rangle = \langle \mathscr{G}^*\mathbf{q} - v, \hat{\theta}\rangle = \langle \mathscr{G}^*\mathbf{q}, \hat{\theta}\rangle - \langle v, \hat{\theta}\rangle \quad \forall\hat{\theta} \in \mathscr{T}. \tag{10.40}$$

Luego, haciendo uso del PPTV tenemos que

$$\langle v, \hat{\theta}\rangle = \int_{\mathscr{B}} \mathbf{q}\cdot\nabla\hat{\theta}dV - \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\hat{\theta}dS - \int_{\partial\mathscr{B}_c} h(\theta-\theta_\infty)\hat{\theta}dS - \int_{\mathscr{B}} r\hat{\theta}dV \qquad \forall\hat{\theta}\in\mathscr{T} \tag{10.41}$$

de donde

$$\begin{aligned}\langle v, \hat{\theta}\rangle = &\int_{\partial\mathscr{B}} (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\hat{\theta}dS - \int_{\mathscr{B}} \operatorname{div}\mathbf{q}\hat{\theta}dV \\ &- \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\hat{\theta}dS - \int_{\partial\mathscr{B}_c} h(\theta-\theta_\infty)\hat{\theta}dS - \int_{\mathscr{B}} r\hat{\theta}dV = \int_{\partial\mathscr{B}_\theta} (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})\hat{\theta}dS \qquad \forall\hat{\theta}\in\mathscr{T}\end{aligned} \tag{10.42}$$

En consecuencia se tiene que

$$\int_{\partial\mathscr{B}_\theta} [v - (\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})]\hat{\theta}dS = 0 \quad \forall\hat{\theta}\in\mathscr{T}, \tag{10.43}$$

que, en forma local, implica

$$v = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_\theta. \tag{10.44}$$

La reacción de vínculo v es la componente normal del flujo de calor sobre la parte de la frontera del cuerpo que posee restricciones sobre la temperatura.

Finalmente, el lector encontrará en la Figura 10.2 todos los conceptos y resultados obtenidos a lo largo de esta presentación.

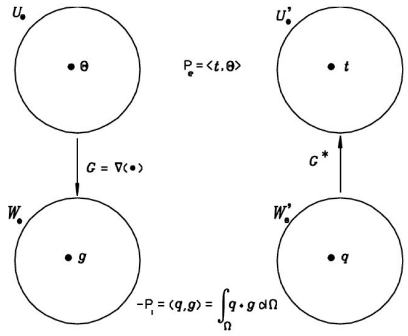


Fig. 10.2 Modelo matemático para el problema de condución de calor.

10.4 Principio de la Potencia Térmica Virtual Complementaria

En la sección anterior vimos el problema de conducción de calor en la que se conoce como formulación *primal*, la cual está caracterizada a través del PPTV que establece la correspondencia existente entre el campo $\mathbf{q}$ y la acción térmica externa t para que exista equilibrio térmico (estacionario).

Así como en la mecánica de cuerpos deformables, para el problema de conducción de calor también existe un problema *dual* al anterior que permite establecer cuando el campo vetorial $\mathbf{g}$ es *compatible*, es decir, $\exists\theta \in \text{Kin}_\theta$ tal que $\mathscr{G}\theta = \mathbf{g}$. Para formular este problema, es necesario definir los siguientes conjuntos

$$\text{Est}_q = \{\mathbf{q} \in \mathscr{S}'; -(\mathbf{q}, \mathscr{G}\hat{\theta}) + \langle t, \hat{\theta}\rangle = 0 \quad \forall\hat{\theta} \in \text{Var}_\theta\}, \tag{10.45}$$

que es el conjunto de los esfuerzos internos que están equilibrados con la acción térmica externa $t \in \mathscr{T}'$, y

$$\text{Var}_\mathbf{q} = \{\mathbf{q} \in \mathscr{T}'; (\mathbf{q}, \mathscr{G}\hat{\theta}) = 0 \quad \forall\hat{\theta} \in \text{Var}_\theta\}, \tag{10.46}$$

que es el subespacio vectorial de $\mathscr{S}'$ cuyos elementos son todos los flujos de calor $\mathbf{q}$ en equilibrio térmico con la acción térmica externa nula.

Como anteriormente, es importante observar que si $\mathbf{q}_0 \in \text{Est}_q$ y $\hat{\mathbf{q}} \in \text{Var}_q$ entonces

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \hat{\mathbf{q}} \in \mathrm{Est}_q, \tag{10.47}$$

dado que

$$(\mathbf{q}, \mathscr{G}\hat{\theta}) = (\mathbf{q}_0, \mathscr{G}\hat{\theta}) + (\hat{\mathbf{q}}, \mathscr{G}\hat{\theta}) = (\mathbf{q}_0, \mathscr{G}\hat{\theta}) = \langle t, \hat{\theta} \rangle \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta. \tag{10.48}$$

El resultado anterior nos muestra que Est_q es una translación de Var_q, o sea

$$\mathrm{Est}_q = \mathbf{q}_0 + \mathrm{Var}_q \quad \mathbf{q}_0 \in \mathrm{Est}_q. \tag{10.49}$$

Con las definiciones anteriores, podemos enunciar el Principio de la Potencia Térmica Virtual Complementaria (PPTVC). Decimos que el campo vectorial $\mathbf{g} \in \mathscr{S}$ es térmicamente compatible para una acción térmica externa equilibrada $t \in \mathscr{T}'$ si y sólo si

$$(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{g}) = (\hat{\mathbf{q}}, \mathscr{G}\theta_0) \quad \hat{\mathbf{q}} \in \mathrm{Var}_q, \tag{10.50}$$

para algún $\theta_0 \in \mathrm{Kin}_\theta$.

Demostración. Sea $\mathbf{g}$ compatible, luego $\exists \theta_1 \in \mathscr{T}$ tal que $\mathbf{g} = \mathscr{G}\theta_1$. Como Kin_θ es una translación lineal de Var_θ, o sea $\mathrm{Kin}_\theta = \theta_0 + \mathrm{Var}_\theta$, con θ_0 arbitrario, se tiene que $\theta_1 - \theta_0 \in \mathrm{Var}_q$. Entonces

$$(\hat{\mathbf{q}}, \mathscr{G}(\theta_1 - \theta_0)) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in \mathrm{Var}_q, \tag{10.51}$$

que resulta de la propia definición del espacio Var_θ.

Supongamos ahora que

$$(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{g}) = (\hat{\mathbf{q}}, \mathscr{G}\theta_0) \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in \mathrm{Var}_q, \tag{10.52}$$

donde $\theta_0 \in \mathrm{Kin}_\theta$. Así

$$(\hat{\mathbf{q}}, \mathbf{g} - \mathscr{G}\theta_0) = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in \mathrm{Var}_q, \tag{10.53}$$

de lo que se concluye que

$$\mathbf{g} - \mathscr{G}\theta_0 \in \mathrm{Var}_q^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{g} \in \mathscr{G}\theta_0 + \mathrm{Var}_q^\perp. \tag{10.54}$$

Por otro lado sabemos que

$$\mathrm{Var}_q = \{\hat{\mathbf{q}} \in \mathscr{S}'; (\hat{\mathbf{q}}, \mathscr{G}\hat{\theta}) = 0 \quad \forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta\} = (\mathscr{G}(\mathrm{Var}_\theta))^\perp, \tag{10.55}$$

y entonces

$$\mathrm{Var}_q^\perp = \mathscr{G}(\mathrm{Var}_\theta). \tag{10.56}$$

Substituyendo (10.56) en (10.54) tenemos

$$\mathbf{g} \in \mathscr{G}\theta_0 + \mathscr{G}(\mathrm{Var}_\theta) = \mathscr{G}(\theta_0 + \mathrm{Var}_\theta) = \mathscr{G}(\mathrm{Kin}_\theta), \tag{10.57}$$

o sea $\mathbf{g} \in \mathscr{G}(\mathrm{Kin}_\theta)$ o, lo que es equivalente, $\exists \theta_0 \in \mathrm{Kin}_\theta$ tal que $\mathscr{G}\theta_0 = \mathbf{g}$. ■

Para el caso que estamos presentando, la expresión (10.50) corresponde a

$$\int_{\mathscr{B}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g} dV = \int_{\mathscr{B}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \nabla \theta_0 dV \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in \mathrm{Var}_q, \tag{10.58}$$

y haciendo uso de la integración por partes encontramos

$$\int_{\mathscr{B}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \nabla \theta_0 dV = \int_{\mathscr{B}} \mathrm{div}\,(\theta_0 \hat{\mathbf{q}}) dV - \int_{\mathscr{B}} \mathrm{div}\,\hat{\mathbf{q}} \theta_0 dV = \int_{\partial \mathscr{B}} (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) \theta_0 dS - \int_{\mathscr{B}} \mathrm{div}\,\hat{\mathbf{q}} \theta_0 dV = \int_{\partial \mathscr{B}_\theta} \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} \bar{\theta} dS. \tag{10.59}$$

donde hemos utilizado el hecho de que $\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{q}} = 0$ en $\mathscr{B}$, $\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n} = 0$ en $\partial \mathscr{B}_q$ y en $\partial \mathscr{B}_c$ y $\theta_0 = \bar{\theta}$ en $\partial \mathscr{B}_\theta$.

De esta forma, el PPTVC resulta dado por

$$\int_{\mathscr{B}} \hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{g} dV = \int_{\partial \mathscr{B}_\theta} (\hat{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{n}) \bar{\theta} dS \quad \forall \hat{\mathbf{q}} \in \mathrm{Var}_q. \tag{10.60}$$

10.5 Ecuaciones Constitutivas

Para arribar al problema de campo por trás del modelo de conducción de calor es necesario incorporar el comportamiento del material, que determinará la forma en que el flujo de calor $\mathbf{q}$ está relacionado con el gradiente térmico $\mathbf{g} = \nabla \theta$. Es decir, estamos buscando un operador del espacio $\mathscr{S}$ en su dual $\mathscr{S}'$ tal que

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}\mathbf{g}, \tag{10.61}$$

donde $\mathbf{K}$ es un tensor de segundo orden y el signo es colocado por conveniencia y sin pérdida de generalidad. A seguir, asumiremos que el tensor $\mathbf{K}$ satisface las siguientes propiedades

$$\mathbf{K}\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{K}\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \qquad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathscr{S} \Rightarrow \mathbf{K} = \mathbf{K}^T, \tag{10.62}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \geq 0 \qquad \forall \mathbf{g} \in \mathscr{S}, \tag{10.63}$$

$$\mathbf{K}\mathbf{g} \cdot \mathbf{g} = 0 \qquad \Leftrightarrow \mathbf{g} = \mathbf{0}. \tag{10.64}$$

Así, definamos la función *densidad de energía térmica* $\varpi = \varpi(\mathbf{g})$

$$\varpi(\bar{\mathbf{g}}) = \int_{\mathbf{0}}^{\bar{\mathbf{g}}} \varpi(\mathbf{g}) \cdot d\mathbf{g} = -\int_{\mathbf{0}}^{\bar{\mathbf{g}}} \mathbf{K}\mathbf{g} \cdot d\mathbf{g} = -\frac{1}{2} \mathbf{K}\mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \tag{10.65}$$

siendo que, de las propiedades de $\mathbf{K}$ sigue que

$$\varpi(\mathbf{g}) \leq 0, \tag{10.66}$$

e igual a cero si y sólo si $\mathbf{g} = \mathbf{0}$.

Luego, el flujo de calor $\overline{\mathbf{q}}$ relacionado con el gradiente térmico $\overline{\mathbf{g}}$ por medio de la ecuación constitutiva es tal que

$$\overline{\mathbf{q}} = \left.\frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{g}}\right|_{\mathbf{g}=\overline{\mathbf{g}}} = -\mathbf{K}\overline{\mathbf{g}}. \tag{10.67}$$

Por otro lado, expandiendo ϖ en serie de Taylor en torno de un punto $\mathbf{g}_0$, tenemos

$$\varpi(\mathbf{g}) = \varpi(\mathbf{g}_0) + \left.\frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{g}}\right|_{\mathbf{g}_0} \cdot (\mathbf{g}-\mathbf{g}_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \varpi}{\partial \mathbf{g}^2}\right|_{\mathbf{g}_0} (\mathbf{g}-\mathbf{g}_0)\cdot(\mathbf{g}-\mathbf{g}_0) = \varpi(\mathbf{g}_0) - \mathbf{K}\mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{g}-\mathbf{g}_0) - \frac{1}{2}\mathbf{K}(\mathbf{g}-\mathbf{g}_0)\cdot(\mathbf{g}-\mathbf{g}_0), \tag{10.68}$$

con lo que se obtiene

$$\varpi(\mathbf{g}) - \varpi(\mathbf{g}_0) \leq -\mathbf{K}\mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{g}-\mathbf{g}_0) = \mathbf{q}_0 \cdot (\mathbf{g}-\mathbf{g}_0), \tag{10.69}$$

siendo que la igualdad se verifica para $\mathbf{g} = \mathbf{g}_0$. En este caso, concluimos que ϖ es una función estrictamente cóncava.

En el caso de materiales con comportamiento constitutivo no lineal asumimos el siguiente comportamiento monótono para ϖ

$$(\mathbf{q}^B - \mathbf{q}^A)\cdot(\mathbf{g}^B - \mathbf{g}^A) \leq 0 \quad \forall \mathbf{g}^B, \mathbf{g}^A \in \mathscr{S}, \tag{10.70}$$

donde la igualdad se da solamente si $\mathbf{g}^B = \mathbf{g}^A$, y $\mathbf{q}^B = \mathbf{q}(\mathbf{g}^B)$, $\mathbf{q}^A = \mathbf{q}(\mathbf{g}^A)$. Sea ahora $\mathbf{g} = \mathbf{g}^A + d\mathbf{g}$ cuyo flujo de calor asociado es $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\mathbf{g})$. Entonces

$$(\mathbf{q} - \mathbf{q}^A)\cdot d\mathbf{g} \leq 0, \tag{10.71}$$

e integrando el proceso que nos transporta de $\mathbf{g}^A$ hasta $\mathbf{g}^B$ tendremos

$$\int_{\mathbf{g}^A}^{\mathbf{g}^B} (\mathbf{q} - \mathbf{q}^A)\cdot d\mathbf{g} \leq 0, \tag{10.72}$$

de donde se concluye que

$$\varpi(\mathbf{g}^B) - \varpi(\mathbf{g}^A) \leq \mathbf{q}^A \cdot (\mathbf{g}^B - \mathbf{g}^A), \tag{10.73}$$

donde hemos recuperado la concavidad de la función ϖ a partir de la hipótesis de monotonicidad (10.70).

Observando ahora que el tensor $\mathbf{K}$ es definido positivo, podemos calcular la inversa $\mathbf{K}^{-1}$, y podemos encontrar la relación constitutiva inversa como sigue

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{q}) = -\mathbf{K}^{-1}\mathbf{q}, \tag{10.74}$$

y por lo tanto podemos introducir la función *densidad de energía térmica complementaria* como siendo

$$\varpi^*(\overline{\mathbf{q}}) = \int_{\mathbf{0}}^{\overline{\mathbf{q}}} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} = -\int_{\mathbf{0}}^{\overline{\mathbf{q}}} \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} \cdot d\mathbf{q} = -\frac{1}{2}\mathbf{K}^{-1}\overline{\mathbf{q}} \cdot \overline{\mathbf{q}} \leq 0, \tag{10.75}$$

e igual a cero solamente si $\overline{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$. Además, tenemos

$$\overline{\mathbf{g}} = \left.\frac{\partial \varpi^*}{\partial \mathbf{q}}\right|_{\mathbf{q}=\overline{\mathbf{q}}}, \tag{10.76}$$

y también

$$\varpi^*(\mathbf{q}) - \varpi^*(\mathbf{q}_0) \leq \mathbf{g}_0 \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0), \tag{10.77}$$

con lo que se concluye que la función ϖ^* también es cóncava en el espacio $\mathscr{S}'$.

De las propiedades de ϖ y ϖ^* se obtiene finalmente que

$$\varpi(\mathbf{g}) + \varpi^*(\mathbf{q}) \leq \mathbf{g} \cdot \mathbf{q}, \tag{10.78}$$

donde la igualdad se verifica si $\mathbf{g}$ y $\mathbf{q}$ están relacionados por medio de la ecuación constitutiva.

10.6 Principio de Máxima Energía Térmica Total

El objetivo de esta sección es transformar el problema de conducción de calor estacionaria en un problema de extremo de un funcional costo. Procederemos de forma análoga a lo hecho en el Capítulo 4.

Dado que la función ϖ es cóncava, en le caso general tenemos

$$\varpi(\mathscr{G}\theta) - \varpi(\mathscr{G}\theta_0) \leq \left.\frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{g}}\right|_{\mathscr{G}\theta_0} \cdot \mathscr{G}(\theta - \theta_0), \tag{10.79}$$

donde la igualdad se satisface para todo $\theta - \theta_0 \in \mathscr{T} \setminus \mathscr{N}(\mathscr{G})$. Integrando la expresión (10.79) en el dominio ocupado por el cuerpo $\mathscr{B}$ obtenemos lo siguiente

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\varpi(\mathscr{G}\theta) - \varpi(\mathscr{G}\theta_0)\big) dV \leq \int_{\mathscr{B}} \left.\frac{\partial \varpi}{\partial \mathbf{g}}\right|_{\mathscr{G}\theta_0} \cdot \mathscr{G}(\theta - \theta_0) dV \quad \forall \theta \in \mathrm{Kin}_\theta. \tag{10.80}$$

Substituyendo este resultado en el PPTV dado por la (10.30), resulta

$$\int_{\mathscr{B}} \big(\varpi(\mathscr{G}\theta) - \varpi(\mathscr{G}\theta_0)\big) dV \leq \langle t, (\theta - \theta_0)\rangle \quad \forall \theta \in \mathrm{Kin}_\theta. \tag{10.81}$$

Ahora, procedemos a agrupar los términos como sigue

$$\Theta(\theta) = \int_{\mathscr{B}} \varpi(\mathscr{G}\theta)dV - \langle t, \theta \rangle \leq$$
$$\int_{\mathscr{B}} \varpi(\mathscr{G}\theta_0)dV - \langle t, \theta_0 \rangle = \Theta(\theta_0) \quad \forall \theta \in \mathrm{Kin}_\theta. \quad (10.82)$$

Llegamos así al principio de máxima energía térmica total, el cual es enunciado como sigue. Encuentre $\theta_0 \in \mathrm{Kin}_\theta$ tal que maximice el funcional de energía térmica total

$$\Theta(\theta) = \int_{\mathscr{B}} \varpi(\mathscr{G}\theta)dV - \langle t, \theta \rangle, \quad (10.83)$$

definido para todo $\theta \in \mathrm{Kin}_\theta$.

10.7 Ecuación de Laplace

Particularicemos para el modelo constitutivo más utilizado en la práctica, conocido como *ley de Fourier*. Este modelo establece que el flujo de calor $\mathbf{q}$ y el gradiente térmico $\mathbf{g} = \nabla\theta$ están relacionados como sigue

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla\theta = -k\nabla\theta, \quad (10.84)$$

donde $\mathbf{K} = k\mathbf{I}$ es el tensor identidad de segundo orden cuya magnitud está dada por el escalar k, el cual es positivo.

Así, reescribimos el PPTV dado por la expresión (10.34) particularizando el comportamiento del material según (10.84), con lo que obtenemos

$$-\int_{\mathscr{B}} k\nabla\theta \cdot \nabla\hat{\theta}dV = \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\hat{\theta}dS + \int_{\partial\mathscr{B}_c} h(\theta - \theta_\infty)\hat{\theta}dS + \int_{\mathscr{B}} r\hat{\theta}dV$$
$$\forall \hat{\theta} \in \mathrm{Var}_\theta. \quad (10.85)$$

De forma análoga a lo realizado anteriormente, es posible obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para este caso, que resultan

$$-\operatorname{div}(k\nabla\theta) + r = 0 \qquad \text{en } \mathscr{B}, \quad (10.86)$$
$$k\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = \bar{q} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_q, \quad (10.87)$$
$$k\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = h(\theta - \theta_\infty) \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_c. \quad (10.88)$$

Simplifiquemos aún más la presentación para el caso de materiales térmicamente homogéneos, es decir k constante, y para condiciones de contorno esenciales y homogéneas sobre toda la frontera, es decir $\partial\mathscr{B}_\theta = \partial\mathscr{B}$. Así, el problema de campo se reduce al conocido problema de Laplace

$$k\triangle\theta = r \qquad \text{en } \mathscr{B}, \quad (10.89)$$
$$\theta = 0 \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}. \quad (10.90)$$

Enunciemos ahora el problema variacional (10.85) en formato de problema de extremo de funcional. De esta manera, y notando que para la ley de Fourier la densidad de energía térmica está dada por

$$\varpi(\nabla\theta) = -\frac{1}{2}k|\nabla\theta|^2, \tag{10.91}$$

podemos escribir el funcional de energía térmica total (10.83) como sigue

$$\Theta(\theta) = -\int_{\mathscr{B}} \frac{1}{2}k|\nabla\theta|^2 dV - \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\theta dS - \int_{\partial\mathscr{B}_c} h(\theta-\theta_\infty)\theta dS - \int_{\mathscr{B}} r\theta dV. \tag{10.92}$$

Introduciendo el funcional $\bar{\Theta} = -\Theta$, y agrupando algunos términos podemos escribir el problema de extremo de funcional (10.83) como el siguiente problema de minimización: encuentre $\theta_0 \in \text{Kin}_\theta$ tal que minimice el siguiente funcional

$$\tilde{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2}\int_{\mathscr{B}} k|\nabla\theta|^2 dV + \int_{\partial\mathscr{B}_c} h\theta^2 dS + \int_{\partial\mathscr{B}_q} \bar{q}\theta dS - \int_{\partial\mathscr{B}_c} h\theta_\infty\theta dS + \int_{\mathscr{B}} r\theta dV. \tag{10.93}$$

Capítulo 11
Flujo Incompresible de Fluidos

11.1 Introducción

En este capítulo trataremos la construcción de un modelo de flujo de fluidos incompresibles dentro del marco variacional que caracteriza esta monografía. Así, haremos empleo del Principio de la Potencia Virtual (PPV), presentado en el Capítulo 3, para encontrar las ecuaciones variacionales que gobiernan el problema de equilibrio mecánico. Vale la pena observar que si bien hemos decidido presentar un capítulo específico dedicado a la mecánica de fluidos, la estructura variacional del problema es muy semejante a los problemas ya vistos de mecánica de sólidos en el propio Capítulo 3. De hecho, desde el punto de vista cinemático haremos uso de los mismos elementos para describir las acciones de movimiento del medio continuo (en este caso fluido). Una particularidad que no ha sido considerada en el caso de medios continuos sólidos es la de la condición de incompresibilidad que los fluidos poseen en la mayoría de las aplicaciones encontradas en la ingeniería. Haremos énfasis en el tratamiento de esta restricción a las acciones de movimiento y veremos su impacto desde el punto de vista variacional.

El presente capítulo se diferencia así de la mayoría de la literatura encontrada en la mecánica de fluidos, en la cual la derivación de las ecuaciones se realiza a partir de leyes de conservación (de masa y de cantidad de movimiento). Como dicho, emplearemos el PPV para modelar este problema, y veremos que, al contrario de lo que ocurre con la derivación clásica de las ecuaciones de balance, no es necesario asumir la existencia de un tensor de tensiones ni la existencia de la variable presión mecánica. Estos emergen de forma natural a partir del PPV y de las restricciones cinemáticas consideradas. Luego, utilizando el procedimiento de integración por partes será posible encontrar las ecuaciones clásicas en formato de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, que para el caso de comportamiento Newtoniano resultan ser las ecuaciones de Navier-Stokes. Como corolario, estudiaremos algunos casos de particular interés como son el caso de flujos irrotacionales de fluidos incompresibles y el caso de flujo de Stokes, donde podremos expresar el problema como un problema de mínimo.

Para una exposición más detallada sobre el problema del flujo de fluidos, el lector puede consultar [45, 56, 61, 119, 283, 287].

11.2 Cinemática

Para un medio continuo cuyo comportamiento constitutivo es fluido vamos a considerar la misma cinemática que la introducida en el caso de un medio continuo cuyo comportamiento es sólido. Es decir, consideremos un conjunto de partículas que componen el medio continuo dentro del espacio Euclidiano $\mathscr{E}$. Estas partículas recorren el espacio Euclidiano. Para describir el movimiento de estas partículas en un dado intervalo de tiempo $t \in [t_0, t_f]$ empleamos el siguiente mapeamiento (ver Capítulo 3)

$$\begin{aligned} \mathscr{X} : \mathscr{B} \times [t_0, t_f] &\to \mathscr{E}, \\ (\mathbf{X}, t) &\mapsto \mathbf{x} = \mathscr{X}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \tag{11.1}$$

donde $\mathscr{B}$ denota el conjunto de partículas que compone el sistema físico bajo estudio, $\mathbf{X}$ representa la posicción de las partículas en un dado instante de referencia, por ejemplo en $t = t_0$. De esta manera $\mathbf{x}$ representa, a través del mapeamiento $\mathscr{X}$, la posición ocupada por la partícula $\mathbf{X}$ en el instante de tiempo t.

Como ya vimos no Capítulo 3, el campo de velocidades en su descripción material y espacial está definido, respectivamente, por

$$\dot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \left.\frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t}(\mathbf{X}, t)\right|_{\mathbf{X} \text{ fijo}}, \tag{11.2}$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathscr{X}}{\partial t}(\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x}, t), t), \tag{11.3}$$

donde $\mathscr{X}^{-1}$ es el mapeamiento inverso, esto es $\mathbf{x} = \mathscr{X}(\mathscr{X}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$, el cual asumimos que existe y es diferenciable.

Hemos visto también que la aceleración de las partículas, en su descripción material y espacial, respectivamente, viene dada por

$$\ddot{\mathbf{x}}(\mathbf{X}, t) = \left.\frac{\partial^2 \mathscr{X}}{\partial t^2}(\mathbf{X}, t)\right|_{\mathbf{X} \text{ fijo}}, \tag{11.4}$$

$$\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + [(\nabla \mathbf{v})(\mathbf{x}, t)]\mathbf{v}(\mathbf{x}, t), \tag{11.5}$$

donde $\nabla(\cdot)$ representa el operador gradiente en relación a las coordenadas $\mathbf{x}$.

Como ya vimos también en el Capítulo 3, la tasa de deformación, denotada por ε, experimentada por una partícula está caracterizada por

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) = (\nabla \mathbf{v})^s, \tag{11.6}$$

es decir, por la parte simétrica del gradiente del campo de velocidades. Además, vimos que para movimientos isocóricos, que trataremos en este capítulo, se verifica que

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{11.7}$$

Consideremos entonces el conjunto $\mathscr{V}$ de todos los campos de velocidades que pueden caracterizar el movimiento de las partículas. Siendo que estaremos estudiando flujos incompresibles, y considerando restricciones cinemáticas sobre parte de la frontera del dominio de análisis $\mathscr{B}_0$, que llamaremos $\partial\mathscr{B}_{0v}$, tenemos el siguiente conjunto de campos cinemáticamente admisibles

$$\mathrm{Kin}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ en } \mathscr{B}_0,\, \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \text{ en } \partial\mathscr{B}_{0v}\}. \tag{11.8}$$

Es importante notar aquí que, siendo $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$, hemos adoptado una descripción Euleriana (o espacial), donde los campos están definidos en un dominio arbitrariamente escogido por nosotros que llamamos $\mathscr{B}_0$. Este dominio puede ser, por ejemplo, el dominio ocupado por las partículas $\mathbf{X}$ en el instante $t = t_0$. Sin embargo, como dicho, su definición es completamente arbitraria. Asumiremos en este capítulo que $\mathscr{B}_0$ permanece invariante en el tiempo[1] Por último, observe que hemos considerado que la velocidad de las partículas sobre la parte del contorno $\partial\mathscr{B}_{0v}$ está prescripta por $\bar{\mathbf{v}}$.

Observe que Kin_v definido en (11.8) es una variedad lineal, y por lo tanto es una translación de un espacio vectorial. Este espacio vectorial está definido por

$$\mathrm{Var}_v = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ en } \mathscr{B}_0,\, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\mathscr{B}_{0v}\}, \tag{11.9}$$

verificándose

$$\mathrm{Kin}_v = \mathbf{v}_0 + \mathrm{Var}_v \qquad \mathbf{v}_0 \in \mathrm{Kin}_v \text{ arbitrario}. \tag{11.10}$$

Diremos que una tasa de deformación $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathscr{W}$ es compatible, si es posible encontrar $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ tal que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{v})^s. \tag{11.11}$$

Definimos entonces el operador $\mathscr{D}(\cdot) = (\nabla(\cdot))^s : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ que para cada campo $\mathbf{v} \in \mathscr{V}$ le corresponde un tensor tasa de deformación $\boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla\mathbf{v})^s$. Al igual que en el Capítulo 3, el espacio nulo $\mathscr{N}(\mathscr{D})$ está dado por

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{O} \text{ en } \mathscr{B}_0\}, \tag{11.12}$$

es decir, por todos aquellos campos de velocidades cuya forma funcional es $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{W}_O(\mathbf{x} - O)$, donde $\mathbf{v}_O$ es un campo de velocidades uniforme en $\mathscr{B}_0$, O es un vector constante y $\mathbf{W}_O$ es un tensor antisimétrico uniforme en $\mathscr{B}_0$.

[1] En problemas de flujos en dominios móviles, esta restricción es eliminada, y el dominio de definición del problema depende del tiempo. Es más, el dominio puede depender de la propia solución del problema, como es el caso típico de problemas de interacción fluido-estructura.

11.3 Principio de la Potencia Virtual

En la sección anterior, hemos introducido todos los elementos básicos que describen la cinemática del problema. Así, vemos que las acciones de movimiento que son capaces de generar potencia externa están dadas por campos vectoriales que representan campos de velocidad. Procedemos entonces a caracterizar los esfuerzos externos por medio de funcionales lineales y continuos $f : \mathscr{V} \to \mathbb{R}$, es decir $f \in \mathscr{V}'$. Luego, la aplicación de estos funcionales lineales y continuos resulta en la *potencia externa*, dada por

$$P_e = \langle f, \mathbf{v} \rangle, \tag{11.13}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto de dualidad entre elementos de $\mathscr{V}'$ y $\mathscr{V}$. Veremos más adelante que el Principio de la Potencia Virtual (PPV) nos permitirá explorar en detalle la forma funcional de los elementos $f \in \mathscr{V}'$.

En relación a la caracterización de los esfuerzos internos, seguiremos el mismo procedimiento realizado en el Capítulo 3, que repetimos aquí para dejar el presente capítulo más autocontenido. Comencemos introduciendo la potencia interna, denotada por P_i, como un funcional lineal y continuo sobre el espacio de campos de acción de movimiento y de campos de gradientes de estas acciones. Es decir

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_0} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v}) dV, \tag{11.14}$$

donde $\mathbf{f}$ es un campo vectorial y $\boldsymbol{\sigma}$ un campo tensorial de segundo orden. Pero, las acciones de movimiento rígidas no permiten evaluar potencia, es decir $P_i = 0$ $\forall \mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$. Luego, considerando un campo de velocidades uniforme $\mathbf{v} = \mathbf{c}$ en $\mathscr{B}_0$, de (11.14) tenemos que

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{f} \cdot \mathbf{c} dV = 0 \quad \forall \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3, \tag{11.15}$$

y como esto debe valer para toda parte del dominio $\mathscr{B}_0$ llegamos a que

$$\mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}_0. \tag{11.16}$$

Si consideramos ahora una acción de movimiento rígida de la forma $\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + \mathbf{W}_O(\mathbf{x} - O)$, con $\mathbf{W}_O$ uniforme en $\mathscr{B}_0$, la (11.14) resulta

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{W}_O dV = 0 \quad \forall \mathbf{W}_O \in Skw, \tag{11.17}$$

y como esto debe ser verificado para toda parte de $\mathscr{B}_0$ obtenemos que

$$\boldsymbol{\sigma} \in Sym \quad \forall \mathbf{x} \in \mathscr{B}_0. \tag{11.18}$$

Estos resultados nos indican que la potencia interna está dada por

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = -(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}), \tag{11.19}$$

o sea, el esfuerzo interno está caracterizado por un funcional lineal y continuo sobre el espacio de tasas de deformación $\mathscr{W}$. De la misma forma que en el Capítulo 3, los campos tensoriales de segundo orden simétricos $\boldsymbol{\sigma}$ son llamados *campos de tensión de Cauchy*.

Antes de proseguir con la enunciación del PPV, veamos una particularización de la expresión de la potencia interna para el caso de acciones de movimiento isocóricas, que son las que consideraremos en el PPV. Para acciones de movimiento incompresibles, tenemos que (11.7) se satisface, lo que implica que

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon} = 0. \tag{11.20}$$

Recordemos aquí la descomposición de un tensor de segundo orden $\mathbf{A}$ en sus componentes hidrostática $\mathbf{A}^H$ y desviadora $\mathbf{A}^D$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^H + \mathbf{A}^D, \tag{11.21}$$

$$\mathbf{A}^H = \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{I}, \tag{11.22}$$

$$\mathbf{A}^D = \mathbf{A} - \frac{1}{3}(\operatorname{tr}\mathbf{A})\mathbf{I}, \tag{11.23}$$

donde claramente se verifica que $\operatorname{tr}\mathbf{A}^D = 0$.

Tomando la (11.24), expresando cada campo tensorial por medio de sus partes hidrostática y desviadora y haciendo uso de la (11.20) obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} P_i = -\int_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} dV = -\int_{\mathscr{B}_0} \left(\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D\right) \cdot \left(\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{I} + \boldsymbol{\varepsilon}^D\right) dV = \\ -\int_{\mathscr{B}_0} \left(\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D\right) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D dV = -\int_{\mathscr{B}_0} \left(\frac{1}{3}(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})(\operatorname{tr}\boldsymbol{\varepsilon}^D) + \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D\right) dV = \\ -\int_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^D dV = -(\boldsymbol{\sigma}^D, \boldsymbol{\varepsilon}^D). \end{aligned} \tag{11.24}$$

La (11.24) nos indica que la potencia interna es un funcional lineal y continuo sobre el subespacio $\mathscr{W}_D \subset \mathscr{W}$ formado por todas las acciones de movimiento isocóricas. De forma dual, la potencia interna está caracterizada por un campo de tensión de Cauchy desviador, o, en otras palabras, la componente hidrostática $\boldsymbol{\sigma}^H$ no contribuye para la potencia interna.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el PPV. Decimos que el sistema, cuyo dominio de estudio es $\mathscr{B}_0$, está en equilibrio, bajo la acción externa $f \in \mathscr{V}'$, si

- se satisface
$$P_e = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \operatorname{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{11.25}$$
o sea que la potencia externa debe ser nula para cualquier acción de movimiento cinemáticamente admisible y rígida;

- y también se verifica

$$P_i + P_e = -(\sigma^D, (\nabla \hat{\mathbf{v}})^s) + \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{11.26}$$

es decir que la suma de las potencias interna y externa se anulan para toda acción de movimiento ciniemáticamente admisible.

Observe que en la (11.26) hemos hecho uso de la siguiente identidad para campos isocóricos

$$\varepsilon^D = ((\nabla \mathbf{v})^s)^D = (\nabla \mathbf{v})^s - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}[(\nabla \mathbf{v})^s])\mathbf{I} = (\nabla \mathbf{v})^s - \frac{1}{3}(\mathrm{tr}(\nabla \mathbf{v}))\mathbf{I} = (\nabla \mathbf{v})^s - \frac{1}{3}(\mathrm{div}\, \mathbf{v})\mathbf{I} = (\nabla \mathbf{v})^s. \tag{11.27}$$

Vamos ahora a establecer la existencia de un campo σ^D para un dado f equilibrado, es decir que satisface la primera parte del PPV. Esto es establecido por el siguiente resultado.

Teorema 11.1 Teorema de Representación. *Si $f \in \mathscr{V}'$ está en equilibrio, existe $\sigma^D \in \mathscr{W}'$ y $r \in \mathscr{V}'$ tales que*

$$f = \mathscr{D}^* \sigma^D - r, \tag{11.28}$$

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v \Leftrightarrow r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}, \tag{11.29}$$

donde r es la reacción de vínculo. De esta manera, decimos que σ^D y r equilibran f.

Demostración. Como f está en equilibrio se tiene

$$f \in (\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}))^{\perp} \Leftrightarrow f \in \mathrm{Var}_v^{\perp} + \mathscr{N}(\mathscr{D})^{\perp}. \tag{11.30}$$

Como $\mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$ se tiene $\mathscr{D}\mathbf{v} = \mathbf{O}$, y en consecuencia

$$\langle \mathscr{D}^* \sigma^D, \mathbf{v} \rangle = (\sigma^D, \mathscr{D}\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \sigma^D \in \mathscr{W}', \tag{11.31}$$

o sea que $\mathbf{v} \in R(\mathscr{D}^*)^{\perp}$, luego $\mathscr{N}(\mathscr{D}) = R(\mathscr{D}^*)^{\perp}$, es decir

$$\mathscr{N}(\mathscr{D})^{\perp} = R(\mathscr{D}^*). \tag{11.32}$$

Esto, reemplazado en la (11.30) nos permite concluir que

$$f \in \mathrm{Var}_v^{\perp} + R(\mathscr{D}^*), \tag{11.33}$$

de donde se obtiene que existen $\sigma^D \in \mathscr{W}'$ y $-r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}$ tales que

$$f = \mathscr{D}^* \sigma^D - r, \tag{11.34}$$

y como $-r \in \mathrm{Var}_v^{\perp}$ directamente tenemos que

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{11.35}$$

■

El resultado anterior nos permite concluir que $\boldsymbol{\sigma}^D$ existe. Sin embargo, en este problema de flujo incompresible esta caracterización es particularmente importante, porque nos permite conocer la estructura de la reacción de vínculo r.

Concluimos entonces del teorema de representación lo siguiente

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^* \boldsymbol{\sigma}^D - r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \langle \mathscr{D}^* \boldsymbol{\sigma}^D, \hat{\mathbf{v}} \rangle = (\boldsymbol{\sigma}^D, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{11.36}$$

es decir

$$(\boldsymbol{\sigma}^D, \mathscr{D}\hat{\mathbf{v}}) = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{11.37}$$

llegando así a mostrar la segunda parte del PPV.

Explicitemos ahora la forma de la potencia interna, lo que nos permitirá caracterizar mejor los esfuerzos externos compatibles con el modelo. De esta forma, a partir del PPV tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot (\nabla \hat{\mathbf{v}})^s dV = \langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{11.38}$$

Asumiendo que la regularidad de los campos es suficiente para integrar por partes, y recordando que $\boldsymbol{\sigma}^D$ es un tensor de segundo orden simétrico, procedemos de la siguiente forma

$$\int_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot (\nabla \hat{\mathbf{v}})^s dV = \int_{\mathscr{B}_0} \boldsymbol{\sigma}^D \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} dV = \int_{\mathscr{B}_0} \left[\mathrm{div}\,(\boldsymbol{\sigma}^D \hat{\mathbf{v}}) - (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \hat{\mathbf{v}} \right] dV = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dS - \int_{\mathscr{B}_0} (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \hat{\mathbf{v}} dV, \tag{11.39}$$

donde hemos llevado en cuenta que $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ sobre $\partial \mathscr{B}_{0v}$ y donde también $\partial \mathscr{B}_0 = \partial \mathscr{B}_{0v} \cup \partial \mathscr{B}_{0t}$ con $\partial \mathscr{B}_{0v} \cap \partial \mathscr{B}_{0t} = \emptyset$. El vector $\mathbf{n}$ denota la normal exterior a estos contornos. Así, podemos caracterizar el elemento $f \in \mathscr{V}'$ de la siguiente forma

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dS - \int_{\mathscr{B}_0} (\mathrm{div}\,\boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \hat{\mathbf{v}} dV, \tag{11.40}$$

es decir, f está definido por medio de dos elementos, una fuerza por unidad de volumen, que denotaremos por $\mathbf{b}^*$, actuando en $\mathscr{B}_0$ y por una fuerza por unidad de superficie, que llamaremos $\mathbf{t}$, actuando sobre la parte de la frontera $\partial \mathscr{B}_{0t}$. Luego

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b}^* \cdot \hat{\mathbf{v}} dV. \tag{11.41}$$

En el caso del análisis de flujos de fluidos, las aceleraciones de las partículas son una importante contribución para la potencia externa, y tal contribución queda caracterizada dentro del elemento $\mathbf{b}^*$. Con efecto, introduciendo las fuerzas debido a

las aceleraciones de las partículas $-\rho\dot{\mathbf{v}}$, siendo ρ la densidad del fluido (que por el hecho de ser un fluido incompresible es un valor constante), y definiendo $\mathbf{b}^* = \mathbf{b} - \rho\dot{\mathbf{v}}$, la (11.41) resulta

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV - \int_{\mathscr{B}_0} \rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV. \tag{11.42}$$

De esta forma, el PPV adquiere la siguiente forma

$$\int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\sigma}^D \cdot (\nabla\hat{\mathbf{v}})^s\right] dV = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{11.43}$$

donde, de la (11.5), recuerde que

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v})\mathbf{v}. \tag{11.44}$$

Observe que existe un paralelo total entre el desarrollo del PPV para medios fluidos como tratado aquí y el PPV para cuerpos sólidos presentado en el Capítulo 3.

Para encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema variacional (11.43) asumimos nuevamente que la regularidad de los campos es suficiente para integrar por partes. De esta manera tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho\dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} - (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^D) \cdot \hat{\mathbf{v}}\right] dV + \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} (\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dS = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v, \tag{11.45}$$

y agrupando términos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho\dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{b}\right] \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \left[\boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{n} - \mathbf{t}\right] \cdot \hat{\mathbf{v}} dS = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{11.46}$$

Para derivar las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso procederemos con mayor cuidado debido a la particularidad de la restricción cinemática asociada a la incompresibilidad presente en Var_v. Consideremos primero $\mathrm{Var}_v^0 \subset \mathrm{Var}_v$ definido como

$$\mathrm{Var}_v^0 = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ en } \mathscr{B}_0,\, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \partial \mathscr{B}_0\}. \tag{11.47}$$

Por lo tanto, de (11.46) tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho\dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{b}\right] \cdot \hat{\mathbf{v}} dV = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v^0. \tag{11.48}$$

O sea, el elemento entre corchetes pertenece al complemento ortogonal de Var_v^0, es decir

$$\rho\dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{b} \in (\mathrm{Var}_v^0)^{\perp}. \tag{11.49}$$

Esto nos indica que ese elemento es un vector que se expresa como el gradiente de un campo escalar, digamos $-p$, es decir

$$\rho\dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{b} = -\nabla p \quad \text{en } \mathscr{B}_0. \tag{11.50}$$

Con efecto, para entender esta consecuencia considere un campo $\mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v^0$ y considere también un vector $\mathbf{s}$. Entonces escribimos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{s}\cdot\mathbf{w}dV = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v^0, \tag{11.51}$$

Poniendo que $\mathbf{s}$ deriva del gradiente de un campo escalar, es decir $\mathbf{s} = \nabla\phi$, tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \nabla\phi\cdot\mathbf{w}dV = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v^0, \tag{11.52}$$

e integrando por partes (asumiendo que los campos son suficientemente regulares) resulta

$$-\int_{\mathscr{B}_0} \phi \operatorname{div}\mathbf{w}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_0} \phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}dS = -\int_{\mathscr{B}_0} \phi\operatorname{div}\mathbf{w}dV = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v^0, \tag{11.53}$$

donde hemos usado el hecho de ser $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ en $\partial\mathscr{B}_0$. Esta identidad se verifica trivialmente pues $\mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v^0$. Luego, concluimos que los campos que derivan de un gradiente son campos vectoriales en el complemento ortogonal de Var_v^0. Es decir, para $\mathbf{s} = \nabla\phi$, entonces $\mathbf{s} \in (\mathrm{Var}_v^0)^{\perp}$. Así, verificamos que a través de la (11.50) estamos verificando la condición de ortogonalidad (11.49). Una discusión más extendida y matemáticamente más detallada puede ser encontrada en [119, 283].

Con el resultado encontrado en (11.50) volvamos a la expresión (11.46). Dada la condición de ortogonalidad (11.52), obtenemos

$$\int_{\partial\mathscr{B}_{0t}} (\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{n} - \mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}dS = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{11.54}$$

Consideremos ahora un campo $\mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v$ y sea el vector $\mathbf{s} = \nabla\phi$. Entonces se tiene

$$\int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{s}\cdot\mathbf{w}dV = \int_{\mathscr{B}_0} \nabla\phi\cdot\mathbf{w}dV = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v. \tag{11.55}$$

Luego, integrando por partes y usando el hecho de ser $\operatorname{div}\mathbf{w} = 0$, resulta

$$-\int_{\mathscr{B}_0} \phi\operatorname{div}\mathbf{w}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_0} \phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}dS = \int_{\partial\mathscr{B}_{0t}} \phi\mathbf{n}\cdot\mathbf{w}dS = 0 \quad \forall \mathbf{w} \in \mathrm{Var}_v. \tag{11.56}$$

Consecuentemente, y siendo nuevamente $\phi = p$, de la (11.54) se tiene que

$$\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{n} - \mathbf{t} = p\mathbf{n} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_{0t}. \tag{11.57}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange resultan entonces las siguientes

$$\rho\dot{\mathbf{v}} + \nabla p - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^D = \mathbf{b} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.58}$$

$$-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{0t}, \tag{11.59}$$

las cuales sumadas a las restricciones cinemáticas

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.60}$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{0v}, \tag{11.61}$$

nos permiten escribir el PPV (11.43) en su forma local, o forma fuerte.

Se observa aquí que emerge un campo escalar p en las ecuaciones de equilibrio. Este campo escalar es llamado *presión mecánica del fluido*, o simplemente *presión del fluido*. En particular la presión contribuye a la definición del *tensor de tensión de Cauchy* desarrollando la componente hidrostática del tensor $\boldsymbol{\sigma}$. De hecho, ahora podemos escribir

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}^D, \tag{11.62}$$

y de esta manera las ecuaciones (11.58)-(11.59) adquieren un formato totalmente equivalente al caso ya visto de la mecánica de sólidos

$$\rho\dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.63}$$

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{0t}. \tag{11.64}$$

Si bien en este punto ya hemos proporcionado una caracterización explícita para el espacio ortogonal al espacio de campos vectoriales con divergencia nula, vamos ahora a caracterizar la reacción de vínculo $r \in \mathscr{V}'$. Para esto, debemos eliminar todas las restricciones del espacio Var_v, es decir

$$\langle f, \hat{\mathbf{v}}\rangle = \langle \mathscr{D}^*\boldsymbol{\sigma}^D, \hat{\mathbf{v}}\rangle - \langle r, \hat{\mathbf{v}}\rangle \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}, \tag{11.65}$$

y empleando la expresión (11.43) del PPV tenemos

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}}\rangle = \int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho\dot{\mathbf{v}}\cdot\hat{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\sigma}^D\cdot(\nabla\hat{\mathbf{v}})^s\right]dV - \int_{\partial\mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS - \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dV \qquad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}, \tag{11.66}$$

y, luego de integrar por partes y agrupar términos,

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}}\rangle = \int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho\dot{\mathbf{v}} - \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}^D - \mathbf{b}\right]\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{0t}} \left[\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{n} - \mathbf{t}\right]\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS + \int_{\partial\mathscr{B}_{0v}} (\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{n})\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}, \tag{11.67}$$

Por lo tanto, se llega a lo siguiente

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}}\rangle = -\int_{\mathscr{B}_0} \nabla p\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{0t}} p\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS + \int_{\partial\mathscr{B}_{0v}} (\boldsymbol{\sigma}^D\mathbf{n})\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS \quad \forall\hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}. \tag{11.68}$$

Integrando por partes el primer término del lado derecho resulta

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_0} p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial \mathscr{B}_{0v}} \left[-p\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{n} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}} dS \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}. \tag{11.69}$$

Note que la reacción de vínculo está caracterizada por dos elementos correspondientes a cada una de las restricciones cinemáticas, la de incompresibilidad $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ en $\mathscr{B}_0$ y la de velocidad prescripta en $\partial \mathscr{B}_{0v}$. Si llamamos a estos dos elementos r_1 (un campo escalar definido en $\mathscr{B}_0$) y $\mathbf{r}_2$ (un campo vectorial definido en $\partial \mathscr{B}_{0v}$), respectivamente, tenemos

$$\langle r, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_0} r_1 \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial \mathscr{B}_{0v}} \mathbf{r}_2 \cdot \hat{\mathbf{v}} dS. \tag{11.70}$$

Comparando (11.70) con (11.69), llegamos a que la forma local que caracteriza las reacciones de vínculo r_1 y $\mathbf{r}_2$ es la siguiente

$$r_1 = p \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.71}$$

$$\mathbf{r}_2 = -p\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}^D \mathbf{n} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{0v}. \tag{11.72}$$

La reacción de vínculo r_1 es la presión. Es decir, la existencia del campo de presión en este caso fue omitida en todo el desarrollo del modelo, siendo que la misma aparece naturalmente como una reacción de vínculo a la restricción cinemática asociada a la divergencia del campo de velocidades, y por lo tanto, la misma no podrá ser caracterizada a través del comportamiento del medio (fluido) vía ecuaciones constitutivas.

11.4 Ecuaciones de Navier-Stokes

Vamos a considerar ahora el caso particular de fluidos cuyo comportamiento constitutivo es de tipo Newtoniano. Esto implica que la relación entre el tensor de tensión de Cauchy y el tensor tasa de deformación viene dado por un valor constante. En particular, es

$$\boldsymbol{\sigma}^D = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}^D = \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)^D, \tag{11.73}$$

donde μ es llamada viscosidad dinámica del fluido y es una propiedad que es estrictamente positiva, es decir $\mu > \mu_o > 0$. Como el campo de velocidades posee divergencia nula, es equivalente escribir

$$\boldsymbol{\sigma}^D = \mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T). \tag{11.74}$$

Ahora, la operación de divergência sobre el tensor $\boldsymbol{\sigma}^D$ dado por (11.74), y asumiendo que μ es una propiedad constante, resulta

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^D = \operatorname{div} [\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)] = \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}) + \mu \operatorname{div} (\nabla \mathbf{v}^T) = \mu \triangle \mathbf{v}, \tag{11.75}$$

donde hemos usado el hecho de ser $\mathrm{div}\,(\nabla \mathbf{v}^T) = \nabla(\mathrm{div}\,\mathbf{v}) = \mathbf{0}$.

Considerando el comportamiento constitutivo (11.74), en particular la (11.75), y llevando también en cuenta la expresión de la derivada material (11.44), a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange (11.58)-(11.59), y considerando las restricciones (11.60)-(11.61), se tiene

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} + \nabla p - \mu \triangle \mathbf{v} = \mathbf{b} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.76}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.77}$$

$$-p\mathbf{n} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{0t}, \tag{11.78}$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{0v}. \tag{11.79}$$

El sistema de ecuaciones dado por (11.76)-(11.79) describe de forma local el flujo de fluidos Newtonianos homogéneos e incompresibles. Estas ecuaciones son las conocidas *ecuaciones de Navier-Stokes*.

La forma más usual de derivar estas ecuaciones es a través de las llamadas leyes de conservación. Principios de conservação de masa y de movimiento derivan en el sistema anterior. Diferentemente, aquí hemos llegado a estas ecuaciones empleando el marco variacional de forma análoga al caso de mecánica de sólidos con la salvedad de las siguientes dos diferencias: (i) el comportamiento constitutivo, (ii) la restricción sobre la incompresibilidad del fluido[2].

Antes de cerrar esta sección, particularicemos el PPV dado por la (11.43) para el caso de fluidos Newtonianos, como sigue

$$\int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \rho(\nabla \mathbf{v})\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} \right] dV = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \tag{11.80}$$

Según vimos en la (11.71), la presión del fluido posee el significado de ser la reacción de vínculo a la imposición de la restricción de incompresibilidad. De esta forma, podemos relajar esta restricción, eliminándola del conjunto Kin_v y consecuentemente del espacio Var_v, y podemos imponer la misma por medio de un multiplicador de Lagrange, que será, como visto, el propio campo de presión. Para esto, consideremos

$$\mathrm{Kin}_v^* = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \text{ en } \partial \mathscr{B}_{0v}\}, \tag{11.81}$$

$$\mathrm{Var}_v^* = \{\mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \partial \mathscr{B}_{0v}\}. \tag{11.82}$$

Entonces, debemos sumar en el lado izquierdo de la (11.80) los siguientes términos que contribuyen con la potencia producida en dualidad por el multiplicador de La-

[2] Una analogía todavía más próxima ocurre entre el caso de sólidos y fluidos si en el caso de la mecánica de sólidos visto en el Capítulo 3 nos dedicamos a estudiar el caso de sólidos incompresibles.

grange (la presión p) y la restricción que se desea prescribir

$$-\int_{\mathscr{B}_0}\left[p\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}}+\hat{p}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right]dV, \tag{11.83}$$

donde p y $\hat{p}$ pertenecen a un espacio de funciones, digamos $\mathscr{P}$, con regularidad suficiente para que las operaciones tengan sentido. En este caso tal espacio es $\mathscr{P}=L^2(\mathscr{B}_0)$. Como consecuencia, de la (11.80) pasamos a tener el siguiente problema variacional: encuentre $(\mathbf{v},p)\in \mathrm{Kin}_v^*\times\mathscr{P}$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}_0}\left[\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{v}}+\rho(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}}+\mu(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T)\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}-p\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}}-\hat{p}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right]dV=$$
$$\int_{\partial\mathscr{B}_{0t}}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS+\int_{\mathscr{B}_0}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV\quad\forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{p})\in\mathrm{Var}_v^*\times\mathscr{P}. \tag{11.84}$$

Puede ser verificado rápidamente que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la formulación variacional (11.84) están dadas por (11.76)-(11.79).

11.5 Flujo de Stokes

Un caso particular de las ecuaciones de Navier-Stokes se da para el caso en el que los fenómenos de difusión de las tensiones de corte es dominante sobre los fenómenos convectivos. Tales casos están caracterizados por un número adimensional llamado *número de Reynolds*, definido como

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho VL}{\mu}, \tag{11.85}$$

donde V es una velocidad característica del fluido y L es una longitud característica en el problema. Cuando $\mathrm{Re}\ll 1$ los fenómenos convectivos son despreciables frente a la difusión de las tensiones de corte, y, por lo tanto, las fuerzas de aceleración de las partículas no contribuyen al balance de potencia dado por la (11.84), o, equivalentemente, al balance de fuerzas dado por la (11.76). En ese caso, el problema variacional (11.84) resulta el siguiente: encuentre $(\mathbf{v},p)\in\mathrm{Kin}_v^*\times\mathscr{P}$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}_0}\left[\mu(\nabla\mathbf{v}+(\nabla\mathbf{v})^T)\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}-p\,\mathrm{div}\,\hat{\mathbf{v}}-\hat{p}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right]dV=\int_{\partial\mathscr{B}_{0t}}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS+\int_{\mathscr{B}_0}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV$$
$$\forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{p})\in\mathrm{Var}_v^*\times\mathscr{P}. \tag{11.86}$$

De forma análoga, podemos trabajar con Kin_v y Var_v donde la restricción de incompresibilidad está dentro de la definición de estos conjuntos. Así, el problema (11.86) se escribe como: encuentre $\mathbf{v}\in\mathrm{Kin}_v$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}_0} \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T) \cdot \nabla \hat{\mathbf{v}} dV = \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathrm{Var}_v. \quad (11.87)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al problema (11.86) (o equivalentemente a (11.87)) resultan directamente

$$\nabla p - \mu \triangle \mathbf{v} = \mathbf{b} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \quad (11.88)$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{v} = 0 \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \quad (11.89)$$

$$-p\mathbf{n} + \mu(\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T)\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{0t}, \quad (11.90)$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{0v}. \quad (11.91)$$

En particular, el problema variacional (11.87) puede ser entendido como la condición necesaria (y en este caso suficiente) para que un funcional costo (que construiremos a seguir) alcance un punto mínimo. Procederemos con el caso de fluidos Newtonianos, pero el procedimiento es válido para casos más generales. Observe que la lei constitutiva (11.73) puede ser escrita como

$$\overline{\sigma}^D = 2\mu \overline{\varepsilon}^D = \left. \frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon = \overline{\varepsilon}^D}, \quad (11.92)$$

donde π es un funcional constitutivo dado, para el caso Newtoniano, por

$$\pi(\varepsilon) = \mu \varepsilon \cdot \varepsilon = \mu |\varepsilon|^2, \quad (11.93)$$

el cual es un funcional cuadrático en ε, y por lo tanto, como ocurría en el caso de elasticidad lineal visto en el Capítulo 4, se verifica que

$$\pi(\varepsilon) = \pi(\varepsilon_0) + \left. \frac{\partial \pi}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon_0} \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \pi}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon_0} (\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) = \pi(\varepsilon_0) + 2\mu \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0) + \mu(\varepsilon - \varepsilon_0) \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (11.94)$$

con lo que obtenemos

$$\pi(\varepsilon) - \pi(\varepsilon_0) \geq 2\mu \varepsilon_0 \cdot (\varepsilon - \varepsilon_0), \quad (11.95)$$

donde la igualdad se verifica para $\varepsilon = \varepsilon_0$. Para el caso de tasas de deformación compatibles, o sea $\varepsilon = (\nabla \mathbf{v})^s$ y $\varepsilon_0 = (\nabla \mathbf{v}_0)^s$ lo anterior es equivalente a

$$\pi((\nabla \mathbf{v})^s) - \pi((\nabla \mathbf{v}_0)^s) \geq 2\mu (\nabla \mathbf{v}_0)^s \cdot ((\nabla \mathbf{v})^s - (\nabla \mathbf{v}_0)^s). \quad (11.96)$$

Integrando en el dominio $\mathscr{B}_0$ tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \left(\pi((\nabla \mathbf{v})^s) - \pi((\nabla \mathbf{v}_0)^s) \right) dV \geq \int_{\mathscr{B}_0} 2\mu (\nabla \mathbf{v}_0)^s \cdot ((\nabla \mathbf{v})^s - (\nabla \mathbf{v}_0)^s) dV \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v. \quad (11.97)$$

El segundo miembro de la expresión anterior no es otra cosa que el primer término del problema variacional (11.87). Por lo tanto, usando tal formulación (11.87), tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_0} \big(\pi((\nabla \mathbf{v})^s) - \pi((\nabla \mathbf{v}_0)^s)\big) dV \geq \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) dS + \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) dV \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v. \quad (11.98)$$

Ahora, agrupando los términos a ambos lados de la desigualdad resulta

$$\Pi(\mathbf{v}) = \int_{\mathscr{B}_0} \pi((\nabla \mathbf{v})^s) dV - \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV \geq \int_{\mathscr{B}_0} \pi((\nabla \mathbf{v}_0)^s) dV - \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v}_0 dS - \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_0 dV = \Pi(\mathbf{v}_0) \quad \forall \mathbf{v} \in \mathrm{Kin}_v. \quad (11.99)$$

La igualdad en la expresión anterior se verifica si $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}_0$ se diferencian en un campo de velocidades de cuerpo rígido. De esta forma, hemos llegado a formular el problema variacional (11.86) como siendo el problema de encontrar $\mathbf{v}_0 \in \mathrm{Kin}_v$ tal que minimice el siguiente funcional

$$\Pi(\mathbf{v}) = \int_{\mathscr{B}_0} \mu |(\nabla \mathbf{v})^s|^2 dV - \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (11.100)$$

De forma alternativa, podemos relajar la restricción $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ presente en Kin_v a través de un multiplicador de Lagrange. Así, el problema de minimizar Π dado por (11.100) se transforma en el problema de encontrar el punto estacionario $(\mathbf{v}_0, p_0) \in \mathrm{Kin}_v^* \times \mathscr{P}$ del siguiente funcional

$$\Lambda(\mathbf{v}, p) = \int_{\mathscr{B}_0} \mu |(\nabla \mathbf{v})^s|^2 dV - \int_{\mathscr{B}_0} p \operatorname{div} \mathbf{v} dV - \int_{\partial \mathscr{B}_{0t}} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV. \quad (11.101)$$

Es directo mostrar que la formulación variacional (11.86) emerge como la condición necesaria del punto estacionario del funcional (11.101).

11.6 Flujo Irrotacional

Agreguemos ahora una restricción adicional al campo de velocidades admitiendo que el mismo es irrotacional, es decir, que $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \mathbf{0}$ en $\mathscr{B}_0$. Con esta restricción, y sabiendo que $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, tenemos que el campo de velocidades es armónico. En efecto, recordemos que

$$\operatorname{curl}\mathbf{v}\times\mathbf{a}=(\nabla\mathbf{v}-\nabla\mathbf{v}^T)\mathbf{a}\quad\forall\mathbf{a}\in\mathbb{R}^3, \tag{11.102}$$

tenemos que $\operatorname{curl}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ es equivalente a lo siguiente

$$\nabla\mathbf{v}=\nabla\mathbf{v}^T \tag{11.103}$$

De esta forma,

$$\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v}-\nabla\mathbf{v}^T)=\triangle\mathbf{v}-\nabla(\operatorname{div}\mathbf{v})=\triangle\mathbf{v}, \tag{11.104}$$

y en consecuencia

$$\triangle\mathbf{v}=\mathbf{0}. \tag{11.105}$$

En los pasos que siguen, y para facilitar la presentación, vamos a considerar $\partial\mathscr{B}_{0t}=\emptyset$, con esto presente y de lo anterior tenemos

$$\int_{\mathscr{B}_0}\sigma^D\cdot\hat{\varepsilon}dV=\int_{\mathscr{B}_0}\mu(\nabla\hat{\mathbf{v}}+(\nabla\hat{\mathbf{v}})^T)\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}dV=\int_{\mathscr{B}_0}2\mu\nabla\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}dV=0 \quad \forall(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}})\in\mathrm{Kin}_v^i\times\mathrm{Var}_v^i, \tag{11.106}$$

donde

$$\mathrm{Kin}_v^i=\{\mathbf{v}\in\mathscr{V};\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\operatorname{curl}\mathbf{v}=\mathbf{0}\text{ en }\mathscr{B}_0,\mathbf{v}=\bar{\mathbf{v}}\text{ en }\partial\mathscr{B}_0\}, \tag{11.107}$$

$$\mathrm{Var}_v^i=\{\mathbf{v}\in\mathscr{V};\operatorname{div}\mathbf{v}=0,\operatorname{curl}\mathbf{v}=\mathbf{0}\text{ en }\mathscr{B}_0,\mathbf{v}=\mathbf{0}\text{ en }\partial\mathscr{B}_0\}, \tag{11.108}$$

De hecho, integrando por partes la (11.106), considerando μ constante y sabiendo que $\mathbf{v}$ es un campo armónico, resulta

$$\int_{\mathscr{B}_0}2\mu\nabla\mathbf{v}\cdot\nabla\hat{\mathbf{v}}dV=-2\mu\int_{\mathscr{B}_0}\operatorname{div}(\nabla\mathbf{v})\cdot\hat{\mathbf{v}}dV=-2\mu\int_{\mathscr{B}_0}\triangle\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV=0 \quad \forall(\mathbf{v},\hat{\mathbf{v}})\in\mathrm{Kin}_v^i\times\mathrm{Var}_v^i, \tag{11.109}$$

Luego, el PPV (11.80), particularizado para el caso de flujo irrotacional, resulta

$$\int_{\mathscr{B}_0}\left[\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{v}}+\rho(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}}\right]dV=\int_{\mathscr{B}_0}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV\quad\forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathrm{Var}_v^i. \tag{11.110}$$

Para encontrar las ecuaciones de Euler-Lagrange relajamos la restricción de incompresibilidad e irrotacionalidad, obtenemos así

$$\int_{\mathscr{B}_0}\left[\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}\cdot\hat{\mathbf{v}}+\rho(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}\cdot\hat{\mathbf{v}}\right]dV-\int_{\mathscr{B}_0}\left[p\operatorname{div}\hat{\mathbf{v}}+\mathbf{h}\cdot\operatorname{curl}\hat{\mathbf{v}}\right]dV=\int_{\mathscr{B}_0}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV\quad\forall\hat{\mathbf{v}}\in\mathscr{V}_0. \tag{11.111}$$

donde

$$\mathscr{V}_0=\{\mathbf{v}\in\mathscr{V};\mathbf{v}=\mathbf{0}\text{ en }\partial\mathscr{B}_0\}. \tag{11.112}$$

Sabiendo que

$$\int_{\mathscr{B}_0} p \operatorname{div} \hat{\mathbf{v}} dV = \int_{\partial \mathscr{B}_0} p \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS - \int_{\mathscr{B}_0} \nabla p \cdot \hat{\mathbf{v}} dV, \tag{11.113}$$

$$\int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{h} \cdot \operatorname{curl} \hat{\mathbf{v}} dV = \int_{\partial \mathscr{B}_0} (\mathbf{n} \times \mathbf{h}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dS - \int_{\mathscr{B}_0} (\operatorname{curl} \mathbf{h}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dV. \tag{11.114}$$

de la (11.111) se tiene

$$\int_{\mathscr{B}_0} \left[\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} + \nabla p + \operatorname{curl} \mathbf{h} \right] \cdot \hat{\mathbf{v}} dV = \int_{\mathscr{B}_0} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathscr{V}_0. \tag{11.115}$$

De esta forma, las ecuaciones de Euler-Lagrange junto con las restricciones cinemáticas resultan las siguientes

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} + \nabla p + \operatorname{curl} \mathbf{h} = \mathbf{b} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.116}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.117}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} = \mathbf{0} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.118}$$

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_0. \tag{11.119}$$

Admitiendo ahora que la carga $\mathbf{b}$ proviene de un potencial Ψ, tenemos

$$\mathbf{b} = -\nabla \Psi, \tag{11.120}$$

y de la condición de irrotacionalidad se obtiene

$$(\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})^T \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{v}|^2. \tag{11.121}$$

Como consecuencia, la (11.116) resulta

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \Psi \right) + \operatorname{curl} \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.122}$$

Además, como $\operatorname{curl} \mathbf{v} = \mathbf{0}$, se tiene que $\mathbf{v}$ se puede escribir como el gradiente de un campo escalar, digamos Φ, o sea

$$\mathbf{v} = \nabla \Phi, \tag{11.123}$$

entonces la (11.122) resulta

$$\nabla \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} + p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \Psi \right) + \operatorname{curl} \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.124}$$

De la descomposición de Helmholtz, concluimos que cada uno de los términos anteriores debe ser independientemente nulo. O sea

$$\nabla\left(\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}+p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2+\Psi\right)=\mathbf{0} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.125}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{h}=\mathbf{0} \qquad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.126}$$

En el caso del problema ser estacionario, tenemos que $\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$, y por lo tanto

$$\nabla\left(p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2+\Psi\right)=\mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.127}$$

e introduciendo la siguiente definición

$$H=p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2+\Psi, \tag{11.128}$$

lo anterior nos dice que bajo tales condiciones de flujo, la variable H es una constante, es decir

$$H=\text{constante} \quad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.129}$$

o sea

$$p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2+\Psi=H_o \quad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.130}$$

donde H_o es la constante.

Haciendo ahora $\Psi=\rho gh$, donde g es la magnitud de la fuerza de la gravedad y h es la altura medida a partir de alguna referencia, encontramos que

$$p+\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2+\rho gh=H_o \quad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.131}$$

que es la celebrada *ecuación de Bernoulli*.

Esta expresión nos permite calcular, en flujos que satisfacen las hipótesis consideradas, el valor de la presión p en el fluido, para lo cual precisamos conocer la magnitud del campo de velocidades $|\mathbf{v}|$, y el valor de H_o en algún punto del sistema.

Corresponde ahora hacer la seguiente pregunta. Cómo encontramos $\mathbf{v}$ para el caso que estamos estudiando? Debido a las restricciones impuestas sobre el flujo, esto es, $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ y $\operatorname{curl}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ en $\mathscr{B}_0$, y $\mathbf{v}=\bar{\mathbf{v}}$ en $\partial\mathscr{B}_0$, tenemos que $\mathbf{v}$ queda determinada de manera única. Así, las restriciones sobre la cinemática proporcionan el campo de velocidades necesario para el cálculo de p.

En efecto, de $\operatorname{curl}\mathbf{v}=\mathbf{0}$ tenemos que la expresión (11.123) se debe verificar, y sabiendo que $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ en $\mathscr{B}_0$ esto nos conduce a

$$\triangle\Phi=0 \quad \text{en } \mathscr{B}_0, \tag{11.132}$$

con la condición de contorno

$$\nabla\Phi\cdot\mathbf{n}=\bar{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{n}=\bar{v}_n \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_0. \tag{11.133}$$

Con lo que ya sabemos, resulta fácil verificar que el problem de valor de contorno anterior dado por (11.132)-(11.133) no es otra cosa que las ecuaciones de Euler-

Lagrange del siguiente problema variacional: encuentre $\Phi \in \mathscr{Z}$ tal que

$$\int_{\mathscr{B}_0} \nabla\Phi \cdot \nabla\hat{\Phi} dV = \int_{\partial\mathscr{B}_0} \bar{v}_n \hat{\Phi} dS \quad \forall \hat{\Phi} \in \mathscr{Z}. \tag{11.134}$$

donde en este caso $\mathscr{Z} = H^1(\mathscr{B}_0)$.

La ecuación variacional anterior es conocida por *formulación potencial del problema del flujo irrotacional e incompresible*, ya que nos permite encontrar el potencial Φ que nos da el campo de velocidades $\mathbf{v}$.

Observe que el problema (11.134) posee condiciones de contorno de tipo Neumann en toda la frontera $\partial\mathscr{B}_0$. Esto implica que la condición de contorno debe satisfacer una restricción de compatibilidad. De hecho, considere en (11.134) que $\hat{\Phi} = C$ donde C es una constante, luego

$$\int_{\partial\mathscr{B}_0} \bar{v}_n \hat{C} dS = \hat{C} \int_{\partial\mathscr{B}_0} \bar{v}_n dS = 0, \tag{11.135}$$

es decir que $\bar{v}_n$ debe satisfacer

$$\int_{\partial\mathscr{B}_0} \bar{v}_n dS = 0. \tag{11.136}$$

Sin embargo, esta restricción ya es satisfecha por el campo de velocidades dado que el mismo es incompresible, lo que implica que

$$\int_{\mathscr{B}_0} \operatorname{div} \mathbf{v} dV = \int_{\partial\mathscr{B}_0} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial\mathscr{B}_0} \bar{v}_n dS = 0. \tag{11.137}$$

Tenemos por lo tanto que el problema variacional (11.134) está bien colocado.

Capítulo 12
Medios Continuos de Alto Orden

12.1 Introducción

La teoría de materiales micromorfos desarrollada a partir de la mitad del siglo XX por A.C. Eringen y compilada en sus obras [79, 80] considera el cuerpo material como un medio continuo compuesto por partćulas deformables, las cuales están caracterizadas por una estructura interna con tamaño no infinitesimal. El propósito de ir más allá de la descripción que la mecánica de medios continuos clásica proporciona, es la de llevar en cuenta la micro-estructura del cuerpo y los fenómenos que se producen en una escala menor, y esto hacerlo sin recurrir a un modelo completo multi-escala.

El principal obstáculo que este enfoque enfrenta es el desarrollo/obtención de ecuaciones constitutivas adecuadas. Desde el punto de vista experimental, es una tarea difícil el desarrollo de técnicas adecuadas para medir tensiones a nivel de escalas pequeñas y relacionarlos con el comportamiento observable del material en la escala del fenómeno que se está estudiando.

En este capítulo haremos uso nuevamente de la estructura variacional proporcionada por el *Método de la Potencia Virtual* presentado en el Capítulo 3 donde, a través de argumentos de dualidad entre acciones de movimiento representando tasas de deformación y esfuerzos internos; y entre acciones de movimiento y esfuerzos externos y con el uso del Principio de la Potencia Virtual (PPV), desarrollaremos, de manera sistemática, las bases de la formulación variacional para la teoría de medios micromorfos. Como objetivo secundario, analizaremos dos casos particulares: la teoría de segundo orden y la teoría de los medios micropolares. Nuevamente el lector encontrará en este capítulo semejanzas con el modelado de materiales con microestructura presentado en [115]. Sin embargo, será posible también apreciar las diferencias con ese marco teórico, principalmente en lo relacionado a la caracterización de los esfuerzos externos admisibles por el modelo.

Vale la pena resaltar que la teoría desarrollada aquí vale tanto para medios sólidos como para medios fluidos, desde que tales medios exhiban las particularidades cinemáticas propuestas en el presente capítulo. En el caso de sólidos, los desarro-

llos aquí presentados deben ser considerados válidos para la configuración espacial ocupada por el cuerpo en el espacio. Además, el lector estará en condiciones de desarrollar, a partir de las ideas aquí colocadas, y con lo visto en el Capítulo 10, modelos de transferência de calor de alto orden.

Así, primeramente estableceremos la descripción cinemática del problema, para luego caracterizar las velocidades de deformación que estarán involucradas en la evaluación de la potencia interna y que servirán para caracterizar los esfuerzos internos. De manera similar, deduciremos los esfuerzos externos admisibles con el modelo cinemático adoptado. Con estos elementos y el PPV presentaremos las ecuaciones variacionales que gobiernan el problema así como las ecuaciones de equilibrio locales (forma fuerte del problema) para los casos estático y dinámico. Por último, particularizaremos la teoría a los casos particulares de medios micropolares y teorías de segundo orden.

12.2 Cinemática

El primer paso hacia la formulación variacional de medios micromorfos consiste en la definición de la cinemática para este problema. Para ello, sea $\mathscr{B}_t$ el dominio ocupado por las partículas del medio continuo en el instante t, y $\partial\mathscr{B}_t$ su contorno, cuyo vector normal externo es $\mathbf{n}$. Llamaremos $\mathscr{B}$ al dominio ocupado por las partículas en un instante de referencia t_0. En este caso, para la configuración de referencia, las micro-partículas que componen la macro-partícula P ocupan la posición $\mathbf{X}' = \mathbf{X} + \mathbf{Y}$, donde $\mathbf{X}$ representa el vector posición de la macro-partícula e $\mathbf{Y}$ es el vector posición relativa de las micro-partículas en la micro-escala.

En el tiempo t, las micro-partículas que forman la macro-partícula P se encuentran en la posición $\mathscr{X}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) = \mathscr{X}(\mathbf{X},t) + \mathscr{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y},t)$, donde $\mathbf{x} = \mathscr{X}(\mathbf{X},t)$ es el vector posición de la macro-partícula e $\mathbf{y} = \mathscr{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y},t)$ es el vector posición relativa de las micro-partículas en la micro-escala.

Desde el punto de visto de la estructura interna (microestructura), cada una de estas macro-partículas P está asociada a un medio continuo de dominio finito Ω_μ, como se ve en la Figura 12.1.

Vemos así que el movimiento de las partículas en el medio continuo está caracterizado a partir de dos familias de funciones

$$\begin{aligned} \mathscr{X} : \mathscr{B} \times [t_0, t_f] &\to \mathscr{E}, \\ (\mathbf{X}, t) &\mapsto \mathbf{x} = \mathscr{X}(\mathbf{X}, t), \end{aligned} \tag{12.1}$$

y

$$\begin{aligned} \mathscr{R} : \mathscr{B} \times \Omega_\mu \times [t_0, t_f] &\to \mathscr{E}, \\ (\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t) &\mapsto \mathbf{y} = \mathscr{R}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, t), \end{aligned} \tag{12.2}$$

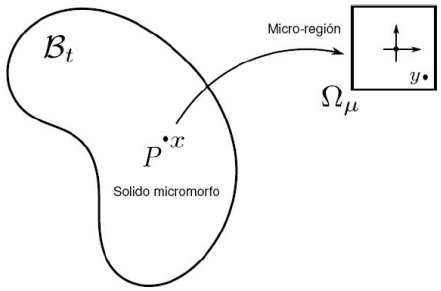


Fig. 12.1 Medio continuo micromorfo y micro-región asociada a cada partícula P del medio. La cinemática observable en la escala del problema estudiado queda definida por el campo vectorial $\mathbf{v}$ y por el campo tensorial de segundo orden χ.

siendo que $\mathscr{X}$ y $\mathscr{R}$ son llamados el macro-movimiento y el micro-movimiento, respectivamente [79].

La primera hipótesis que consideramos es la de suponer que el mapeamiento $\mathscr{R}$ es lineal en la variable $\mathbf{Y}$, es decir

$$\mathscr{R}(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) = \Theta(\mathbf{X},t)\mathbf{Y}, \tag{12.3}$$

donde Θ es un tensor de segundo orden que representa los movimientos internos de la partícula P, es decir que la posición de cada micro-partícula está completamente caracterizada por

$$\mathbf{x}' = \mathscr{X}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) = \mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathscr{X}(\mathbf{X},t)+\Theta(\mathbf{X},t)\mathbf{Y}. \tag{12.4}$$

Así, las macro-partículas que forman el cuerpo $\mathscr{B}$, antes caracterizadas por el vector posición $\mathbf{X}$, ahora están descriptas por el par $(\mathbf{X},\Theta)$. En particular, consideramos que $\mathbf{X}$ es el centro de masa de las micro-partículas[1], siendo por lo tanto $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ para $\mathbf{Y} = \mathbf{0}$.

El campo de desplazamientos viene dado por $\mathbf{U}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) = \mathbf{x}' - \mathbf{X}'$, es decir

$$\mathbf{U}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) = \mathscr{X}(\mathbf{X},t)+\Theta(\mathbf{X},t)\mathbf{Y}-\mathbf{X}-\mathbf{Y}, \tag{12.5}$$

o sea

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{X}+\mathbf{Y}+\mathbf{U}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t), \tag{12.6}$$

donde $\mathbf{U}'$ puede ser escrito como

$$\mathbf{U}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) = \mathbf{U}(\mathbf{X},t)+\mathbf{u}(\mathbf{X},\mathbf{Y},t), \tag{12.7}$$

donde

[1] Para tal hipótesis basta asumir que $\int_{\Omega_\mu} \rho'\mathbf{y}dV_\mu = \mathbf{0}$, donde Ω_μ, donde ρ' es la densidad del medio que forma la partícula P.

$$\mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x} - \mathbf{X} = \mathscr{X}(\mathbf{X},t), \tag{12.8}$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) = \mathbf{y} - \mathbf{Y} = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X},t)\mathbf{Y} - \mathbf{Y}. \tag{12.9}$$

En este caso, para una vecindad suficientemente pequeña de $(\mathbf{X}_o, \mathbf{Y}_o) \in \mathscr{B}$, llamada $\mathscr{S}(\mathbf{X}_o, \mathbf{Y}_o)$, tenemos que la siguiente expansión es válida

$$\begin{aligned}\mathscr{X}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) &= \mathscr{X}'(\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}_o,t) \\ &+ \nabla_{\mathbf{X}}\mathscr{X}'(\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}_o,t)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_o) + \nabla_{\mathbf{Y}}\mathscr{X}'(\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}_o,t)(\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_o) \\ &+ o(\mathbf{X}-\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_o) \quad \forall(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathscr{S}(\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}_o),\end{aligned} \tag{12.10}$$

que para nuestro caso resulta

$$\begin{aligned}\mathscr{X}'(\mathbf{X},\mathbf{Y},t) &= \mathscr{X}'(\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}_o,t) + \mathbf{F}(\mathbf{X}_o,t)(\mathbf{X}-\mathbf{X}_o) + \mathsf{H}(\mathbf{X}_o,t)(\mathbf{Y}\otimes(\mathbf{X}-\mathbf{X}_o)) \\ &+ \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X}_o,t)(\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_o) + o(\mathbf{X}-\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}-\mathbf{Y}_o) \quad \forall(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \in \mathscr{S}(\mathbf{X}_o,\mathbf{Y}_o),\end{aligned} \tag{12.11}$$

donde $\mathbf{F} = \nabla_{\mathbf{X}}\mathscr{X}$ y $\mathsf{H} = \nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Theta}$, y además la operación $\nabla_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X},t)(\mathbf{Y}\otimes(\mathbf{X}-\mathbf{X}_o))$ debe entenderse en el siguiente sentido $(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_3)(\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}) = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}_2)(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}_3)\mathbf{a}_1$. Con los elementos $\mathbf{F}$, H y $\boldsymbol{\Theta}$, veamos las medidas de deformación asociadas a este tipo de medio. Sea entonces $(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = (\mathbf{X}_o + d\mathbf{X}, \mathbf{Y}_o + d\mathbf{Y})$ en la (12.11), luego

$$d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} + d\mathbf{y} = \mathbf{F}d\mathbf{X} + \mathsf{H}(\mathbf{Y}\otimes d\mathbf{X}) + \boldsymbol{\Theta}d\mathbf{Y}, \tag{12.12}$$

definiendo $(\cdot)^{\mathsf{t}}$ como la operación tal que $(\mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_2\otimes\mathbf{a}_3)^{\mathsf{t}} = \mathbf{a}_1\otimes\mathbf{a}_3\otimes\mathbf{a}_2$ (ver Capítulo 1), podemos escribir

$$d\mathbf{x}' = d\mathbf{x} + d\mathbf{y} = (\mathbf{F} + \mathsf{H}^{\mathsf{t}}\mathbf{Y})d\mathbf{X} + \boldsymbol{\Theta}d\mathbf{Y}. \tag{12.13}$$

Para una fibra, su longitud al cuadrado resulta

$$\begin{aligned}&d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}' = \left[(\mathbf{F}+\mathsf{H}^{\mathsf{t}}\mathbf{Y})d\mathbf{X} + \boldsymbol{\Theta}d\mathbf{Y}\right]\cdot\left[(\mathbf{F}+\mathsf{H}^{\mathsf{t}}\mathbf{Y})d\mathbf{X} + \boldsymbol{\Theta}d\mathbf{Y}\right] = \\ &(\mathbf{F}+\mathsf{H}^{\mathsf{t}}\mathbf{Y})^T(\mathbf{F}+\mathsf{H}^{\mathsf{t}}\mathbf{Y})d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X} + 2\boldsymbol{\Theta}^T(\mathbf{F}+\mathsf{H}^{\mathsf{t}}\mathbf{Y})d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{Y} + \boldsymbol{\Theta}^T\boldsymbol{\Theta}d\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{Y}.\end{aligned} \tag{12.14}$$

Por lo tanto, las medidas de deformación de un elemento diferencial vienen dadas por

$$\begin{aligned}&d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}' - [d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X} + 2d\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{X} + d\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{Y}] = \\ &\qquad 2\mathbf{A}_1 d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{X} + 2\mathbf{A}_2 d\mathbf{X}\cdot d\mathbf{Y} + 2\mathbf{A}_3 d\mathbf{Y}\cdot d\mathbf{Y},\end{aligned} \tag{12.15}$$

con

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{F}+\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})^T(\mathbf{F}+\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})-\mathbf{I}\right], \tag{12.16}$$

$$\mathbf{A}_2 = \boldsymbol{\Theta}^T(\mathbf{F}+\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})-\mathbf{I}, \tag{12.17}$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\Theta}^T\boldsymbol{\Theta}-\mathbf{I}\right]. \tag{12.18}$$

Estos tensores nos permiten definir las medidas de deformación posibles. Por ejemplo, un conjunto posible de medidas de deformación es el siguiente

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F}, \tag{12.19}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}^T\boldsymbol{\Theta}, \tag{12.20}$$

$$\mathbf{G}^{\mathrm{t}}\mathbf{a} = \mathbf{F}^T(\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{a}) \quad \forall \mathbf{a}. \tag{12.21}$$

El tensor de tercer orden $\mathbf{G}$ se puede expresar de forma explícita como

$$\mathbf{G} = \left[\mathbf{H}^T \circ \mathbf{F}\right]^{\frac{1}{T}}, \tag{12.22}$$

donde $\mathbf{H}^T \circ \mathbf{F}$ es una operación que se entiende en el siguiente sentido $(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{a}_3) \circ (\mathbf{b}_1 \otimes \mathbf{b}_2) = (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{b}_1)(\mathbf{a}_1 \otimes \mathbf{a}_2 \otimes \mathbf{b}_2)$ (ver Capítulo 1).

Con efecto, trabajando las expresiones (12.16)-(12.18) se tiene

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{2}\left[\mathbf{C}-\mathbf{I}\right] + \frac{1}{2}\left[\mathbf{G}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y} + (\mathbf{G}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})^T + (\mathbf{G}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{G}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})\right], \tag{12.23}$$

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{K}^T + \mathbf{K}^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{G}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y}) - \mathbf{I}, \tag{12.24}$$

$$\mathbf{A}_3 = \frac{1}{2}\left[\mathbf{K}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{K}-\mathbf{I}\right]. \tag{12.25}$$

De esta manera, cuando $\mathbf{C}=\mathbf{I}$, $\mathbf{K}=\mathbf{I}$ y $\mathbf{G}=\mathbf{O}$, se obtiene $\mathbf{A}_1=\mathbf{A}_2=\mathbf{A}_3=\mathbf{O}$, y por lo tanto $d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}' = d\mathbf{X}'\cdot d\mathbf{X}'$, que es el caso de la fibra sin deformación.

Para analizar la tasa de deformación de una fibra observe lo siguiente

$$\overline{d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}'}^{\cdot} = 2d\mathbf{x}'\cdot\dot{\overline{d\mathbf{x}'}}, \tag{12.26}$$

donde $\dot{\overline{d\mathbf{x}'}}$ se calcula derivando (12.13)

$$\dot{\overline{d\mathbf{x}'}} = (\dot{\mathbf{F}}+\dot{\mathbf{H}}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})d\mathbf{X} + \dot{\Theta}d\mathbf{Y}. \tag{12.27}$$

Note también que

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \tag{12.28}$$

$$d\mathbf{y} = (\mathbf{H}'\mathbf{Y})d\mathbf{X} + \Theta d\mathbf{Y}, \tag{12.29}$$

que podemos invertir, resultando

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x}, \tag{12.30}$$

$$d\mathbf{Y} = -\Theta^{-1}(\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} + \Theta^{-1} d\mathbf{y}. \tag{12.31}$$

Sabemos que

$$\dot{\mathbf{F}} = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\mathbf{U}} = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})_m \mathbf{F}, \tag{12.32}$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \nabla_{\mathbf{X}}\dot{\Theta} = [(\nabla_{\mathbf{x}}\omega)_m \circ \mathbf{F}], \tag{12.33}$$

$$\dot{\Theta} = (\omega)_m, \tag{12.34}$$

donde $(\cdot)_m$ denota la descripción material del campo, $\mathbf{v}$ es la descripción espacial del campo de velocidad del centro de masa de la partícula, ω es el tensor micro-tasa de deformación relativa dentro de la partícula. Substituyendo las expresiones anteriores en la (12.27) tenemos

$$\begin{aligned}\overline{\dot{d\mathbf{x}'}} = ((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})_m \mathbf{F} + [(\nabla_{\mathbf{x}}\omega)_m \circ \mathbf{F}]^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} - (\omega)_m[\Theta^{-1}(\mathbf{H}^{\mathrm{t}}\mathbf{Y})\mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} - \Theta^{-1} d\mathbf{y}] = \\ (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})_m d\mathbf{x} + [(\nabla_{\mathbf{x}}\omega)_m^{\mathrm{t}} \circ (\theta)_m^{-1}]\mathbf{y} d\mathbf{x} - (\omega)_m(\theta)_m^{-1}((\nabla_{\mathbf{x}}\theta)_m^{\mathrm{t}} \circ (\theta)_m^{-1})\mathbf{y} d\mathbf{x} \\ + (\omega)_m(\theta)_m^{-1} d\mathbf{y},\end{aligned} \tag{12.35}$$

donde θ es la descripción espacial del campo Θ y hemos usado el hecho de ser $\mathbf{Y} = \Theta^{-1}\mathbf{y}$. Podemos reescribir esta expresión en la configuración espacial, y agrupando términos, se tiene

$$\overline{\dot{d\mathbf{x}'}} = \left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + [(\nabla_{\mathbf{x}}\omega)^{\mathrm{t}} \circ \theta^{-1}]\mathbf{y} - \omega\theta^{-1}[(\nabla_{\mathbf{x}}\theta)^{\mathrm{t}} \circ \theta^{-1}]\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} + \omega\theta^{-1} d\mathbf{y}. \tag{12.36}$$

Definamos ahora el tensor

$$\chi = \omega\theta^{-1}, \tag{12.37}$$

denominado *tensor de micro-giro* en [79]. Sin embargo, este tensor χ posee no sólo información del giro, sino también información sobre la tasa de micro-deformación de la partícula, como veremos después. Primero notemos que la siguiente identidad es válida

$$[\nabla_{\mathbf{x}}\chi]^{\mathrm{t}}\mathbf{y} = [\nabla_{\mathbf{x}}(\omega\theta^{-1})]^{\mathrm{t}}\mathbf{y} = [(\nabla_{\mathbf{x}}\omega)^{\mathrm{t}} \circ \theta^{-1}]\mathbf{y} - \omega\theta^{-1}[(\nabla_{\mathbf{x}}\theta)^{\mathrm{t}} \circ \theta^{-1}]\mathbf{y}, \tag{12.38}$$

que sigue de observar que el gradiente de la inversa de un tensor $\mathbf{S}$ es

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{S}^{-1}) = -\mathbf{S}^{-1}((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{S})^{\mathrm{t}} \circ \mathbf{S}^{-1}). \tag{12.39}$$

Entonces, introduciendo (12.37) y (12.38) en la (12.36) se tiene

$$\overline{\dot{d\mathbf{x}'}} = \left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y}\right] d\mathbf{x} + \chi d\mathbf{y}. \tag{12.40}$$

Usando esta expresión en (12.26) llegamos a

$$\overset{\cdot}{d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}'} = 2(d\mathbf{x}+d\mathbf{y})\cdot\left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}+(\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}+2(d\mathbf{x}+d\mathbf{y})\cdot(\chi d\mathbf{y}) =$$
$$2\left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}+(\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}+2\left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}+\chi^{T}+(\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{y}+2\chi d\mathbf{y}\cdot d\mathbf{y}, \quad (12.41)$$

y recordando que $\mathbf{A}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{A}^{s}\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}$, se tiene que la tasa material de la longitud de la fibra es

$$\overset{\cdot}{d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}'} = 2\left[(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{s}+((\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y})^{s}\right]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$$
$$+2\left[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}+\chi^{T}+(\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{y}+2\chi^{s}d\mathbf{y}\cdot d\mathbf{y}. \quad (12.42)$$

Observe que para que $\overset{\cdot}{d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}'} = 0$ se debe satisfacer lo siguiente

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{s}+((\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y})^{s} = \mathbf{O}, \quad (12.43)$$
$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}+\chi^{T}+(\nabla_{\mathbf{x}}\chi)^{\mathrm{t}}\mathbf{y} = \mathbf{O} \quad (12.44)$$
$$\chi^{s} = \mathbf{O}. \quad (12.45)$$

Lo cual se satisface si y sólo si

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}-\chi = \mathbf{O}, \quad (12.46)$$
$$\nabla_{\mathbf{x}}\chi = \mathbf{O} \quad (12.47)$$
$$\chi^{s} = \mathbf{O}. \quad (12.48)$$

Con efecto, tomando la parte simétrica y antisimétrica de (12.46) y usando (12.48) tenemos que

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{s} = \mathbf{O}, \quad (12.49)$$
$$(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{a}-\chi^{a} = \mathbf{O}. \quad (12.50)$$

Es así que hemos arribado a un conjunto de entidades que caracterizan las medidas de tasas de deformación en el medio continuo que estamos estudiando

$$\varepsilon = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{s}, \quad (12.51)$$
$$\eta = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}-\chi, \quad (12.52)$$
$$\zeta = \nabla_{\mathbf{x}}\chi, \quad (12.53)$$

donde, dada la equivalencia entre (12.49) y (12.48) hemos decidido substituir la medida de tasa de deformación dada por χ^{s} por $(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^{s}$.

Así, con estas tasas de deformación, la (12.42) se escribe como sigue

$$\overset{\cdot}{d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}'} = 2\left[\varepsilon+(\zeta^{\mathrm{t}}\mathbf{y})^{s}\right]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x}$$
$$+2\left[2\varepsilon-\eta^{T}+\zeta^{\mathrm{t}}\mathbf{y}\right]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{y}+2[\varepsilon-\eta^{s}]d\mathbf{y}\cdot d\mathbf{y}. \quad (12.54)$$

Ahora, observe que con la descripción encontrada en (12.40) podemos interpretar que el campo de acciones de movimiento que el medio continuo puede experimentar

está caracterizado por campos de velocidades que poseen la siguiente forma

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \boldsymbol{\chi}\mathbf{y}, \tag{12.55}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad del centro de masa de Ω_μ y $\boldsymbol{\chi}$ es el tensor de segundo orden ya visto que es constante en todo Ω_μ, y que representa el gradiente de la velocidad (consecuentemente constante) en Ω_μ. Por lo tanto, $\boldsymbol{\chi}$ está asociado a la micro-deformación y micro-rotación en este micro-dominio.

Con la cinemática adoptada vemos que, a nivel macroscópico, la cinemática de cada partícula queda caracterizada por estas dos variables cinemáticas $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\chi}$. Con esto podemos definir para todo instante de tiempo t el espacio de acciones de movimientos cinemáticamente *posibles* $\mathscr{V}$, la variedad lineal Kin_v de acciones de movimiento cinemáticamente *admisibles* y su subespacio generador Var_v de acciones virtuales de movimiento cinemáticamente admisibles

$$\mathscr{V} = \{(\mathbf{v},\boldsymbol{\chi});\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathscr{B}_t), \boldsymbol{\chi} \in \mathbf{H}^1(\mathscr{B}_t)\}, \tag{12.56}$$

$$\mathrm{Kin}_v = \{(\mathbf{v},\boldsymbol{\chi}) \in \mathscr{V};\, (\mathbf{v},\boldsymbol{\chi}) = (\bar{\mathbf{v}},\bar{\boldsymbol{\chi}}) \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv}\}, \tag{12.57}$$

$$\mathrm{Var}_v = \{(\mathbf{v},\boldsymbol{\chi}) \in \mathscr{V};\, (\mathbf{v},\boldsymbol{\chi}) = (\mathbf{0},\mathbf{O}) \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv}\}, \tag{12.58}$$

donde $\mathbf{H}^1(\mathscr{B}_t)$ es el espacio de campos vectoriales tal que cada componente pertenece a $H^1(\mathscr{B}_t)$, $\mathbf{H}^1(\mathscr{B}_t)$ es el espacio de tensores de segundo orden donde cada componente se encuentra en $H^1(\mathscr{B}_t)$, y y donde $H^1(\mathscr{B}_t)$ es el espacio de funciones continuas con derivadas primeras cuadrado integrables. Además, es $\partial\mathscr{B}_t = \partial\mathscr{B}_{tv} \cup \partial\mathscr{B}_{tf}$, donde $\partial\mathscr{B}_{tv} \cap \partial\mathscr{B}_{tf} = \emptyset$. Por simplicidad, hemos asumido que ambas variables $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\chi}$ possen restricciones cinemáticas sobre la misma parte del contorno $\partial\mathscr{B}_t$.

Habiendo encontrado un conjunto de variables que describen las tasas de deformación podemos identificar el operador tasa de deformación

$$\begin{aligned} &\mathscr{D} : \mathscr{V} \to \mathscr{W}, \\ &(\mathbf{v},\boldsymbol{\chi}) \mapsto \mathscr{D}(\mathbf{v},\boldsymbol{\chi}) = ((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s, \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} - \boldsymbol{\chi}, \nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\chi}), \end{aligned} \tag{12.59}$$

o sea que el espacio $\mathscr{W}$ de tasas de deformación está formado por tres campos, dos tensores de segundo orden $(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s$ y $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} - \boldsymbol{\chi}$ y un tensor de tercer orden $\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\chi}$.

Con estos elementos, podemos definir las acciones de movimiento de cuerpo rígido. Es fácil verificar que los campos de velocidades de la forma

$$\mathbf{v}'_R = \mathbf{v}_R + \boldsymbol{\chi}_R\mathbf{y} = \mathbf{v}_O + \mathbf{W}_O\mathbf{x} + \mathbf{W}_O\mathbf{y}, \tag{12.60}$$

con $\mathbf{v}_O$ un campo vectorial uniforme en $\mathscr{B}_t$ y $\mathbf{W}_O \in Skw$ un campo tensorial antisimétrico uniforme en $\mathscr{B}_t$, constituyen acciones de movimiento de cuerpo rígido. De hecho

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}_R = \mathbf{W}_O, \tag{12.61}$$

$$\boldsymbol{\chi}_R = \mathbf{W}_O, \tag{12.62}$$

y por lo tanto (12.46)-(12.48) son satisfechas. Podemos entonces introducir el espacio nulo del operador $\mathscr{D}$

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{(\mathbf{v},\chi) \in \mathscr{V};\, (\mathbf{v},\chi) = (\mathbf{v}_O + \mathbf{W}_O\mathbf{x}, \mathbf{W}_O) \\ \text{con } \mathbf{v}_O \in \mathbb{R}^3,\, \mathbf{W}_O \in (\mathbb{R}^{3\times 3})^a\}. \quad (12.63)$$

Antes de finalizar esta sección corresponde realizar algunos comentarios adicionales. El modelo de medio micromorfo que hemos construido está caracterizado por

- una tasa de deformación clásica dada por $(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s$,
- una medida de la distorsión existente entre las cinemáticas *macro* y *micro* dada por $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} - \chi$,
- y, finalmente, por una deformación de mayor orden dada por $\nabla_{\mathbf{x}}\chi$.

Ahora bien, si incorporamos la restricción cinemática interna $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = \chi$ el nuevo modelo así obtenido se caracterizará por una cinemática de segundo orden ya que estaría gobernado por tasas de deformaciones dadas por $(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s$ y $\nabla_{\mathbf{x}}\chi = \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$. Discutiremos esto más adelante.

12.3 Principio de la Potencia Virtual

Como en los capítulos anteriores, y en especial en el Capítulo 3, definimos los esfuerzos externos mediante el concepto de potencia externa, siendo que la potencia externa P_e es un funcional lineal y continuo sobre el espacio $\mathscr{V}$ de pares $(\mathbf{v},\chi)$. Introduciendo el espacio dual $\mathscr{V}'$ podemos definimos la potencia externa como la operación

$$\begin{aligned} &\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{V}' \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}, \\ &\quad (f,(\mathbf{v},\chi)) \mapsto P_e(\mathbf{v},\chi) = \langle f,(\mathbf{v},\chi)\rangle. \end{aligned} \quad (12.64)$$

Es más, debido a que el funcional es lineal y continuo, y a que los elementos cinemáticos $\mathbf{v}$ y χ son independientes entre si, podemos explicitar todavía más la forma de la potencia externa

$$\begin{aligned} &\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{V}' \times \mathscr{V} \to \mathbb{R}, \\ &((f_v,f_\chi),(\mathbf{v},\chi)) \mapsto P_e(\mathbf{v},\chi) = \langle f_v,\mathbf{v}\rangle + \langle f_\chi,\chi\rangle. \end{aligned} \quad (12.65)$$

La caracterización de estos productos de dualidad entre f_v y $\mathbf{v}$, y entre f_χ y χ será realizada por medio del PPV, como veremos a seguir.

A pesar de que en este punto ya hemos caracterizado los objetos cinemáticos que utilizaremos como medias de dasas de deformación (ver definiciones de ε, η y ζ en (12.51), (12.52) y (12.53), respectivamente) vamos a postular, como hecho en el Capítulo 3 que la potencia interna, que caracteriza los esfuerzos internos compati-

bles con el modelo cinemático, está dada por un funcional lineal y continuo sobre el espacio de los elementos cinemáticos $(\mathbf{v},\chi)$ y sus gradientes de primer orden, es decir

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + \mathbf{C}\cdot\chi + \mathbb{D}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\chi)dV, \tag{12.66}$$

La potencia interna debe ser objetiva, lo que implica que debe ser nula para todo movimiento rígido. Luego

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t} (\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{B}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + \mathbf{C}\cdot\chi + \mathbb{D}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\chi)dV = 0 \quad \forall(\mathbf{v},\chi)\in\mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{12.67}$$

y de la forma de los elementos de $\mathscr{N}(\mathscr{D})$, se tiene

$$P_i = -\left(\int_{\mathscr{B}_t}\mathbf{a}dV\right)\cdot\mathbf{v}_O - \left(\int_{\mathscr{B}_t}\mathbf{B}dV\right)\cdot\mathbf{W}_O - \left(\int_{\mathscr{B}_t}\mathbf{C}dV\right)\cdot\mathbf{W}_O = 0$$
$$\forall(\mathbf{v}_O,\mathbf{W}_O)\in\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^{3\times3})^a \tag{12.68}$$

Como esto debe ser válido para toda parte del cuerpo, concluimos que

$$\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{12.69}$$
$$\mathbf{B}+\mathbf{C}\in Sym. \tag{12.70}$$

Es decir, para este modelo que estamos construyendo los esfuerzos internos no pueden estar caracterizados por campos vectoriales, y, además, cualquiera que sea el tipo de campo tensorial de segundo orden $\mathbf{B}$ y $\mathbf{C}$ que caracterice los esfuerzos internos, su suma debe ser simétrica. Luego, introduciendo la notación $\sigma = (\mathbf{B}+\mathbf{C})$ y $\gamma = -\mathbf{C}$, y de la simetría de σ, la potencia interna toma la siguiente forma final

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t} (\sigma\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s + \gamma\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}-\chi) + \mathbf{D}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\chi)dV =$$
$$-\int_{\mathscr{B}_t} (\sigma\cdot\varepsilon + \gamma\cdot\eta + \mathbf{D}\cdot\zeta)dV = -((\sigma,\gamma,\mathbf{D}),(\varepsilon,\eta,\zeta)). \tag{12.71}$$

Tenemos, como a lo largo de toda la monografía, que la potencia interna es un funcional lineal y continuo sobre el espacio de acciones de (tasas de) deformación.

Ahora vamos a enunciar el PPV. Decimos entonces que el medio $\mathscr{B}_t$ está en equilibrio, bajo la acción del sistema de esfuerzos externos $f\in\mathscr{V}'$, equivalentemente con $(f_v,f_\chi)\in\mathscr{V}'$, si

- se satisface
$$P_e = \langle f,(\hat{\mathbf{v}},\hat{\chi})\rangle = 0 \quad \forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{\chi})\in \mathrm{Var}_v\cap\mathscr{N}(\mathscr{D}), \tag{12.72}$$
o equivalentemente
$$P_e = \langle f_v,\hat{\mathbf{v}}\rangle + \langle f_\chi,\hat{\chi}\rangle = 0 \quad \forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{\chi})\in \mathrm{Var}_v\cap\mathscr{N}(\mathscr{D}); \tag{12.73}$$
- y se verifica además que

$$P_i + P_e = -((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}), ((\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}})^s, \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}} - \hat{\boldsymbol{\chi}}, \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\boldsymbol{\chi}})) + \langle f, (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \rangle = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \in \mathrm{Var}_v. \quad (12.74)$$

El siguiente resultado, como en los casos anteriores, establece que existen $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D})$ que equilibra al sistema de cargas (f_v, f_χ).

Teorema 12.1 Teorema de Representación. *Si $(f_v, f_\chi) \in \mathscr{V}'$ está en equilibrio, entonces existe $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}) \in \mathscr{W}'$ y $(r_v, r_\chi) \in \mathscr{V}'$ tales que*

$$f_v = [\mathscr{D}^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D})]_v - r_v, \quad (12.75)$$

$$f_\chi = [\mathscr{D}^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D})]_\chi - r_\chi, \quad (12.76)$$

tales que

$$\langle (r_v, r_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \rangle = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \in \mathrm{Var}_v \Leftrightarrow (r_v, r_\chi) \in \mathrm{Var}_v^\perp, \quad (12.77)$$

donde el par (r_v, r_χ) constituye la reacción de vínculo, y así decimos que $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D})$ y (r_v, r_χ) equilibran (f_v, f_χ).

Demostración. Sabemos que $f = (f_v, f_\chi)$ está en equilibrio, luego

$$(f_v, f_\chi) \in (\mathrm{Var}_v \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}))^\perp \Leftrightarrow (f_v, f_\chi) \in \mathrm{Var}_v^\perp + \mathscr{N}(\mathscr{D})^\perp. \quad (12.78)$$

Como $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\chi}) \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$ se tiene $\mathscr{D}\mathbf{v} = (\mathbf{O}, \mathbf{O}, \mathbf{O})$, y entonces

$$\langle \mathscr{D}^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}), (\mathbf{v}, \boldsymbol{\chi}) \rangle = ((\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}), \mathscr{D}(\mathbf{v}, \boldsymbol{\chi})) = 0 \quad \forall (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}) \in \mathscr{W}', \quad (12.79)$$

o sea que el par $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\chi}) \in R(\mathscr{D}^*)^\perp$, de lo que se concluye que $\mathscr{N}(\mathscr{D}) = R(\mathscr{D}^*)^\perp$, o sea

$$\mathscr{N}(\mathscr{D})^\perp = R(\mathscr{D}^*). \quad (12.80)$$

Reemplazado esto en la (12.78) tenemos

$$(f_v, f_\chi) \in \mathrm{Var}_v^\perp + R(\mathscr{D}^*), \quad (12.81)$$

y por consecuencia existen $(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D}) \in \mathscr{W}'$ y $(-r_v, -r_\chi) \in \mathrm{Var}_v^\perp$ tales que

$$f_v = [\mathscr{D}^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D})]_v - r_v, \quad (12.82)$$

$$f_\chi = [\mathscr{D}^*(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{D})]_\chi - r_\chi, \quad (12.83)$$

y como $(-r_v, -r_\chi) \in \mathrm{Var}_v^\perp$ se verifica que

$$\langle (r_v, r_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \rangle = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\boldsymbol{\chi}}) \in \mathrm{Var}_v. \quad (12.84)$$

■

El teorema de la representación nos permite concluir la segunda parte del PPV, es decir que nos permite escribir lo siguiente

$$\langle (f_v, f_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \rangle = \langle \mathscr{D}^*(\sigma, \gamma, \mathbf{D}) - (r_v, r_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \rangle = \\ \langle \mathscr{D}^*(\sigma, \gamma, \mathbf{D}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \rangle = ((\sigma, \gamma, \mathbf{D}), \mathscr{D}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})) \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v, \quad (12.85)$$

o sea

$$((\sigma, \gamma, \mathbf{D}), \mathscr{D}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})) = \langle (f_v, f_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \rangle \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v. \quad (12.86)$$

Reemplazando la definición de la potencia interna (12.71) en la segunda parte del PPV obtenemos

$$\int_{\mathscr{B}_t} \big(\sigma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}})^s + \gamma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}} - \hat{\chi}) + \mathbf{D} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\chi} \big) dV = \langle (f_v, f_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \rangle \\ \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v. \quad (12.87)$$

Vamos a caracterizar ahora los esfuerzos externos compatibles con el modelo, esto es $f \in \mathscr{V}'$, o equivalentemente $(f_v, f_\chi) \in \mathscr{V}$. Asumiendo que los campos son suficientemente regulares, y sabiendo que σ es un tensor simétrico, la integración por partes de la expresión (12.87) resulta

$$\int_{\mathscr{B}_t} \big(\sigma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}})^s + \gamma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}} - \hat{\chi}) + \mathbf{D} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\chi} \big) dV = \int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} \big((\sigma + \gamma) \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{D}\mathbf{n} \cdot \hat{\chi} \big) dS \\ - \int_{\mathscr{B}_t} \big((\mathrm{div}\,(\sigma + \gamma)) \cdot \hat{\mathbf{v}} + (\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D}) \cdot \hat{\chi} \big) dV, \quad (12.88)$$

donde se ha llevado en consideración que $(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) = (\mathbf{0}, \mathbf{O})$ en $\partial \mathscr{B}_{tv}$. De esta manera, a partir de la (12.87), observamos que

$$\langle (f_v, f_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} \big((\sigma + \gamma) \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{D}\mathbf{n} \cdot \hat{\chi} \big) dS \\ - \int_{\mathscr{B}_t} \big((\mathrm{div}\,(\sigma + \gamma)) \cdot \hat{\mathbf{v}} + (\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D}) \cdot \hat{\chi} \big) dV = \\ \int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} (\sigma + \gamma) \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS - \int_{\mathscr{B}_t} (\mathrm{div}\,(\sigma + \gamma)) \cdot \hat{\mathbf{v}} dV = \\ + \int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} \mathbf{D}\mathbf{n} \cdot \hat{\chi} dS - \int_{\mathscr{B}_t} (\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D}) \cdot \hat{\chi} dV, \quad (12.89)$$

y obtenemos las formas explícitas de ambos elementos f_v y f_χ

$$\langle f_v, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} (\sigma + \gamma) \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS - \int_{\mathscr{B}_t} (\mathrm{div}\,(\sigma + \gamma)) \cdot \hat{\mathbf{v}} dV, \quad (12.90)$$

$$\langle f_\chi, \hat{\chi} \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} \mathbf{D}\mathbf{n} \cdot \hat{\chi} dS - \int_{\mathscr{B}_t} (\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D}) \cdot \hat{\chi} dV. \quad (12.91)$$

Así, vemos que f_v está caracterizado por un campo vectorial por unidad de superficie en $\partial \mathscr{B}_{tf}$ y por un campo vectorial por unidad de volumen en $\mathscr{B}_t$, mientras que f_χ

está caracterizado por un campo tensorial de segundo orden por unidad de superficie en $\partial\mathscr{B}_{tf}$ y también por un campo tensorial de segundo orden por unidad de volumen en $\mathscr{B}_t$. Luego

$$\langle f_v, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV, \tag{12.92}$$

$$\langle f_\chi, \hat{\chi} \rangle = \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{N} \cdot \hat{\chi} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{M} \cdot \hat{\chi} dV. \tag{12.93}$$

Note que esto nos permite caracterizar las componentes del operador de equilibrio $\mathscr{D}^*$, $[\mathscr{D}^*(\cdot)]_v$ y $[\mathscr{D}^*(\cdot)]_\chi$, ya que $f_v = [\mathscr{D}^*(\sigma, \gamma, \mathbf{D})]_v$ y $f_\chi = [\mathscr{D}^*(\sigma, \gamma, \mathbf{D})]_\chi$.

Volviendo al PPV, el mismo adquiere la siguiente forma final

$$\int_{\mathscr{B}_t} \left(\sigma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}})^s + \gamma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}} - \hat{\chi}) + \mathbf{D} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\chi}\right) dV = \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{N} \cdot \hat{\chi} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{M} \cdot \hat{\chi} dV \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v. \tag{12.94}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al PPV (12.94) resultan de integrar por partes como realizado anteriormente. Luego

$$\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \left((\sigma + \gamma)\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{D}\mathbf{n} \cdot \hat{\chi}\right) dS - \int_{\mathscr{B}_t} \left((\mathrm{div}\,(\sigma + \gamma)) \cdot \hat{\mathbf{v}} + (\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D}) \cdot \hat{\chi}\right) dV = \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{N} \cdot \hat{\chi} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{M} \cdot \hat{\chi} dV \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v, \tag{12.95}$$

y agrupando términos

$$\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} ((\sigma + \gamma)\mathbf{n} - \mathbf{t}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\mathbf{D}\mathbf{n} - \mathbf{N}) \cdot \hat{\chi} dS - \int_{\mathscr{B}_t} (\mathrm{div}\,(\sigma + \gamma) + \mathbf{b}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dV - \int_{\mathscr{B}_t} (\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D} + \mathbf{M}) \cdot \hat{\chi} dV = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v. \tag{12.96}$$

Y así llegamos a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\mathrm{div}\,(\sigma + \gamma) + \mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.97}$$

$$\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D} + \mathbf{M} = \mathbf{O} \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.98}$$

$$(\sigma + \gamma)\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tf}, \tag{12.99}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{N} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tf}, \tag{12.100}$$

que junto con las restricciones cinemáticas

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tv}, \tag{12.101}$$

$$\chi = \bar{\chi} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tv}, \tag{12.102}$$

completan la descripción del modelo de medio micromorfo en su forma fuerte.

Asumamos ahora que existe una superficie interna S en la cual no se verifican las condiciones de regularidad para realizar la integración por partes. Entonces, la integración por partes realizada en las partes del dominio $\mathscr{B}_t$ donde si se puede asumir regularidad nos arroja términos sobre la superficie interna S de la forma $\int_S [\![\sigma+\chi]\!]\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS + \int_S [\![\mathbf{D}]\!]\mathbf{n}\cdot\hat{\chi}dS$ y en este caso los esfuerzos externos f_v y f_χ podrían incluir, respectivamente, un campo vectorial $\mathbf{t}_S$ y un campo tensorial $\mathbf{N}_S$ por unidade de superficie sobre S en su caracterización, y en tal caso las ecuaciones de Euler-Lagrange nos muestran que también se verifica

$$[\![\sigma+\chi]\!]\mathbf{n} = \mathbf{t}_S \qquad \text{en } S, \tag{12.103}$$

$$[\![\mathbf{D}]\!]\mathbf{n} = \mathbf{N}_S \qquad \text{en } S. \tag{12.104}$$

Para terminar esta sección, calcularemos las reacciones de vínculo $(r_v, r_\chi) \in \mathscr{V}'$ que, recordemos, no contribuyen con potencia en el PPV, y solamente pueden ser evaluadas eliminando las restricciones cinemáticas del espacio Var_v, o sea

$$\langle (f_v, f_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})\rangle = \langle \mathscr{D}^*(\sigma, \gamma, \mathbf{D}), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})\rangle - \langle (r_v, r_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})\rangle \\ \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathscr{V}. \tag{12.105}$$

Usando el PPV (12.94) en la (12.105) tenemos

$$\langle (r_v, r_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})\rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \left(\sigma\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{v}})^s + \gamma\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{v}} - \hat{\chi}) + \mathbf{D}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\chi}\right)dV \\ - \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{N}\cdot\hat{\chi}dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{M}\cdot\hat{\chi}dV \\ \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathscr{V}, \tag{12.106}$$

e integrando por partes, agrupando términos, y empleando el equilibrio se tiene

$$\langle (r_v, r_\chi), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})\rangle = \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} ((\sigma+\gamma)\mathbf{n} - \mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}dS + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\mathbf{D}\mathbf{n} - \mathbf{N})\cdot\hat{\chi}dS \\ + \int_{\partial\mathscr{B}_{tv}} (\sigma+\gamma)\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS \int_{\partial\mathscr{B}_{tv}} \mathbf{D}\mathbf{n}\cdot\hat{\chi}dS \\ - \int_{\mathscr{B}_t} (\mathrm{div}\,(\sigma+\gamma) + \mathbf{b})\cdot\hat{\mathbf{v}}dV - \int_{\mathscr{B}_t} (\gamma + \mathrm{div}\,\mathbf{D} + \mathbf{M})\cdot\hat{\chi}dV = \\ \int_{\partial\mathscr{B}_{tv}} (\sigma+\gamma)\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS \int_{\partial\mathscr{B}_{tv}} \mathbf{D}\mathbf{n}\cdot\hat{\chi}dS \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathscr{V}. \tag{12.107}$$

En consecuencia, conseguimos caracterizar las reacciones de vínculo r_v y r_χ como siendo

$$\langle r_v, \hat{\mathbf{v}} \rangle + \langle r_\chi, \hat{\chi} \rangle = \int_{\partial \mathscr{B}_{tv}} (\sigma + \gamma)\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\partial \mathscr{B}_{tv}} \mathbf{D}\mathbf{n} \cdot \hat{\chi} dS \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathscr{V}, \quad (12.108)$$

o equivalentemente

$$\int_{\partial \mathscr{B}_{tv}} (\mathbf{r}_v - (\sigma + \gamma)\mathbf{n}) \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\partial \mathscr{B}_{tv}} (\mathbf{R}_\chi - \mathbf{D}\mathbf{n}) \cdot \hat{\chi} dS = 0 \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathscr{V}. \quad (12.109)$$

En la forma local, las reacciones de vínculo resultan

$$\mathbf{r}_v = (\sigma + \gamma)\mathbf{n} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{tv}, \quad (12.110)$$

$$\mathbf{R}_\chi = \mathbf{D}\mathbf{n} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{tv}, \quad (12.111)$$

donde $\mathbf{r}_v$ es el vector que representa la reacción r_v y $\mathbf{R}_\chi$ es el tensor de segundo orden que representa la reacción r_χ.

12.4 Problema Dinámico

En esta sección abordaremos el problema de incorporar potencia debido a fuerzas de carácter inercial de las partículas, lo cual es de suma importancia para modelar fenómenos dependientes del tiempo.

Como vimos en el Capítulo (3), el PPV es válido también para caracterizar el equilibrio dinámico bastando para ello incorporar la potencia virtual asociadas a las fuerzas de inercia, que llamaremos aquí $\mathbf{b}^i$, asociadas al modelo. Para determinar esta fuerza recordemos que en el presente modelo de medio micromorfo hemos asociado a cada partícula P en $\mathscr{B}_t$ una micro-región, Ω_μ, cuyo origen de coordenadas está dado por el centro de masa de esa región y que es ocupado por la partícula P.

Con esto presente, adoptamos la siguiente hipótesis: la potencia virtual asociada a la fuerza de inercia de la partícula P deberá ser igual a la potencia virtual de las fuerzas de inercia de su correspondiente micro-región. Es decir

$$\mathbf{b}^i|_P \cdot (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})|_P = \int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{a}' \cdot \hat{\mathbf{v}}' dV_\mu. \quad (12.112)$$

donde la notación $(\cdot)|_P$ indica la asociación con la partícula P. En la expresión anterior ρ' es la masa específica (no necesariamente homogénea) del material en la micro-región Ω_μ y $\mathbf{a}'$ es la aceleración de las micro-partículas que conforman la macro-partícula P.

Antes de continuar con la derivación de $\mathbf{b}^i|_P$ vamos a introducir las siguientes definiciones que nos serán útiles

- la masa total de la micro-región será la masa de la partícula P, es decir

$$\rho = \int_{\Omega_\mu} \rho' dV_\mu, \quad (12.113)$$

- Como P ocupa el centro de masa de la micro-región, y este centro es adoptado como origen para los puntos $\mathbf{y} \in \Omega_\mu$, resulta

$$\int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{y} dV_\mu = \mathbf{0}, \tag{12.114}$$

- finalmente, podemos definir el campo tensorial de segundo orden y simétrico $\mathbf{J}$ correspondiente al momento de inercia polar de la micro-región, es decir

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\rho} \int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} d\Omega_\mu. \tag{12.115}$$

Con estas definiciones en manos, podemos iniciar el cálculo de $\mathbf{b}^i|_P$. Para ello recordemos nuestra primer hipótesis sobre el campo de velocidades en la micro-región dada por (12.55). Luego, la aceleración de cualquier punto de Ω_μ está dada por

$$\mathbf{a}' = \dot{\mathbf{v}}' = \dot{\mathbf{v}} + \dot{\chi}\mathbf{y} + \chi\dot{\mathbf{y}}, \tag{12.116}$$

pero $\dot{\mathbf{y}}$ es la velocidad del punto $\mathbf{y}$ relativa a la velocidad del origen (centro de masa), es decir

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} = \chi\mathbf{y}, \tag{12.117}$$

que, substituida en la (12.116), nos proporciona la expresión final para la aceleración de cualquier punto de Ω_μ

$$\mathbf{a}' = \dot{\mathbf{v}} + (\dot{\chi} + \chi\chi)\mathbf{y}. \tag{12.118}$$

De la misma manera, recordando nuevamente (12.55), las acciones de movimiento virtuales en la micro-región están dadas por

$$\hat{\mathbf{v}}' = \hat{\mathbf{v}} + \hat{\chi}\mathbf{y}. \tag{12.119}$$

Substituyendo (12.118) y (12.119) en (12.112) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{b}^i|_P \cdot (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})|_P = \int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{a}' \cdot \hat{\mathbf{v}}' dV_\mu = \int_{\Omega_\mu} \rho' (\dot{\mathbf{v}} + (\dot{\chi} + \chi\chi)\mathbf{y}) \cdot (\hat{\mathbf{v}} + \hat{\chi}\mathbf{y}) dV_\mu = \\ (\dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}}) \left(\int_{\Omega_\mu} \rho' dV_\mu \right) + \hat{\chi}^T \dot{\mathbf{v}} \cdot \left(\int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{y} dV_\mu \right) + \dot{\chi}^T \hat{\mathbf{v}} \cdot \left(\int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{y} dV_\mu \right) \\ + \dot{\chi}^T \hat{\chi} \cdot \left(\int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} dV_\mu \right) + (\chi\chi)^T \hat{\mathbf{v}} \cdot \left(\int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{y} dV_\mu \right) \\ + (\chi\chi)^T \hat{\chi} \cdot \left(\int_{\Omega_\mu} \rho' \mathbf{y} \otimes \mathbf{y} dV_\mu \right).\end{aligned} \tag{12.120}$$

Recordando las definiciones anteriores la expresión anterior se reduce a

$$\mathbf{b}^i|_P \cdot (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})|_P = \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \rho (\dot{\chi} + \chi\chi)^T \hat{\chi} \cdot \mathbf{J} = \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + \rho (\dot{\chi} + \chi\chi) \mathbf{J} \cdot \hat{\chi}, \tag{12.121}$$

Obtenemos así la representación de la fuerza de inercia asociada a cada partícula P de $\mathscr{B}_t$. El PPV, incluyendo la potencia virtual asociada a esta fuerza, nos proporciona el equilibrio dinámico para el modelo de medio micromorfo en estudio.

Para esto, el sistema de esfuerzos externos incorporando ahora las fuerzas de inercia es $f - f^i = (f_v - f_v^i, f_\chi - f_\chi^i) \in \mathscr{V}'$, donde f_v^i y f_χ^i son

$$\langle f_v^i, \hat{\mathbf{v}} \rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV, \tag{12.122}$$

$$\langle f_\chi^i, \hat{\chi} \rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \rho (\dot{\chi} + \chi\chi) \mathbf{J} \cdot \hat{\chi} dV. \tag{12.123}$$

y el estado de esfuerzos internos $(\sigma, \gamma, \mathbf{D}) \in \mathscr{W}'$ están en equilibrio (dinámico) en $\mathscr{B}_t$ si el PPV es satisfecho en cada instante de tiempo $t \in (t_0, T]$, es decir

$$((\sigma, \gamma, \mathbf{D}), \mathscr{D}(\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi})) = \langle (f_v - f_v^i, f_\chi - f_\chi^i), (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \rangle \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v, \tag{12.124}$$

o, en forma extendida

$$\int_{\mathscr{B}_t} \rho (\dot{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{v}} + (\dot{\chi} + \chi\chi) \mathbf{J} \cdot \hat{\chi}) dV + \int_{\mathscr{B}_t} \left(\sigma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}})^s + \gamma \cdot (\nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{v}} - \hat{\chi}) + \mathbf{D} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\chi} \right) dV =$$
$$\int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{v}} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{v}} dV + \int_{\partial \mathscr{B}_{tf}} \mathbf{N} \cdot \hat{\chi} dS + \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{M} \cdot \hat{\chi} dV$$
$$\forall (\hat{\mathbf{v}}, \hat{\chi}) \in \mathrm{Var}_v. \tag{12.125}$$

Siguiendo el mismo procedimiento anterior, es directo ver que las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso son las siguientes

$$\rho \dot{\mathbf{v}} - \mathrm{div}\,(\sigma + \gamma) = \mathbf{b} \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.126}$$

$$\rho (\dot{\chi} + \chi\chi) \mathbf{J} - \gamma - \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \mathbf{M} \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.127}$$

$$(\sigma + \gamma)\mathbf{n} = \mathbf{t} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{tf}, \tag{12.128}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{n} = \mathbf{N} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{tf}, \tag{12.129}$$

que, ahora, junto con las restricciones cinemáticas

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{tv}, \tag{12.130}$$

$$\chi = \bar{\chi} \qquad \text{en } \partial \mathscr{B}_{tv}, \tag{12.131}$$

y las condiciones iniciales

$$\mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0 \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.132}$$

$$\chi(t_0) = \chi_0 \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.133}$$

definen el problema de valor de contorno con condiciones iniciales asociado al equilibrio en su forma local para el modelo de medio micromorfo que estamos planteando.

Antes de finalizar reiteramos una vez más al lector los siguientes conceptos para que compare las dos formas de modelar el problema.

- La forma variacional contiene en una única expresión integral, dada por el PPV (12.125), toda la información que gobierna el comportamiento del modelo.
- La forma clásica (local), dada por el conjunto de ecuaciones de Euler-Lagrange (12.126)-(12.129), sólo es válida si existe suficiente regularidad (mayor que la exigida en la formulación variacional) y que, caso esta regularidad no sea satisfecha, tal forma local ya no es más válida o, a lo sumo, es válida en partes del dominio, surgiendo ecuaciones de salto en la fronteras de esas partes.

12.5 Medios Micropolares

El caso de fluidos micropolares se obtiene de la teoría anterior como un caso particular, suponiendo que cada partícula se comporta como un cuerpo rígido. Como consecuencia de esta hipótesis adicional, el campo χ, que ahora será denominado χ^p, y que representa el gradiente de las velocidades relativas entre las micro-particulas, resulta un campo tensorial antisimétrico, es decir $\chi^p \in Skw$ ($(\chi^p)^T = -\chi^p$), el cual representa la rotación de la partícula P. Introducimos ahora el vector axial λ asociado a χ^p tenemos $\chi^p \mathbf{a} = \lambda^p \times \mathbf{a}$, para $\mathbf{a}$ un vector arbitrario. De esta forma, el campo de velocidades (12.55) está descripto como sigue

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \lambda \times \mathbf{y}. \tag{12.134}$$

Con esta restricción, los conjuntos $\mathscr{V}$, Kin_v and Var_v (ver (12.56), (12.57) y (12.58)) quedan definidos para el caso micropolar de la siguiente forma

$$\mathscr{V}^p = \{(\mathbf{v},\lambda);\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathscr{B}_t), \lambda \in \mathbf{H}^1(\mathscr{B}_t)\}, \tag{12.135}$$

$$\mathrm{Kin}_v^p = \{(\mathbf{v},\lambda) \in \mathscr{V}^p;\, (\mathbf{v},\lambda) = (\bar{\mathbf{v}},\bar{\lambda}) \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv}\}, \tag{12.136}$$

$$\mathrm{Var}_v^p = \{(\mathbf{v},\lambda) \in \mathscr{V}^p;\, (\mathbf{v},\lambda) = (\mathbf{0},\mathbf{0}) \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv}\}. \tag{12.137}$$

Para encontrar las medidas de las tasas de deformación correspondientes a este modelo observe primero que en este caso $\varepsilon - \eta^s = \mathbf{O}$, y por lo tanto, de la (12.54) obtenemos

$$\begin{aligned}\overline{d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}'} = 2\big[(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s + ((\nabla_{\mathbf{x}}\chi^p)^{\mathrm{t}}\mathbf{y})^s\big] d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} \\ + 2\big[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\chi^p)^T + (\nabla_{\mathbf{x}}\chi^p)^{\mathrm{t}}\mathbf{y}\big] d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{y}.\end{aligned} \tag{12.138}$$

Escribamos ahora el siguiente tensor

$$\varepsilon^p = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\chi^p)^T = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} - \chi^p, \tag{12.139}$$

donde usamos la antisimetría de χ^p. Luego, escribimos $(\nabla_{\mathbf{x}}\chi^p)^{\mathrm{t}}\mathbf{y}$ como sigue

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\chi^p)^{\mathrm{t}}\mathbf{y} = \nabla_{\mathbf{x}}(\chi^p\mathbf{y}) = \nabla_{\mathbf{x}}(\lambda\times\mathbf{y}), \tag{12.140}$$

donde $\nabla_{\mathbf{x}}(\lambda\times\mathbf{a}_1)$ es el tensor de segundo orden tal que, para $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ independientes de $\mathbf{x}$, se verifica

$$[\nabla_{\mathbf{x}}(\lambda\times\mathbf{a}_1)]^T\mathbf{a}_2 = (\nabla_{\mathbf{x}}\lambda)^T(\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2). \tag{12.141}$$

Otra forma de escribir esta operación es con el producto vectorial entre un tensor y un vector (ver Capítulo 1)

$$\nabla_{\mathbf{x}}(\lambda\times\mathbf{a}_1) = -\mathbf{a}_1\times\nabla_{\mathbf{x}}\lambda, \tag{12.142}$$

y llamando

$$\zeta^p = \nabla_{\mathbf{x}}\lambda, \tag{12.143}$$

tenemos

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\chi^p)^{\mathrm{t}}\mathbf{y} = -\mathbf{y}\times\zeta^p. \tag{12.144}$$

Luego, la (12.138) puede ser escrita como

$$\overline{d\mathbf{x}'\cdot d\mathbf{x}'} = 2\big[\varepsilon^p - (\mathbf{y}\times\zeta^p)^s\big]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} + 2\big[\varepsilon^p - \mathbf{y}\times\zeta^p\big]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{y}. \tag{12.145}$$

es decir, la misma queda caracterizada por los siguientes objetos que miden la tasa de deformación

$$\varepsilon^p = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} - \chi^p(\lambda), \tag{12.146}$$

$$\zeta^p = \nabla_{\mathbf{x}}\lambda, \tag{12.147}$$

donde ζ^p es un tensor de segundo orden.

La potencia interna P_i se postula, como antes, como un funcional lineal y continuo sobre el espacio de tasas de deformación, que para este caso es

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t}\big(\tau\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} - \chi^p(\lambda)) + \mathbf{D}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\lambda\big)dV = -\int_{\mathscr{B}_t}(\tau\cdot\varepsilon^p + \mathbf{D}\cdot\zeta^p)dV, \tag{12.148}$$

donde τ y $\mathbf{D}$ son tensores de segundo orden. Recordando que $\tau\cdot\chi^p(\lambda) = -\lambda\cdot\tau_\times$ (ver Capítulo 1) reescribimos la potencia interna como

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t}(\tau\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + \tau_\times\cdot\lambda + \mathbf{D}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\lambda)dV. \tag{12.149}$$

Entonces, el PPV en este caso resulta

$$\int_{\mathscr{B}_t}(\tau\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{v}} + \tau_\times\cdot\hat{\lambda} + \mathbf{D}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\hat{\lambda})dV = \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}}\mathbf{t}\cdot\hat{\mathbf{v}}dS + \int_{\mathscr{B}_t}\mathbf{b}\cdot\hat{\mathbf{v}}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}}\mathbf{m}\cdot\hat{\lambda}dS + \int_{\mathscr{B}_t}\mathbf{g}\cdot\hat{\lambda}dV \quad \forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{\lambda})\in \mathrm{Var}_v^p. \tag{12.150}$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange se encuentran utilizando los mismos argumentos empleados anteriormente. Esto implica que integramos por partes y agrupamos términos

$$\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}-\mathbf{t})\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dS + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\mathbf{D}\mathbf{n}-\mathbf{m})\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}}\,dS - \int_{\mathscr{B}_t} (\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}+\mathbf{b})\cdot\hat{\mathbf{v}}\,dV - \int_{\mathscr{B}_t} (-\boldsymbol{\tau}_\times + \operatorname{div}\mathbf{D}+\mathbf{g})\cdot\hat{\boldsymbol{\lambda}}\,dV = 0 \quad \forall(\hat{\mathbf{v}},\hat{\boldsymbol{\lambda}}) \in \mathrm{Var}_v^p. \tag{12.151}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\tau}+\mathbf{b}=\mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.152}$$

$$-\boldsymbol{\tau}_\times + \operatorname{div}\mathbf{D}+\mathbf{g}=\mathbf{0} \quad \text{en } \mathscr{B}_t, \tag{12.153}$$

$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{n}=\mathbf{t} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tf}, \tag{12.154}$$

$$\mathbf{D}\mathbf{n}=\mathbf{m} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tf}, \tag{12.155}$$

con condiciones de contorno esenciales dadas por

$$\mathbf{v}=\bar{\mathbf{v}} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tv}, \tag{12.156}$$

$$\lambda=\bar{\lambda} \quad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tv}. \tag{12.157}$$

12.6 Teoría de Segundo Gradiente

En esta sección vamos a mostrar con más detalle que la teoría de los medios continuos de segundo orden puede ser obtenida como caso particular de la teoría de medios micromorfos ya presentada. En efecto, basta para ello suponer que toda partícula está sometida a la misma tasa de deformación que la que tiene el cuerpo (fue lo que llamamos eliminación de la distorsión). Es decir, en este nuevo modelo se incorpora en la descripción (12.55), la restricción cinemática

$$\boldsymbol{\chi}^g = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}, \tag{12.158}$$

es decir que los campos de velocidades son

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\mathbf{y}. \tag{12.159}$$

Luego, las variables $\mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\chi}$ dejan de ser independientes, y como $\nabla_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\chi}^g = \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$, debemos exigir mayor regularidad en el modelo para la variable $\mathbf{v}$. Bajo estas condiciones el espacio $\mathscr{V}$ resulta

$$\mathscr{V} = \{\mathbf{v};\, \mathbf{v}\in\mathbf{H}^2(\mathscr{B}_t)\}, \tag{12.160}$$

donde $\mathbf{H}^2(\mathscr{B}_t)$ es el espacio de las funciones con segundo gradiente cuadrado integrable. Por su parte, las acciones admisibles pertenecen a la siguiente variedad lineal

$$\text{Kin}_v = \left\{ \mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}},\, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} = \bar{\mathbf{w}} \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv},\, \mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \text{ en } \Gamma_{tv} \right\}, \tag{12.161}$$

donde Γ_{tv} representa una línea sobre el contorno $\partial\mathscr{B}_t$ para la cual existe una discontinuidad en el vector normal $\mathbf{n}$, con la coordenada en la dirección de la normal es ξ. El vector normal a esa curva que es tangente a $\partial\mathscr{B}_t$ es llamado $\mathbf{m}$. El subespacio generador de Kin_v es

$$\text{Var}_v = \left\{ \mathbf{v} \in \mathscr{V};\, \mathbf{v} = \mathbf{0},\, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\mathscr{B}_{tv},\, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_{tv} \right\}. \tag{12.162}$$

En este caso particular, observando que

$$((\nabla_{\mathbf{x}}\chi^g)^{\mathrm{t}}\mathbf{y})^s = (\nabla_{\mathbf{x}}((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s))\mathbf{y}, \tag{12.163}$$

$$(\nabla_{\mathbf{x}}\chi^g)^{\mathrm{t}}\mathbf{y} = (\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\mathbf{y}, \tag{12.164}$$

la tasa de deformación de una fibra del medio continuo (12.42) resulta

$$\begin{aligned}\overline{d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}'} = {} & 2\big[(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s + (\nabla_{\mathbf{x}}((\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s))\mathbf{y}\big]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} \\ & + 2\big[\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^T + (\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\mathbf{y}\big]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{y} + 2(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s d\mathbf{y}\cdot d\mathbf{y},\end{aligned} \tag{12.165}$$

e introduciendo las tasas de deformación

$$\varepsilon = (\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s, \tag{12.166}$$

$$\Lambda = \nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}, \tag{12.167}$$

tenemos

$$\overline{d\mathbf{x}' \cdot d\mathbf{x}'} = 2\big[\varepsilon + (\nabla_{\mathbf{x}}\varepsilon)\mathbf{y}\big]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} + 2\big[2\varepsilon + \Lambda\mathbf{y}\big]d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{y} + 2\varepsilon\mathbf{y}\cdot d\mathbf{y}. \tag{12.168}$$

De esta forma, la potencia interna P_i toma la forma

$$P_i = -\int_{\mathscr{B}_t} \big(\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s + \mathbf{M}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\big)dV = -\int_{\mathscr{B}_t} (\boldsymbol{\sigma}\cdot\varepsilon + \mathbf{M}\cdot\Lambda)dV. \tag{12.169}$$

donde $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor de segundo orden simétrico y $\mathbf{M}$ es un tensor de tercer orden con la siguiente propiedad de simetría

$$\mathbf{M}^{\mathrm{t}} = \mathbf{M}. \tag{12.170}$$

Vale la pena remarcar que si bien hemos utilizado la misma notación, ambos tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\mathbf{M}$ son diferentes de aquellos introducidos para medios micromorfos.

Para obtener una caracterización de los esfuerzos externos admisibles en este nuevo modelo integramos por parte la expresión de la potencia interna

$$P_i = \int_{\mathscr{B}_t} (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{v} + \operatorname{div}\mathbf{M}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})dV - \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \big(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\big)dS =$$
$$\int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div}\mathbf{M})\cdot\mathbf{v}dV - \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \big((\boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div}\mathbf{M})\mathbf{n}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\big)dS. \quad (12.171)$$

El último término en (12.171) puede sólo ser integrado por partes en la dirección tangente a $\partial\mathscr{B}_{tf}$. Para ello descomponemos el tensor $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}$ como sigue (ver Capítulo 9)

$$\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} = (\nabla^{\partial}_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\Pi + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}\otimes\mathbf{n}, \quad (12.172)$$

donde $\nabla^{\partial}_{\mathbf{x}}(\cdot)$ es el operador gradiente superficial y $\Pi = \mathbf{I} - \mathbf{n}\otimes\mathbf{n}$ es el operador de proyección sobre el plano tangente a $\partial\mathscr{B}_{tf}$. Con esto, escribimos el último término en (12.171) como sigue, donde integramos por partes el gradiente superficial

$$\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})dS = \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{M}\mathbf{n}\cdot\left((\nabla^{\partial}_{\mathbf{x}}\mathbf{v})\Pi + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}\otimes\mathbf{n}\right)dS =$$
$$\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \left((\mathbf{M}\mathbf{n})\Pi\cdot\nabla^{\partial}_{\mathbf{x}}\mathbf{v} + (\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}\right)dS =$$
$$-\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \operatorname{div}^{\partial}\left[(\mathbf{M}\mathbf{n})\Pi\right]\cdot\mathbf{v}dS + \int_{\Gamma_{tf}} [\![(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{m}]\!]\cdot\mathbf{v}dc$$
$$+\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}dS, \quad (12.173)$$

donde Γ_{tf} representa la curva sobre el contorno en donde existe una discontinuidad en el vector normal $\mathbf{n}$ (y por lo tanto en el plano tangente), siendo que el vector $\mathbf{m}$ representa el vector normal a la curva Γ_{ft} que está sobre el plano tangente, y que se puede escribir como $\mathbf{m} = \mathbf{l}\times\mathbf{n}$, donde $\mathbf{l}$ es el vector unitario tangente a la curva Γ_{tf}. Además, $\operatorname{div}^{\partial}$ es el operador de divergencia superficial. Poniendo la (12.173) en la (12.171) se tiene

$$P_i = \int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div}\mathbf{M})\cdot\mathbf{v}dV - \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\boldsymbol{\sigma} - \operatorname{div}\mathbf{M})\mathbf{n}\cdot\mathbf{v}dS$$
$$+\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \operatorname{div}^{\partial}\left[(\mathbf{M}\mathbf{n})\Pi\right]\cdot\mathbf{v}dS - \int_{\Gamma_{tf}} [\![(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{m}]\!]\cdot\mathbf{v}dc$$
$$-\int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}dS. \quad (12.174)$$

y agrupando términos

$$P_i = \int_{\mathscr{B}_t} \operatorname{div}(\sigma - \operatorname{div}\mathbf{M})\cdot\mathbf{v}dV - \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \left[(\sigma - \operatorname{div}\mathbf{M})\mathbf{n} - \operatorname{div}^{\partial}((\mathbf{M}\mathbf{n})\Pi)\right]\cdot\mathbf{v}dS$$
$$- \int_{\Gamma_{tf}} [\![(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{m}]\!]\cdot\mathbf{v}dc - \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} (\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}dS. \quad (12.175)$$

De esta forma, vemos que los esfuerzos admisibles al modelo tienen la siguiente caracterización

$$\langle f, \mathbf{v}\rangle = \int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}dS + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}dS + \int_{\Gamma_{tf}} \mathbf{s}\cdot\mathbf{v}dc. \quad (12.176)$$

Llegamos de esta forma a enunciar el PPV para el modelo de segundo gradiente desarrollado

$$\int_{\mathscr{B}_t} \left(\sigma\cdot(\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v})^s + \mathbf{M}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\right)dV =$$
$$\int_{\mathscr{B}_t} \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}dV + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{t}\cdot\mathbf{v}dS + \int_{\partial\mathscr{B}_{tf}} \mathbf{r}\cdot\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi}dS + \int_{\Gamma_{tf}} \mathbf{s}\cdot\mathbf{v}dc \quad \forall\hat{\mathbf{v}}\in \mathrm{Var}_v. \quad (12.177)$$

Finalmente, y siguiendo los pasos de integración por partes de forma análoga a lo realizado en la caracterización de los esfuerzos externos, obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al PPV del modelo de segundo gradiente aquí desarrollado

$$\operatorname{div}\sigma - \operatorname{div}\operatorname{div}\mathbf{M} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \qquad \text{en } \mathscr{B}_t, \quad (12.178)$$
$$(\sigma - \operatorname{div}\mathbf{M})\mathbf{n} - \operatorname{div}^{\partial}((\mathbf{M}\mathbf{n})\Pi) = \mathbf{t} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tf}, \quad (12.179)$$
$$(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{r} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tf}, \quad (12.180)$$
$$[\![(\mathbf{M}\mathbf{n})\mathbf{m}]\!] = \mathbf{s} \qquad \text{en } \Gamma_{tf}, \quad (12.181)$$

que junto con las restricciones cinemáticas

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tv}, \quad (12.182)$$
$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\xi} = \bar{\mathbf{w}} \qquad \text{en } \partial\mathscr{B}_{tv}, \quad (12.183)$$
$$\mathbf{v} = \tilde{\mathbf{v}} \qquad \text{en } \Gamma_{tv}, \quad (12.184)$$

nos entregan la descripción del problema en su forma fuerte.

Parte V
PROBLEMAS MULTIESCALA

Las teorías que relacionan el comportamiento de un medio continuo en su escala macroscópica con el comportamiento del material en escalas espaciales menores son conocidas con el nombre de *teorías multiescala*. Estas teorías tuvieron sus orígenes a partir de la segunda mitad del siglo pasado. En este sentido destacamos los trabajos de Kirkwood y sus colaboradores [146, 152, 153, 154], donde las ecuaciones que gobiernan el medio continuo fueron derivadas de argumentos dentro del contexto estadístico de los fenómenos de transporte dentro de la mecánica molecular. En la mecánica de los sólidos, desarrollos teóricos significativos en la estimación de propiedades macroscópicas de materiales heterogéneos comenzaron con la obra pionera de Hashin [135], Hill [139, 140, 141, 142], Budiansky [43], Mandel [177] y Gurson [128], entre otros. Una otra corriente adicional al desarrollo anterior, basada en resultados del análisis asintótico de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes periódicos para el modelado de medios continuos periódicos, tuvo inicio en la mitad de los años 70. Contribuciones fundamentales en esta dirección son los libros de Bensoussan y colaboradores [27] y de Sanchez-Palencia [262, 263]. Algo común a estos diferentes enfoques radica en el hecho de que las variables en el nivel macroscópico (comúnmente llamadas de variables *homogeneizadas*) están invariablemente vinculadas a algún tipo de proceso de promediado sobre campos definidos en la escala menor, también llamada microescala.

En las últimas décadas hemos podido apreciar un aumento en el uso de teorías multiescala dentro del contexto de la mecánica computacional. La atención se ha centrado especialmente en las formulaciones que se basan en el concepto de *Elemento de Volumen Representativo* (EVR) (o en inglés *Representative Volume Element*) donde tensiones y deformaciones en la macroescala se obtienen como medias volumétricas de los campos correspondientes en la microescala (EVR). El EVR generalmente está modelado como un continuo pero, también, puede ser modelado empleando interacciones discretas. Sin embargo, una característica común entre todas estas contribuciones radica en el hecho que se apoyan, casi que exclusivamente, en técnicas de homogeneización computacional que utilizan el método de elementos finitos como estrategia para la aproximación del problema [101, 158, 159, 160, 164, 186, 187, 188, 189, 190, 204, 229, 274, 284].

En la actualidad, las aplicaciones de este tipo de abordaje en la mecánica de sólidos abarca una gran gama de fenómenos incluyendo, entre otros, plasticidad, acoplamiento termomecánico, dinámica y problemas de daño/falla del material. Por ejemplo, en plasticidad, la reciente revisión de McDowell [183] presenta un compendio de la utilización de teorías multiescala no sólo dentro de la mecánica del continuo, mas también incorporando fenómenos que ocurren en escalas moleculares y atómicas. La literatura en esta área ofrece una clara evidencia de la capacidad del enfoque multiescala, el cual permite superar varios desafíos en el modelado del comportamiento plástico resultante de fenómenos complejos como dinámica de dislocaciones, plasticidad de cristales y transformación de fase, todas ellas bajo complejas historias de deformación. Sin embargo, corresponde resaltar que aún permanecen en abierto ciertos problemas fundamentales relacionados tanto con la comprensión y modelado de los mecanismos en la microescala como con el desarrollo de teorías multiescalas adecuadas (ver [183] y sus referencias).

Las formulaciones multiescala han demostrado ser útiles también en la obtención de modelos constitutivos de alta orden [159, 160, 165, 166, 273]. Estas formulaciones son adecuadas para modelar el comportamiento del material cuando las escalas no están suficientemente separadas y el comportamiento dependiente del tamaño de las estructuras del material se vuelve relevante. Un aspecto atractivo de las estrategias basadas en un EVR es que son capaces de proporcionar un comportamiento de alto orden en la macroescala a pesar de que el modelo en el EVR sea de primer orden, es decir, modelos convencionales de la mecánica.

Una descripción detallada de las innúmeras y diversas aplicaciones de estas teorías multiescala basadas en EVR escapan al objetivo de estas notas. Sin embargo, el lector interesado puede consultar el trabajo de los autores [32, 33, 34, 35, 120, 260, 261, 268, 269, 270, 271, 289, 290, 291], donde encontrará amplia bibliografía al respecto para cada área específica de aplicación.

Está claro de lo anterior que la gama de aplicaciones de formulaciones basadas en EVR es muy amplio. Cabe añadir que, en la actualidad, el interés por este tipo de enfoque está creciendo a un ritmo acelerado. Esto se confirma por el número de trabajos publicados sobre el tema en los últimos años, así como en el número de conferencias y sesiones de conferencias organizadas sobre el tema. Una de las principales causas del avance de las técnicas multiescala es la urgente necesidad de herramientas computacionales capaces de predecir con alto grado de precisión la respuesta del material en situaciones donde existen complejos mecanismos en una escala menor, pero que no pueden ser capturados por el enfoque convencional de modelado fenomenológico.

Otra de las razones para el creciente interés en los métodos multiescala basados en EVR, es la necesidad de comprender mejor cómo los mecanismos de comportamiento en el nivel de la microescala afectan el comportamiento en la macroescala [285, 297]. Este entendimiento, junto con la capacidad de predecir numéricamente su impacto en el comportamiento en la macroescala, es crucial para optimizar el uso de materiales existentes, así como para ayudar al proyecto de nuevos materiales de una manera racional y científica.

A pesar del uso generalizado de las teorías multiescala basada en EVR, faltaba en la actualidad una teoría general y unificada para el desarrollo y el tratamiento de estas teorías. De hecho, el enfoque multiescala basado en EVR de la mecánica de sólidos clásica, donde las cinemáticas macro y micro son descriptas de forma convencional, ha alcanzado bases teóricas bien fundamentadas y establecidas en trabajos como los de Hill [142] y Mandel [177]. Sin embargo, cualquier intento de extender este enfoque más allá del escenario clásico es probable que enfrente grandes desafíos. Esto se debe principalmente al hecho de que la teoría clásica (y extensiones existentes) se desarrolló sin una clara distinción entre fundamentos y sus consecuencias. Así, aún en los días de hoy, la literatura existente en el área no establece de forma clara y precisa qué modificaciones deben ser introducidas en la teoría clásica de multiescala basada en EVR si, por ejemplo, se desea incorporar regímenes físicos diferentes en cada escala de manera a llevar en cuenta fenómenos como la localización de la deformación, fractura o falla del material.

Por lo tanto, una extensión adecuada de los principios clásicos a través de las escalas que participan en el modelado, requiere una consideración muy cuidadosa que no puede ser establecida correctamente sobre la base de la intuición física, y mucho menos de técnicas computacionales como las que están siendo usadas en la mayoría de las publicaciones. De hecho, esta transferencia entre escalas, que tiene papel fundamental en la definición de las condiciones de contorno en el EVR así como en el *desarrollo* de las fórmulas de homogeneización de variables como, por ejemplo, la tensión, son en general postulados sin un principio fundamental subyacente [25, 26, 170, 267].

En respuesta a las cuestiones destacadas anteriormente, es decir la falta de una estructura general bien fundamentada y la urgente necesidad del desarrollo de modelos multiescala más sofisticados, en esta parte de nuestras notas y haciendo uso de los conceptos de dualidad y del Principio de la Potencia Virtual estudiado a lo largo de la misma, vamos a presentar una teoría variacional unificada para una amplia clase de modelos multiescala basada en EVR. Nuestro principal objetivo es presentar/crear una estructura suficientemente general dentro de la cual nuevos modelos multiescala, capaces de incorporar nuevos fenómenos físicos y mecánicos, así como fenómenos altamente complejos en la microescala, puedan ser desarrollados sobre bases matemáticas (variacionales) sólidas y siguiendo pasos sistemáticos claros y precisos. Como veremos, la teoría que vamos a presentar es capaz de tratar problemas de multi-física, falla del material y localización de la deformación en la microescala, fenómenos de fractura, efectos dinámicos, entre otros fenómenos, y sus aplicaciones en la mecánica de sólidos y fluidos.

Esta estructura unificada que vamos a presentar la hemos denominado *Método de la Potencia Virtual Multiescala*, y la misma está construida sobre tres principios funadamentales.

- **Admisibilidad cinemática**[2].
- **Dualidad**[3].
- **Principio de la Potencia Virtual Multiescala**[4].

---

[2] Dentro del contexto general de este método, la expresión *cinemática* debe ser entendida en un sentido amplio asociado a las variables primales de una dada formulación. En otras palabras, las variables cinemáticas son aquellas cuyas tasas producen potencia en dualidad con los correspondientes flujos (variables tipo tensiones). En problemas de mecánica corresponden a desplazamientos generalizados y sus correspondientes deformaciones y tasas. En problemas térmicos corresponden con la temperatura y su gradiente, y así sucesivamente en otros tipos de problemas.

[3] La dualidad fue la base sobre la que construimos toda la presentación del PPV y del PPVC en el Capítulo 3. Como vimos, ella permite determinar de manera consistente con el modelo cinemático adoptado qué tipo de esfuerzos generalizados (internos y externos) son admisibles para el problema que se está modelando. En otras palabras la *dualidad* evita definir *a priori* los esfuerzos que actúan sobre el cuerpo. Más precisamente y como vimos a lo largo de estas notas, al establecer la cinemática admisible para el problema en estudio los esfuerzos externos e internos son caracterizados por funcionales lineales (y continuos) sobre los espacios de acciones virtuales cinemáticamente admisibles.

[4] Este principio no es otra cosa que la generalización del PPV pero ahora aplicado dentro del contexto de múltiples escalas donde es posible desarrollar potencia. Como vimos en estas notas, el PPV, juntamente con los conceptos de admisibilidad cinemática y dualidad, definen una base

Para simplificar, limitaremos la presentación al caso de dos escalas: (i) la escala *macro* caracterizada por la longitud característica del dominio donde está definido el problema macro y (ii) la escala *micro* caracterizada por la longitud característica del EVR adoptado. Otra limitación en nuestra presentación es la de tratar solamente el caso de múltiples escalas espaciales. La multiescala temporal no será tratada, buscando simplificar la presentación. Sin embargo, los conceptos aquí colocados pueden ser extendidos para considerar también este caso. Con esto en mente, el concepto de *admisibilidad cinemática* establece la ligación entre las cinemáticas adoptadas en el nivel macro y en el nivel micro (EVR). Para ello serán introducidos dos operadores llamados, respectivamente, *operador de inserción* y *operador de homogeneización*. Estos operadores son responsables por la *transferencia de información cinemática* entre las dos escalas las cuales, en general, pueden estar descriptas por modelos cinemáticos diferentes. Por lo tanto, establecen las restricciones que los campos cinemáticos deben satisfacer para garantizar la admisibilidad cinemática del modelo multiescala. En otras palabras, la admisibilidad cinemática consiste en la preservación de la magnitud de estas variables cinemáticas durante el procesos de transferencia macro-micro. A su vez estas restricciones son las que permiten caracterizar los espacios y conjuntos donde se encuentran las funciones candidatas a solución y sobre los cuales serán calculadas las potencias de los funcionales asociados a los esfuerzos externos e internos. Por otro lado, el concepto de *dualidad* juega un papel fundamental en el establecimiento de la *correcta* definición de los esfuerzos externos e internos para el modelo. Como ya dijimos, estas variables no pueden ser definidas independientemente de la cinemática. En su lugar, nuestra propuesta es que estas variables sean *consecuencia* de esta cinemática, surgiendo de manera inequívoca vía dualidad (potencia) con respecto a la cinemática adoptada. Finalmente el *Principio de la Potencia Virtual Multiescala* puede ser visto como la generalización del Principio (clásico) de Macrohomogeneización de Hill-Mandel, [142, 177], que es ahora establecido como principio variacional y extendido en términos de la potencia virtual *total* desarrollada en ambas escalas macro y micro. En este sentido, el lector interesado en ver como fuimos madurando y construyendo esta formulación unificada puede consultar nuestros trabajos en el área [32, 33, 34, 35, 120, 260, 261, 268, 269, 270, 271, 289, 290, 291], siendo que, en particular, en el trabajo [34] el lector encontrará esta formulación variacional unificada.

Al desarrollar cualquier modelo empleando la estructura racional propuesta por nosotros tenemos, como consecuencia crucial, que la única libertad posible durante el proceso de modelado radica (i) en la definición de las variables que describen las cinemáticas a ser adoptadas en cada una de las escalas (macro y micro); y (ii) en la definición de cómo esas variables están relacionadas de manera a garantizar lo que hemos llamado de admisibilidad cinemática. Una vez que esto ha sido establecido, la parte *restante* del modelo queda caracterizada de manera inequívoca sobre la base de la dualidad y del Principio de la Potencia Virtual Multiescala (PPVM). Como resultado de esto, las ecuaciones de equilibrio en ambas escalas así como los

---

matemáticamente sólida y una estructura sistemática para el modelado de innúmeros problemas de la vida real.

operadores de homogeneización, que establecen la relación entre esfuerzos generalizados (internos y externos) en ambas escalas, quedan postulados a través de argumentos variacionales bien establecidos y apropiados para posterior aproximación numérica en busca de soluciones aproximadas. Con esto, nuestra formulación establece una clara separación entre los fundamentos teóricos y sus aproximaciones numéricas, algo que, en muchas publicaciones científicas sobre el tema, está confuso y o incorrecto.

Para finalizar, entendemos que el marco propuesto que presentaremos en esta parte de nuestras notas tiene una estructura lógica y un grado de flexibilidad que, no sólo proporciona una justificativa racional para los modelos ya existentes, sino, más importante aún, facilita significativamente el riguroso desarrollo, en pasos sistemáticos y bien definidos, de una amplia gama de nuevas y más refinadas teorías multiescala.

Capítulo 13
Método de la Potencia Virtual Multiescala

13.1 Introducción

En este capítulo vamos a presentar la derivación de nuestra propuesta. La misma será realizada emplendo una notación abstracta que permita atender justamente nuestro objetivo, que es el de mostrar la estructura general unificada capaz de atender las necesidades de una variedad enorme de problemas/modelos físicos tales como formulaciones clásicas en mecánica de sólidos y en mecánica de fluidos, teorías de alto orden en deformaciones, problemas potenciales, problemas envolviendo físicas diferentes en las escalas, localización de deformaciones en el nivel macro y micro, falla y daño y física discreta en el nivel micro, entre muchos otros.

Para facilitar la lectura, cada vez que un bloque de la teoría es establecido, la notación abstracta adoptada será particularizada para el caso clásico de mecánica de sólidos en régimen de deformaciones infinitesimales.

Finalmente, la secuencia adoptada en este capítulo para presentar nuestra formulación seguirá la derivación/discusión, exactamente en el mismo orden, de cada uno de los pilares sobre la cual nuestra formulación está fundamentada. Es decir: admisibilidad cinemática, dualidad y principio de la potencia virtual multiescala. Sin embargo, y como todo está basado en el uso intensivo del PPV, iniciaremos el capítulo con una revisión (e introducción de notaciones) del Método de la Potencia Virtual introducido en el Capítulo 3, de forma de dejar autocontenida esta parte de nuestras notas.

13.2 Método de la Potencia Virtual

13.2.1 Cinemática

En esta sección vamos a rever los principales conceptos cinemáticos necesarios para modelar problemas físicos dentro del contexto del Método de la Potencia Virtual

ya visto en el Capítulo 3, y, para ello y por simplicidad, nos limitaremos al caso de medios continuos. Designemos con $\mathscr{B}$ al cuerpo ocupando el dominio Ω de frontera suficientemente regular Γ, y denotemos con $\mathbf{x} \in \Omega$ un punto arbitrario en este dominio. El conjunto de los *desplazamientos generalizados*[1] que caracterizan la cinemática asociada a $\mathscr{B}$, pertenece al espacio $\mathscr{V}$ cuyos elementos $u \in \mathscr{V}$ son n-uplas de campos tensoriales suficientemente regulares de manera a asegurar que la formulación esté bien puesta. Las componentes de un elemento arbitrario $u \in \mathscr{V}$ serán denotadas por u^i, $i = 1, \ldots, n$, es decir $u = (u^1, \ldots, u^n)$. Por otro lado, cada componente u^i puede ser un campo tensorial de orden cero (escalar), de primer orden (vector), segundo orden, o de cualquier otro orden dependiendo de la física del problema. De esta manera, cada componente u^i estará descripta por r^i campos escalares. Luego, el número de campos escalares que describe un elemento u será $R = \sum_{i=1}^{n} r^i$. Finalmente, cada u^i tiene el dominio de definición $\Omega^{\mathscr{V}_i} := \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, es decir

$$\begin{aligned} u^i : \Omega^{\mathscr{V}_i} &\to \mathscr{V}_i, \\ \mathbf{x} &\mapsto u^i(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.1}$$

donde $\Omega^{\mathscr{V}_i} \subseteq \Omega$. A su vez, cada dominio $\Omega^{\mathscr{V}_i}$ puede ser un conjunto de puntos, superficies o volúmenes. Lo anterior puede ser reescrito en forma compacta de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u : \Omega^{\mathscr{V}} &\to \mathscr{V} \\ \mathbf{x} &\mapsto u(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.2}$$

donde $\Omega^{\mathscr{V}} := \mathrm{Dom}(\mathscr{V}) = (\mathrm{Dom}(\mathscr{V}_1), \ldots, \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_n))$, o también podemos poner $\Omega^{\mathscr{V}} = (\Omega^{\mathscr{V}_1}, \ldots, \Omega^{\mathscr{V}_n})$. Veamos cómo esta estructura/notación incluye ejemplos clásicos de mecánica de sólidos.

Mecánica de los sólidos clásica. *En este caso, el dominio Ω es una región del espacio Euclideano y los desplazamientos generalizados se reducen a un único campo dado por los desplazamientos $u = \mathbf{u}$ (es decir, es un campo tensorial de primer orden), $\mathscr{V}$ es un espacio de Sobolev apropiado de funciones definidas en Ω. Usualmente este espacio es adoptado como $\mathscr{V} = \mathbf{H}^1(\Omega)$, es decir, un espacio de funciones y sus gradientes cuadrado integrables en Ω. De aquí en adelante vamos a mantener esta suposición estándar. A su vez, tenemos $\Omega^{\mathscr{V}} = \Omega$. Un caso más elaborado que el anterior surge cuando interacciones multifísicas son consideradas. Por ejemplo, en acoplamientos electro-mecánicos la cinemática queda caracterizada por $u = (\mathbf{u}, \phi)$, donde $\mathbf{u}$ es el desplazamiento en el cuerpo sólido (un tensor de primer orden) y un campo potencial eletroestático (escalar) ϕ (es decir un tensor de orden cero) (ver [72]). Para el caso de fluidos micromorfos estudiados anteriormente en estas notas (ver Capítulo 12) el desplazamiento generalizado queda caracterizado por*

[1] En el presente capítulo, y haciendo abuso de notación, entenderemos por *desplazamientos generalizados* también a las *acciones de movimiento generalizadas*. De esta forma $\mathscr{V}$ será el espacio donde se encuentran estos elementos.

$u = (\mathbf{v}, \boldsymbol{\chi})$ conteniendo así el campo de velocidades $\mathbf{v}$ *(un tensor de primer orden) y una tasa de deformación* $\boldsymbol{\chi}$*, es decir un campo tensorial de segundo orden (ver [114, 115, 79, 80]).* ■

La Figura 13.1 presenta un diagrama esquemático de los espacios y operadores relevantes para el seguimiento de los conceptos del Método de la Potencia Virtual.

Pasamos ahora a definir el conjunto $\text{Kin}_u \subset \mathscr{V}$ de *desplazamientos generalizados cinemáticamente admisibles*. Es decir, los elementos $u \in \text{Kin}_u$ satisfacen algún tipo de restricción cinemática, por ejemplo, condiciones de contorno esenciales prescriptas o restricciones distribuidas sobre todo el dominio. Es en este conjunto Kin_u donde vamos a buscar por una solución del problema del equilibrio (que será definido más adelante) asociado al sistema físico en consideración. Por simplicidad, vamos a asumir que Kin_u es una variedad lineal generada por el subespacio Var_u de *acciones de movimiento virtuales generalizadas cinemáticamente admisibles*

$$\text{Var}_u = \{\hat{v} \in \mathscr{V}, \hat{v} = v_1 - v_2, v_1, v_2 \in \text{Kin}_u\}. \tag{13.3}$$

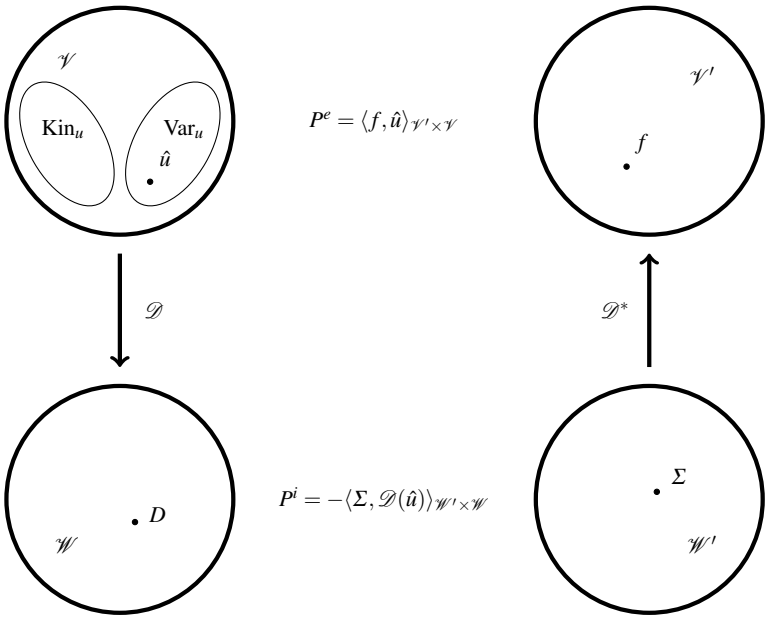


Fig. 13.1 Método de la Potencia Virtual. Diagrama esquemático de espacios, conjuntos, funcionales y operadores que forman parte del marco teórico.

Mecánica de los sólidos clásica. *Para este caso tenemos, por ejemplo,* $\text{Kin}_u = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \text{ en } \Gamma_u\}$*, y* $\text{Var}_u = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_u\}$*, donde* Γ_u *es la parte de la frontera* Γ *donde se prescriben, de forma esencial, los desplazamientos.* ■

Otro concepto fundamental que teníamos en el establecimiento del PPV es el de *acción virtual de deformación generalizada*, recordando que estas acciones pertenecen al *espacio de acciones de deformación generalizada* que denotaremos $\mathscr{W}$. En general, cualquier elemento $D \in \mathscr{W}$ está caracterizado por una m-upla de campos tensoriales. Es decir, $D = (D^1, \dots, D^m)$, donde cada componente D^i puede ser un campo tensorial de orden cero (escalar), o de primer orden (vector) o de cualquier otra orden dependiendo de la física del problema. Cada componente D^i, $i = 1, \dots, m$, es descripta por s^i campos escalares, por lo que el número total de escalares que describen D está dado por $S = \sum_{i=1}^{m} s^i$. A su vez, cada componente D^i tiene su dominio de definición dado por $\Omega^{\mathscr{W}_i} := \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_i)$, es decir

$$\begin{aligned} D^i : \Omega^{\mathscr{W}_i} &\to \mathscr{W}_i, \\ \mathbf{x} &\mapsto D^i(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.4}$$

donde, nuevamente, cada $\Omega^{\mathscr{W}_i} \subseteq \Omega$ puede ser un conjunto de puntos, superficies o volúmenes. Todo lo anterior podemos colocarlo de una manera compacta como sigue

$$\begin{aligned} D : \Omega^{\mathscr{W}} &\to \mathscr{W}, \\ \mathbf{x} &\mapsto D(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.5}$$

donde $\Omega^{\mathscr{W}} := \mathrm{Dom}(\mathscr{W}) = (\mathrm{Dom}(\mathscr{W}_1), \dots, \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_m))$, es decir que se tiene $\Omega^{\mathscr{W}} = (\Omega^{\mathscr{W}_1}, \dots, \Omega^{\mathscr{W}_m})$.

Finalmente definimos el operador lineal $\mathscr{D}$ que lleva elementos del espacio $\mathscr{V}$ al espacio $\mathscr{W}$, y por eso recibe el nombre de *operador de acción de deformación generalizada*. Tenemos así

$$\begin{aligned} \mathscr{D} : \mathscr{V} &\to \mathscr{W}, \\ u &\mapsto D = \mathscr{D}u. \end{aligned} \tag{13.6}$$

Mecánica de los sólidos clásica. *En este caso, $\mathscr{D} = (\nabla(\cdot))^s$, con lo que tenemos $\mathscr{D}\mathbf{u} = (\nabla\mathbf{u})^s$, $n = 1$, $R = 3$, $m = 1$ y $S = 6$. El campo $(\nabla\mathbf{u})^s$ está definido sobre todo el cuerpo, luego $\Omega^{\mathscr{W}} = \Omega$, y pertenece al espacio de funciones $\mathscr{W} = \mathbf{L}^2_{\mathrm{sym}}(\Omega) = \{\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega), \varepsilon = \varepsilon^T\}$ (recordemos que hemos adoptado una descripción matemática estándar). Para problemas de acoplamiento electro-mecánicos el operador de acción de deformación generalizada es tal que $\mathscr{D}(\mathbf{u}, \phi) = ((\nabla\mathbf{u}^s, \nabla\phi)$, donde $\mathbf{u}$ y ϕ han sido descriptos anteriormente. Luego, en este caso tenemos,*

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} (\nabla(\cdot))^s & 0 \\ 0 & \nabla(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{13.7}$$

$n = 2$, $R = 4$, $m = 2$ and $S = 9$. Para el fluido micromorfo estudiado en el Capítulo 12, el operador de acción de deformación generalizada carcateriza la 3-upla $\mathscr{D}(\mathbf{v}, \nu) = ((\nabla\mathbf{v})^s, \nabla\mathbf{v} - \nu, \nabla\nu)$, luego tenemos

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} (\nabla(\cdot))^s & 0 \\ \nabla(\cdot) & -\mathbf{I} \\ 0 & \nabla(\cdot) \end{pmatrix}, \tag{13.8}$$

$n = 2$, $R = 12$, $m = 3$ and $S = 45$. Es importante mencionar que el sentido del operador $\nabla(\cdot)$ dependerá de la configuración en la que estemos describiendo el problema. Así, en la mecánica de sólidos en general es el gradiente material (podría también ser el gradiente espacial) mientras que, en el caso de la mecánica de fluidos, incluyendo el caso de fluidos micromorfos, es el gradiente espacial. ■

Veamos ahora la *compatibilidad cinemática* en el Método de la Potencia Virtual. Un elemento $D \in \mathscr{W}$ se denomina *acción de deformación generalizada cinemáticamente compatible* si existe un elemento $u \in \mathscr{V}$ tal que $D = \mathscr{D}u$. El dominio donde está definida una acción de deformación generalizada cinemáticamente compatible será denotado por $\Omega^{\mathscr{W}}$, y podemos expresarla como $\Omega^{\mathscr{W}} = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}(\mathscr{V}))$.

Observación 13.1 *Observe que como $\mathscr{D}$ es un operador lineal, el mismo tiene una representación matricial (rectangular) bien definida dada por*

$$\mathscr{D} = \begin{pmatrix} \mathscr{D}^{11} & \mathscr{D}^{12} & \dots & \mathscr{D}^{1n} \\ \mathscr{D}^{21} & \mathscr{D}^{22} & \dots & \mathscr{D}^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}^{m1} & \mathscr{D}^{m2} & \dots & \mathscr{D}^{mn} \end{pmatrix}. \tag{13.9}$$

En esta representación tenemos $\Omega^{\mathscr{W}_i} = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}^{i1}(u^1)) = \ldots = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}^{in}(u^n))$, $i = 1, \ldots, m$.

Otro importante subespacio de $\mathscr{V}$, que cumple papel importante en el Método de la Potencia Virtual, está dado por el *espacio nulo* del operador $\mathscr{D}$, que llamamos $\mathscr{N}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{V}$, y que está definido de la siguiente manera

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \{u \in \mathscr{V}; \mathscr{D}u = 0\}. \tag{13.10}$$

Es decir, es el subespacio de $\mathscr{V}$ cuyos elementos son acciones de movimiento que producen acciones de deformación generalizada nulas. Es por eso que estas acciones de movimiento generalizadas son llamadas también *acciones de movimiento generalizado rígidas*.

Mecánica de los sólidos clásica. *En este caso, el espacio nulo del operador $\mathscr{D} = (\nabla(\cdot))^s$, es el espacio de todos los desplazamientos infinitesimales rígidos que, por lo tanto, admiten la siguiente representación $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_o + \mathbf{W}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_o)$, donde $\mathbf{u}_o$ es un campo uniforme, $\mathbf{W}$ es un tensor de segundo orden antisimétrico (también uniforme) y $\mathbf{x}_o$ un punto fijo y arbitrario de referencia.* ■

También es importante destacar el subespacio, $\mathscr{D}(\mathrm{Var}_u) \subset \mathscr{W}$, que es la imagen de Var_u bajo la acción del operador $\mathscr{D}$. Los elementos de este espacio reciben el nombre de *acciones virtuales de deformación generalizada compatibles*.

13.2.2 Dualidad

Como vimos a lo largo de nuestras notas, la *primera hipótesis* en el modelado basado en el Método de la Potencia Virtual es admitir que los esfuerzos generalizados internos, Σ, y externos, f, admisibles al sistema físico que estamos modelando, son duales (es decir son funcionales lineales y continuos) de las variables cinemáticas adoptadas para describir el sistema. En otras palabras, estos esfuerzos generalizados no pueden ser definidos a priori. En contrapartida, ellos son una *consecuencia* de la cinemática adoptada y del concepto de dualidad. Así, denotaremos $\mathscr{W}'$ y $\mathscr{V}'$ los espacios duales de $\mathscr{W}$ y $\mathscr{V}$, respectivamente, y nuestra **primera hipótesis** podemos formalizarla de la siguiente manera

- La naturaleza de los esfuerzos internos generalizados admisibles con el sistema, que llamaremos *tensiones generalizadas*, $\Sigma \in \mathscr{W}'$, es caracterizada por funcionales lineales (y continuos) en $\mathscr{W}$, definidos por el producto de dualidad denotado por $\langle\!\langle \Sigma, D \rangle\!\rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}}$.
- De manera similar, la naturaleza de las *fuerzas generalizadas* $f \in \mathscr{V}'$ es caracterizada por funcionales lineales (y continuos) en $\mathscr{V}$, definidos por el par de dualidad denotado por $\langle\!\langle f, u \rangle\!\rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}}$.

Estos productos de dualidad satisfacen las propiedades bien conocidas

- $\langle\!\langle \Sigma, D \rangle\!\rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = 0 \quad \forall D \in \mathscr{W} \Rightarrow \Sigma = 0,$
- $\langle\!\langle \Sigma, D \rangle\!\rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = 0 \quad \forall \Sigma \in \mathscr{W}' \Rightarrow D = 0,$
- $\langle\!\langle f, u \rangle\!\rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} = 0 \quad \forall u \in \mathscr{V} \Rightarrow f = 0,$
- $\langle\!\langle f, u \rangle\!\rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} = 0 \quad \forall f \in \mathscr{V}' \Rightarrow u = 0.$

Para caracterizar estos productos de dualidad para el modelo cinemático que se esté desarrollando, primero debemos proceder a adoptar un adecuado producto de dualidad $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}}$. Obviamente, la definición de este producto de dualidad dependerá de la naturaleza del fenómeno físico descripto por el modelo. A su vez y como veremos en breve, esta definición también permitirá caracterizar el producto de dualidad $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}}$.

En este sentido y con las notaciones introducidas en la sección anterior, el producto de dualidad entre tensiones y acciones de deformación generalizada toma la forma

$$\langle \Sigma, \mathscr{D}u \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \sum_{i=1}^{m} \langle \Sigma^i, (\mathscr{D}u)^i \rangle_{\mathscr{W}_i' \times \mathscr{W}_i}, \tag{13.11}$$

o, equivalentemente, usando (13.9) tenemos

$$\langle \Sigma, \mathscr{D}u \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \langle \Sigma^i, \mathscr{D}^{ij} u^j \rangle_{\mathscr{W}_i' \times \mathscr{W}_i}, \tag{13.12}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathscr{W}_i' \times \mathscr{W}_i}$ denota el producto interno generalizado sobre el dominio de definición de la componente i de la deformación generalizada. Por ejemplo, si $\Omega^{\mathscr{W}_i}$ es una superficie o un volumen en el espacio Euclideano, este producto de dualidad podría tomar la forma

$$\langle \Sigma^i, (\mathscr{D}u)^i \rangle_{\mathscr{W}_i' \times \mathscr{W}_i} = (\Sigma^i, (\mathscr{D}u)^i)_{\Omega^{\mathscr{W}_i}} = \int_{\Omega^{\mathscr{W}_i}} \Sigma^i \cdot (\mathscr{D}u)^i d\Omega^{\mathscr{W}_i}, \tag{13.13}$$

mientras que, si $\Omega^{\mathscr{W}_i}$ es un conjunto de puntos, podría ser dado por

$$\langle \Sigma^i, (\mathscr{D}u)^i \rangle_{\mathscr{W}_i' \times \mathscr{W}_i} = \sum_{i=1}^{N^{\mathscr{W}_i}} \Sigma^i \cdot (\mathscr{D}u)^i, \tag{13.14}$$

donde $N^{\mathscr{W}_i}$ representa la cardinalidad del conjunto $\Omega^{\mathscr{W}_i}$. De esta manera, y una vez escogida la definición del producto de dualidad, estaremos en condiciones de establecer una representación (identificación) para Σ. El ejemplo a continuación muestra esto en detalle.

Mecánica de los sólidos clásica. *El producto de dualidad adoptado para atender este modelo consiste en la siguiente expresión* $\langle \Sigma, \mathscr{D}u \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \int_\Omega \sigma \cdot (\nabla \mathbf{u})^s d\Omega$. *Aquí la tensión* σ *resulta dual a la tasa de deformación, dada por la parte simétrica del gradiente del campo de acciones de movimiento* $\mathbf{u}$. *De esta manera, podemos identificar (o representar)* σ *con un campo tensorial de segundo orden simétrico, reconocido en este modelo como el tensor de tensión de Cauchy.* ■

Corresponde resaltar aquí que en el PPV el producto $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}}$ es evaluado en el conjunto más reducido de acciones virtuales de deformación generalizada compatibles dado por $\mathscr{D}(\mathrm{Var}_u)$ siendo así llamado *Potencia Virtual Interna*, y denotado por P^{i2}. Es decir,

$$P^i(\mathscr{D}\hat{u}) = \langle \Sigma, \mathscr{D}\hat{u} \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} \quad \hat{u} \in \mathrm{Var}_u. \tag{13.15}$$

Resumiendo, cuando la cinemática para un modelo correspondiente a un sistema físico particular es definida conjuntamente con el producto de dualidad asociado a la potencia virtual interna, la representación de la tensiones generalizadas admisibles al modelo queda unívocamente identificada.

Antes de continuar, es importante resaltar que la definición a ser adoptada para la potencia virtual interna debe ser tal que permanezca invariante frente a cambios de observador, es decir, invariante frente a la superposición de acciones de movimiento rígidas. En otras palabras, debe satisfacer la siguiente restricción

$$P^i(\mathscr{D}\hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}). \tag{13.16}$$

Vamos a ver ahora que, la adopción de una forma específica para el producto de dualidad entre tensiones generalizadas y acciones de deformación generalizada permite caracterizar, de manera también unívoca, a las *fuerzas externas generalizadas* $f \in \mathscr{V}'$ admisibles con el modelo cinemático, así como también, permite caracterizar el correspondiente funcional asociado con la *Potencia Virtual Externa*. Para ver

[2] Frecuentemente, la potencia virtual interna es definida con un signo negativo como lo hicimos en estas notas (ver Capítulo 3). Pero esto es irrelevante ya que depende de como se exprese el PPV es decir, la suma de las potencias virtuales internas y externas igual a cero (en este caso va el signo negativo), o la potencia virtual interna igual a la potencia virtual externa (en este caso la potencia interna no es precedida por el signo negativo).

esto, recordemos la definición del *operador adjunto* (llamado también *operador de equilibrio*), $\mathscr{D}^*$, dada por[213]

$$\begin{aligned} \mathscr{D}^* : \mathscr{W}' &\to \mathscr{V}', \\ \Sigma &\mapsto f = \mathscr{D}^*(\Sigma), \end{aligned} \tag{13.17}$$

donde $\mathscr{D}^*$ es el operador adjunto del operador $\mathscr{D}$, es decir que satisface

$$\langle \Sigma, \mathscr{D}u \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \langle \mathscr{D}^* \Sigma, u \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}}. \tag{13.18}$$

De la definición anterior vemos que, adoptada una forma específica para el producto de dualidad $\langle \Sigma, \mathscr{D}u \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}}$, obtenemos una caracterización para *f admisible para el modelo cinemático adoptado*. Es decir, (13.18) implica que

$$f \text{ debe tener la estructura dada por } \mathscr{D}^* \Sigma \in \mathscr{V}'. \tag{13.19}$$

Por otro lado, la forma $\langle \mathscr{D}^* \Sigma, u \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}}$ de manera expandida vimos que correspondía a

$$\langle \mathscr{D}^* \Sigma, u \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} = \sum_{i=1}^{n} \langle (\mathscr{D}^* \Sigma)^i, u^i \rangle_{\mathscr{V}_i' \times \mathscr{V}_i}, \tag{13.20}$$

o, equivalentemente, usando (13.9),

$$\langle \mathscr{D}^* \Sigma, u \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \langle \mathscr{D}^{*ij} \Sigma^j, u^i \rangle_{\mathscr{V}_i' \times \mathscr{V}_i}. \tag{13.21}$$

De esta manera así como ocurrió con la obtención de la representación para Σ, la representación admisible de f para el modelo cinemático adoptado queda inmediatamente identificada una vez que el operador adjunto $\mathscr{D}^*$ sea obtenido para el modelo en estudio. El ejemplo a seguir muestra esto en detalle.

Mecánica de los sólidos clásica. *En este caso el operador adjunto $\mathscr{D}^*$ es obtenido integrando por parte la expresión de la potencia virtual interna, es decir que*

$$\begin{aligned} \langle \Sigma, \mathscr{D}u \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \mathbf{u})^s \, d\Omega = -\int_\Omega \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma = \\ \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma = \langle \mathscr{D}^* \Sigma, u \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}}, \end{aligned} \tag{13.22}$$

donde $\mathbf{n}$ *es el vector normal (unitario y apuntando para el exterior del dominio) al contorno Γ_t que es tal que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$, $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \emptyset$. Con esto vemos que las fuerzas externas $f \in \mathscr{V}'$ pueden ser representadas por: un campo vectorial,* $\mathbf{b}$*, de fuerzas por unidad de volumen actuando en Ω y por un campo vectorial,* $\mathbf{t}$*, de fuerzas por unidad de superficie actuando en el contorno Γ_t donde no hay restricciones*

cinemáticas prescriptas[3]. ■

Identificada así la naturaleza de $f \in \mathscr{V}'$, podemos introducir el funcional de *Potencia Virtual Externa* restringiendo la evaluación de este producto de dualidad al espacio Var_u. Es decir

$$P^e(\hat{u}) = \langle f, \hat{u} \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} \quad \hat{u} \in \text{Var}_u, \tag{13.23}$$

o, equivalentemente

$$P^e(\hat{u}) = \sum_{i=1}^{n} \langle f^i, \hat{u}^i \rangle_{\mathscr{V}_i' \times \mathscr{V}_i} \quad \hat{u} \in \text{Var}_u. \tag{13.24}$$

Con estas definiciones podemos ahora introducir el funcional *Potencia Virtual Total* definido de la siguiente forma

$$P^t(\hat{u}, \mathscr{D}\hat{u}) = P^i(\mathscr{D}\hat{u}) - P^e(\hat{u}) \quad \hat{u} \in \text{Var}_u. \tag{13.25}$$

13.2.3 Principio de la Potencia Virtual

La **segunda hipótesis** en el Método de la Potencia Virtual es admitir el Principio de la Potencia Virtual que, como ya vimos en estas notas, establece bajo qué condiciones el sistema de tensiones y de fuerzas generalizadas admisibles está en *equilibrio*. Es decir, el **Principio de la Potencia Virtual** establece que las tensiones generalizadas $\Sigma \in \mathscr{W}'$ y las fuerzas generalizadas $f \in \mathscr{V}'$ están en equilibrio si y sólo si la siguiente ecuación variacional es satisfecha[4]

$$P^t(\hat{u}, \mathscr{D}\hat{u}) = 0 \quad \forall \hat{u} \in \text{Var}_u. \tag{13.26}$$

Esta ecuación puede ser reescrita como

$$P^i(\mathscr{D}\hat{u}) = P^e(\hat{u}) \quad \forall \hat{u} \in \text{Var}_u, \tag{13.27}$$

o como

$$\langle \Sigma, \mathscr{D}\hat{u} \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \langle f, \hat{u} \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} \quad \forall \hat{u} \in \text{Var}_u. \tag{13.28}$$

Aún más, de (13.26), f debe también satisfacer

---

[3] Si admitimos que σ no es suficientemente regular en todo el dominio de Ω presentando, por ejemplo, una discontinuidad en la superficie S interior a Ω, la integración por parte conducirá automáticamente a caracterizar un tipo de fuerza adicional admisible para el modelo, la cual está dada por el vector $\mathbf{s}$, representando una fuerza por unidad de superficie, actuando en la superficie S.

[4] La expresión *equilibrio* no se limita al *equilibrio estático*. Si el sistema de fuerzas f incluye las fuerzas generalizadas de inercia asociadas al problema físico en estudio, el equilibrio dinámico es llevado automaticamente en cuenta por el PPV.

$$\langle f, \hat{u} \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} = 0 \quad \forall \hat{u} \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}). \tag{13.29}$$

En el siguiente ejemplo vemos una aplicación del PPV.

Mecánica de los sólidos clásica. *El campo de tensión de Cauchy* $\boldsymbol{\sigma}$ *y el sistema de fuerzas externas* $(\mathbf{b}, \mathbf{t})$ *están en equilibrio si y sólo si*

$$\int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{u}})^s \, d\Omega = \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{t} \cdot \hat{\mathbf{u}} \, d\Gamma \quad \forall \hat{\mathbf{u}} \in \mathrm{Var}_u. \tag{13.30}$$

Obviamente esta ecuación variacional expresa también el equilibrio dinámico si, por ejemplo, $\mathbf{b}$ *es el campo de fuerzas de inercia* $\mathbf{b} = -\rho \ddot{\mathbf{u}}$*, donde* ρ *es la masa específica y* $\ddot{\mathbf{u}}$ *es la aceleración de las partículas del cuerpo. Es importante observar que* (13.29) *implica que todo sistema de fuerzas (de superficie y de cuerpo y de inercia, si efectos dinámicos son considerados) no produce potencia para toda acción virtual rígida cinemáticamente admisible.* ■

13.2.4 Problema del Equilibrio

Para completar la descripción del modelo para el problema físico en estudio falta incorporar el comportamiento del material que constituye el medio. Así, las *ecuaciones constitutivas* deben ser introducidas para caracterizar el estado de tensiones Σ como una función de la historia de las variables cinemáticas adoptadas en el modelo. Si designamos con u^t la historia de los desplazamientos generalizados que el cuerpo ha tenido hasta el instante t, lo anterior lo podemos representar de la siguiente forma

$$\Sigma = \Sigma(u^t). \tag{13.31}$$

A su vez, y para todo instante $\tau \in [0,t]$, el correspondiente desplazamiento $u(\tau)$ es cinemáticamente admisible, es decir $u(\tau) \in \mathrm{Kin}_u$. Así, usaremos la notación $u^t \in \mathrm{Kin}_u$ para indicar que los desplazamientos del cuerpo $\mathscr{B}$ son cinemáticamente admisibles para todo instante $\tau \in [0,t]$. Con estas definiciones en manos podemos establecer el problema del equilibrio en el cuerpo, ya incorporando el comportamiento del material que lo constituye, de la siguiente forma.

Para una dada ecuación constitutiva (13.31) y dada la historia del proceso de cargas que actúan sobre el cuerpo, f^t, determinar la historia $u^t \in \mathrm{Kin}_u$ de desplazamientos cinemáticamente admisibles tal que

$$\langle \Sigma(u^\tau), \mathscr{D}\hat{u} \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \langle f(\tau), \hat{u} \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} \quad \forall \hat{u} \in \mathrm{Var}_u, \forall \tau \in [0,t]. \tag{13.32}$$

13.3 Fundamentos de la Teoría Multiescala

A partir de aquí vamos a presentar nuestra teoría variacional unificada, que hemos llamado *Método de la Potencia Virtual Multiescala*, y que, como ya mencionado en la introducción de este capítulo, nos permitirá desenvolver modelos físicos multiescala basados en el concepto de EVR.

La familia de teórias multiescalas que podrán ser atendidas por nuestra formulación está basada en la idea de que cada punto en la macroescala caracterizada por el cuerpo, que ocupa el dominio Ω_M, está asociado con un elemento representativo de volumen, EVR, que ocupa el dominio Ω_μ de longitud característica ℓ_μ mucho menor que la longitud característica ℓ_M de Ω_M (ver Figura 13.2). Los dominios Ω_M y Ω_μ son también designados como macroescala y microescala, respectivamente. Puntos (o coordenadas) en la macroescala son denotados $\mathbf{x} \in \Omega_M$, mientras que puntos (o coordenadas) en la microescala serán denotados $\mathbf{y} \in \Omega_\mu$. A su vez, y de aquí en adelante, usaremos los subíndices M y μ para designar, respectivamente, entidades (variables) definidas en la macroescala y en la microescala, respectivamente.

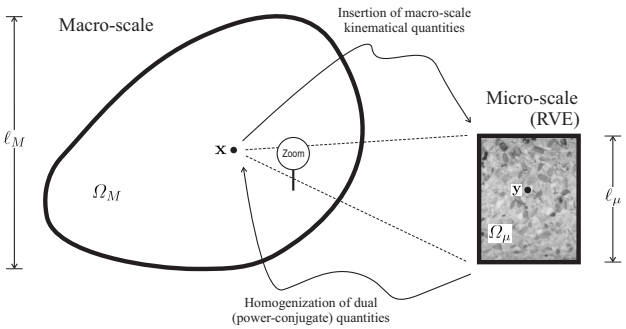


Fig. 13.2 Modelado multiescala basado en EVR. La escala observable del cuerpo se denomina macroescala, y la estructura que compone el medio es denominada microescala.

La forma como vamos a desarrollar nuestro *Método de la Potencia Virtual Multiescala* seguirá los mismos pasos que hemos seguido en la Sección 13.2 para describir el Método de la Potencia Virtual que, dentro del contexto actual, corresponde a una sola escala. En particular, los conceptos de admisibilidad cinemática, dualidad y de potencia virtual serán extendidos de manera a permitir la formulación del *Principio de la Potencia Virtual Multiescala*. Así, el método está basado en los siguientes tres principios fundamentales

(i) *Principio de Admisibilidad Cinemática*, donde las cinemáticas macro y micro son definidas y vinculadas por medio de los operadores de *inserción macro-micro* y de *homogeneización micro-macro*, asegurando una transferencia físicamente coherente (conservación de las cantidades transferidas) entre las variables cinemáticas vinculadas a través de las escalas.

(ii) *Dualidad*, donde las fuerzas y tensiones generalizadas a nivel macro y a nivel micro son definidas en dualidad con sus respectivas variables cinemáticas adoptadas en cada escala.
(iii) *Principo de la Potencia Virtual Multiescala*, el cual generaliza el conocido Principio de Marcohomegeneización de Hill-Mandell y a través del cual las ecuaciones de equilibrio y relaciones de homogeneización para las fuerzas y las tensiones generalizadas son obtenidas de manera inequívoca vía argumentos variacionales bien conocidos.

Como veremos, la teoría propuesta proporciona una estructura clara y lógica, marco en el que las formulaciones existentes pueden justificarse racionalmente y los nuevos modelos multiescala, más generales, se pueden derivar rigurosamente siguiendo pasos bien definidos.

La racionalidad del enfoque propuesto es totalmente similar a la del Método de la Potencia Virtual de la Sección 13.2, empleado para derivar modelos de sistemas físicos definidos en una única escala. En particular, veremos que, una vez que las variables cinemáticas en las dos escalas son postuladas, la admisibilidad cinemática es establecida para el sistema en cuestión, y las correspondientes fuerzas y tensiones generalizadas en ambas ecalas son identificadas por medio de argumentos de dualidad, todas las ecuaciones del modelo multiescala son derivadas del Principio de la Potencia Virtual Multiescala por medio de argumentos variacionales bien definidos.

13.4 Admisibilidad Cinemática entre Escalas

Al considerar un sistema físico de dos escalas, vamos a asumir desde el principio que la cinemática que describe los fenómenos relevantes en la macroescala puede, en general, diferir de la cinemática de la microescala. Sin embargo, como las ideas y las definiciones presentadas en la Sección 13.2.1 son aplicables individualmente a cada una de las dos escalas, procedimientos análogos serán seguidos en cada escala.

Al postular las cinemáticas de un sistema físico de varias escalas, en última instancia, uno busca definir el espacio de los desplazamientos generalizados admisibles en la microescala, que denotaremos Kin_{u_μ}, y que, evidentemete, dependerá también de las variables cinemáticas adoptada en el nivel macro.

En particular, este proceso de caracterizar Kin_{u_μ} será referido como *Principio de la Admisibilidad Cinemática* y comprende cuatro pasos descriptos a seguir

(i) Definición de las *cinemáticas* en las escalas macro y micro.
(ii) Definición de los *operadores de inserción* que prescriben cómo las variables cinemáticas en la macroescala son insertadas en la microescala.
(iii) Definición de los *operadores de homogeneización* que establecen cómo los campos cinemáticos en la microescala son promediados para caracterizar las variables cinemáticas en la macroescala. De esta manera, el proceso de homogeneización de las variables cinemáticas en la microescala es, de alguna manera, el proceso inverso al de inserción. Por lo tanto, estos operadores de

homgeneización deben asegurar que las variables cinemáticas que participan del proceso sean en algún sentido preservadas.

(iv) *Admisibilidad cinemática*, la cual permite obtener la definición del conjunto Kin_{u_μ} formado por todos los campos de desplazamientos generalizados en la microescala cinemáticamene admisibles.

En particular, el punto (i), el cual presupone la definición de las variables cinemáticas, depende fundamentalmente del fenómeno (y nivel de detalle) que se desea capturar con el modelo y, en consecuencia, es fuertemente influenciado por la experiencia y conocimiento de la persona que está construyendo el modelo. Por lo tanto, es aquí donde yace el único punto de arbitrariedad dentro del método que está siendo propuesto.

13.4.1 Cinemática en la Macroescala

Siguiendo lo presentado en la Sección 13.2, la cinemática en la macroescala es caracterizada por los desplazamientos generalizados $u_M \in \mathscr{V}_M$, definidos por una n_M-upla de campos tensoriales, donde cada componente u_M^i es descripta por r_M^i campos escalares. A su vez, el número total de campos escalares que describen u_M resulta $R_M = \sum_{i=1}^{n_M} r_M^i$, siendo que las componentes tienen el dominio de definición $\Omega_M^{\mathscr{V}_i} := \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_{Mi})$, $i = 1, \ldots, n_M$, es decir

$$\begin{aligned} u_M^i : \Omega_M^{\mathscr{V}_i} &\to \mathscr{V}_{Mi}, \\ \mathbf{x} &\mapsto u_M^i(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.33}$$

donde $\Omega_M^{\mathscr{V}_i} \subseteq \Omega_M$, y donde $\Omega_M^{\mathscr{V}_i}$ puede ser un conjunto de puntos, superficies o volúmenes. En forma compacta lo anterior se escribe como

$$\begin{aligned} u_M : \Omega_M^{\mathscr{V}} &\to \mathscr{V}_M, \\ \mathbf{x} &\mapsto u_M(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.34}$$

y, como en la Sección 13.2, tenemos que el dominio $\Omega_M^{\mathscr{V}}$ está definido como $\Omega_M^{\mathscr{V}} := \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_M) = (\mathrm{Dom}(\mathscr{V}_{M1}), \ldots, \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_{Mn_M}))$, o equivalentemente, $\Omega_M^{\mathscr{V}} = (\Omega_M^{\mathscr{V}_1}, \ldots, \Omega_M^{\mathscr{V}_{n_M}})$.

El conjunto de los campos de desplazamientos generalizados cinemáticamente admisibles será designado Kin_{u_M} y su espacio asociado de acciones virtuales de desplazamientos generalizados cinemáticamente admisibles será Var_{u_M}. El espacio de acciones de deformación en la macroescala lo denotaremos $\mathscr{W}_M$. Cada elemento $D_M \in \mathscr{W}_M$ es una m_M-upla de campos tensoriales, donde cada componente D_M^i es descripta por s_M^i campos escalares (el total de los campos escalares que describen D_M es $S_M = \sum_{i=1}^{m_M} s_M^i$). Por otro lado, el dominio de definición de estas componentes será designado $\Omega_M^{\mathscr{W}_i} := \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_{Mi})$, $i = 1, \ldots, m_M$, es decir

$$\begin{aligned} D_M^i : \Omega_M^{\mathscr{W}_i} &\to \mathscr{W}_{Mi}, \\ \mathbf{x} &\mapsto D_M^i(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.35}$$

donde $\Omega_M^{\mathscr{W}_i} \subseteq \Omega_M$ puede ser un conjunto de puntos, superficies o volúmenes, y que en forma compacta puede ser escrito como

$$\begin{aligned} D_M : \Omega_M^{\mathscr{W}} &\to \mathscr{W}_M, \\ \mathbf{x} &\mapsto D_M(\mathbf{x}), \end{aligned} \tag{13.36}$$

donde $\Omega_M^{\mathscr{W}} := \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_M) = (\mathrm{Dom}(\mathscr{W}_{M1}), \ldots, \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_{Mm_M}))$, o equivalentemente $\Omega_M^{\mathscr{W}} = (\Omega_M^{\mathscr{W}_1}, \ldots, \Omega_M^{\mathscr{W}_{m_M}})$.

En la macroescala las acciones de deformación generalizada cinemáticamente admisibles están caracterizadas por el operador lineal

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_M : \mathscr{V}_M &\to \mathscr{W}_M \\ u_M &\mapsto D_M = \mathscr{D}_M(u_M). \end{aligned} \tag{13.37}$$

A su vez, el dominio de definición de las acciones de deformación generalizada cinemáticamente admisibles es denotado $\Omega_M^{\mathscr{W}} = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}_M(u_M))$.

Observación 13.2 *Como en* (13.9)*, dado que $\mathscr{D}_M$ es un oprador lineal, tenemos la siguiente representación para este operador*

$$\mathscr{D}_M = \begin{pmatrix} \mathscr{D}_M^{11} & \mathscr{D}_M^{12} & \cdots & \mathscr{D}_M^{1n_M} \\ \mathscr{D}_M^{21} & \mathscr{D}_M^{22} & \cdots & \mathscr{D}_M^{2n_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}_M^{m_M 1} & \mathscr{D}_M^{m_M 2} & \cdots & \mathscr{D}_M^{m_M n_M} \end{pmatrix}, \tag{13.38}$$

donde $\Omega_M^{\mathscr{W}_i} = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}_M^{i1}(u_M^1)) = \ldots = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}_M^{in_M}(u_M^{n_M}))$, $i = 1, \ldots, m_M$.

La Figura 13.3 muestra esquemáticamente la estructura funcional en la macroescala (equivalente a la Figura 13.1 pero ahora en el contexto multiescala). En esta figura hemos introducido conjuntos y operaciones adicionales relacionadas con puntos individuales del dominio macro. En particular, el valor que la variable $(\cdot)$ tiene en un punto arbitrario $\mathbf{x}$ de la macroescala es denotado por $(\cdot)|_{\mathbf{x}}$. Como veremos en breve estos valores serán relacionados con la cinemática a ser adoptada en la microescala (EVR).

13.4.2 Cinemática en la Microescala

Como ya mencionamos, la suposición fundamental en las teorías multiescala basadas en EVR es que cada punto $\mathbf{x}$ de la macroescala está asociado con un dominio en la microescala (EVR). Aquí presentaremos la cinemática del dominio de un

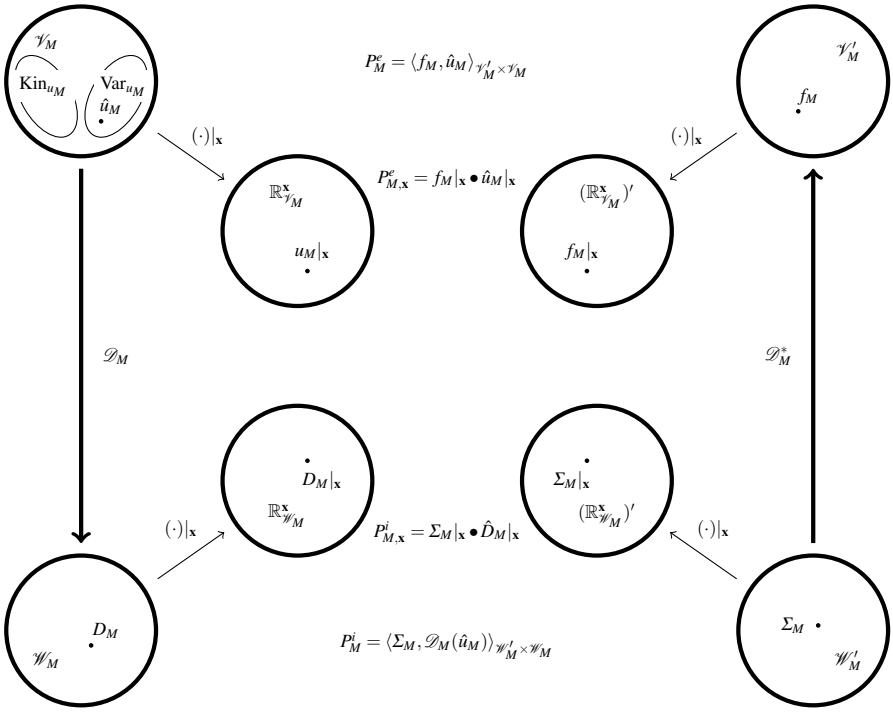


Fig. 13.3 Método de la Potencia Virtual Multiescala. Diagrama esquemático de espacios, conjuntos, funcionales y operaciones básicos en la macroescala.

EVR general, siguiendo un esquema totalmente similar al ya presentado para la macroescala. Es decir, el EVR ocupa el dominio Ω_μ y puntos en el EVR serán designados por $\mathbf{y} \in \Omega_\mu$. El espacio de los desplazamientos generalizados en el EVR es denotado $\mathscr{V}_\mu$, donde cada lemento $u_\mu \in \mathscr{V}_\mu$ es una n_μ-upla de campos tensoriales, cada componente u^i_μ es decripta por r^i_μ campos escalares (el total de campos que describen u_μ es $R_\mu = \sum_{i=1}^{n_\mu} r^i_\mu$), y el dominio de definición de cada campo es $\Omega_\mu^{\mathscr{V}_i} := \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_{\mu_i})$, $i = 1, \ldots, n_\mu$, es decir

$$\begin{aligned} u^i_\mu : \Omega_\mu^{\mathscr{V}_i} &\to \mathscr{V}_{\mu_i}, \\ \mathbf{y} &\mapsto u^i_\mu(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{13.39}$$

donde cada $\Omega_\mu^{\mathscr{V}_i} \subseteq \Omega_\mu$ es un conjunto de puntos, superficies o volúmenes. En notación compacta resulta

$$\begin{aligned} u_\mu : \Omega_\mu^{\mathscr{V}} &\to \mathscr{V}_\mu, \\ \mathbf{y} &\mapsto u_\mu(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{13.40}$$

donde $\Omega_\mu^{\mathscr{V}} := \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_\mu) = (\mathrm{Dom}(\mathscr{V}_{\mu\,1}), \ldots, \mathrm{Dom}(\mathscr{V}_{\mu\,n_\mu}))$, o equivalentemente, $\Omega_\mu^{\mathscr{V}} = (\Omega_\mu^{\mathscr{V}_1}, \ldots \ldots, \Omega_\mu^{\mathscr{V}_{n_\mu}})$.

Sin pérdida de generalidad, es conveniente expresar el desplazamiento generalizado en la microescala $u_\mu \in \mathscr{V}_\mu$ por la suma

$$u_\mu = \bar{u}_\mu + \tilde{u}_\mu, \tag{13.41}$$

donde el primer sumando, $\bar{u}_\mu$, depende de la cinemática macro en el punto $\mathbf{x}$ (asociado al EVR), y el segundo sumando, $\tilde{u}_\mu$, es llamado *fluctuación del desplazamiento generalizado*. En general, el campo $\bar{u}_\mu$ no es un campo uniforme en la microescala es decir, puede depender de $\mathbf{y}$. El conjunto de todos los desplazamientos generalizados $\bar{u}_\mu$ en la microescala forma el subespacio designado por $\bar{\mathscr{V}}_\mu$, y la colección de todos lo campos $\tilde{u}_\mu$ da lugar al subespacio $\tilde{\mathscr{V}}_\mu$ de fluctuaciones de desplazamientos generalizados.

También definimos el espacio $\mathscr{W}_\mu$ de acciones de deformación generalizada en la microescala. Cada $D_\mu \in \mathscr{W}_\mu$ es una m_μ-upla de campos tensoriales con componentes designadas por D_μ^i. Cada componente es descripta por s_μ^i campos escalares (el número total de campos que describen D_μ es $S_\mu = \sum_{i=1}^{m_\mu} s_\mu^i$) y las componentes tienen el dominio de definición $\Omega_\mu^{\mathscr{W}_i} := \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_{\mu\,i})$, $i = 1, \ldots, m_\mu$, es decir

$$\begin{aligned} D_\mu^i : \Omega_\mu^{\mathscr{W}_i} &\to \mathscr{W}_{\mu\,i}, \\ \mathbf{y} &\mapsto D_\mu^i(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{13.42}$$

donde $\Omega_\mu^{\mathscr{W}_i} \subseteq \Omega_\mu$ puede ser un conjunto de puntos, superficies o volúmenes. En forma compacta

$$\begin{aligned} D_\mu : \Omega_\mu^{\mathscr{W}} &\to \mathscr{W}_\mu, \\ \mathbf{y} &\mapsto D_\mu(\mathbf{y}), \end{aligned} \tag{13.43}$$

donde $\Omega_\mu^{\mathscr{W}} := \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_\mu) = (\mathrm{Dom}(\mathscr{W}_{\mu\,1}), \ldots, \mathrm{Dom}(\mathscr{W}_{\mu\,m_\mu}))$, o de forma equivalente $\Omega_\mu^{\mathscr{W}} = (\Omega_\mu^{\mathscr{W}_1}, \ldots, \Omega_\mu^{\mathscr{W}_{m_\mu}})$.

A su vez, definimos el operador (lineal) de acciones de deformación generalizada en la microescala

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_\mu : \mathscr{V}_\mu &\to \mathscr{W}_\mu, \\ u_\mu &\mapsto D_\mu = \mathscr{D}_\mu(u_\mu), \end{aligned} \tag{13.44}$$

donde su dominio de definición está dado por $\Omega_\mu^{\mathscr{W}} = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}_\mu(u_\mu))$.

Observación 13.3 *De manera análoga con* (13.38) *tenemos la siguiente representación para el operador* $\mathscr{D}_\mu$

$$\mathscr{D}_\mu = \begin{pmatrix} \mathscr{D}_\mu^{11} & \mathscr{D}_\mu^{12} & \dots & \mathscr{D}_\mu^{1n_\mu} \\ \mathscr{D}_\mu^{21} & \mathscr{D}_\mu^{22} & \dots & \mathscr{D}_\mu^{2n_\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{D}_\mu^{m_\mu 1} & \mathscr{D}_\mu^{m_\mu 2} & \dots & \mathscr{D}_\mu^{m_\mu n_\mu} \end{pmatrix}, \tag{13.45}$$

donde $\Omega_\mu^{\mathscr{W}_i} = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}_\mu^{i1}(u_\mu^1)) = \ldots = \mathrm{Dom}(\mathscr{D}_\mu^{in_\mu}(u_\mu^{n_\mu}))$, $i = 1, \ldots, m_\mu$.

13.4.3 Operadores de Inserción

Como mencionado en el comienzo de esta sección, la cinemática en la microescala (EVR) asociada con un punto arbitrario $\mathbf{x} \in \Omega_M$, está *vinculada* con la cinemática en la macroescala por medio de (i) los *operadoes de inserción*, que definen la transferencia cinemática macro-micro, y de (ii) los *operadores de homogeneización*, que definen la transferencia cinemática micro-macro. Estos dos operadores son *lineales* en sus argumentos y deben ser adecuadamente construidos de manera a dar cuenta de una transferencia mecánica/física consistente entre las escalas de los desplazamientos y deformaciones generalizadas. Evidentemente, la definición de estos operadores dependerá del sistema físico que se está modelando.

Observación 13.4 *Por simplicidad, vamos a asumir que todas las variables cinemáticas de la macroescala participan de la transferencia entre las escalas. En un escenario más general, podemos tener sólo un subconjunto de las variables cinemáticas en la macroescala participando de esta transferencia.*

Luego, definamos el conjunto $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ de elementos de $\mathscr{V}_M$ evaluados en el punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$,

$$\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M} = \{w = (w^1, \ldots, w^{n_M}),\, w^i \in \mathbb{R}^{r^i_M}, i = 1, \ldots, n_M, w = u|_{\mathbf{x}},\, u \in \mathscr{V}_M\}, \tag{13.46}$$

donde $\mathbb{R}^{r^i_M} = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{r^i_M}$, siendo r^i_M el número de escalares que describen el i-ésimo campo tensorial de la n_M-upla. Observe que $\dim(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}) = R_M$. Nos referiremos a $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ como el *conjunto de valores-puntuales de desplazamientos generalizados en la macroescala*.

De manera similar, definimos el *conjunto de valores-puntuales de acciones de deformación generalizada en la macroescala*, $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$, integrado por todos los elementos de $\mathscr{W}_M$ evaluados en el punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$, es decir

$$\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} = \{V = (V^1, \ldots, V^{m_M}),\, V^i \in \mathbb{R}^{s^i_M}, i = 1, \ldots, m_M, V = D|_{\mathbf{x}},\, D \in \mathscr{W}_M\}, \tag{13.47}$$

donde $\mathbb{R}^{s_M^i} = \overbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{s_M^i}$, y s_M^i es el número de escalares necesarios para describir el i-ésimo campo tensorial de la m_M-upla. Observe que $\dim(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}) = S_M$.

Dentro de estos dos conjuntos de valores-puntuales de desplazamientos generalizados y deformaciones generalizadas en la macroescala vamos a distinguir el conjunto de valores-puntuales *de acciones virtuales de desplazamientos generalizados en la macroescala*, $\hat{w}$, y de *deformaciones generalizadas en la macroescala*, $\hat{V}$, denotando estos dos conjuntos por $\widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}$ y $\widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}$, respectivamente. Aquí, es importante observar que dependiendo del modelo cinemático multiescala que se está elaborando, componentes de estos valores-puntuales de acciones virtuales de desplazamientos generalizados y deformaciones generalizadas en la macroescala pueden ser elementos nulos, aún cuando la cinemática real en ese punto no sea necesariamente nula.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *Para este caso el conjunto* $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ *está definido de la siguiente forma* $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3, \mathbf{w} = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}, \mathbf{u}_M \in \mathbf{H}^1(\Omega_M)\}$. *De la misma manera tenemos* $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} = \{\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\varepsilon}_M \in \mathbf{L}^2_{\text{sym}}(\Omega_M)\}$. ■

En este punto estamos en condiciones de introducir el concepto de *operador de inserción*. En nuestra teoría, los operadores de inserción son fundamentales para definir la manera en que la cinemática de la macroescala contribuye con la cinemática en la microescala. En otras palabras, ellos definen como la cinemática de la macroescala es *insertada* en la microescala. Son así definidos dos operadores de inserción

- El u_M*-operador de inserción*,

$$\begin{aligned} \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_{\mu} &: \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M} \to \mathscr{V}_{\mu}, \\ & u_M|_{\mathbf{x}} \mapsto \bar{u}_{\mu} = \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_{\mu}(u_M|_{\mathbf{x}}), \end{aligned} \tag{13.48}$$

  que aplica el valor-puntual $u_M|_{\mathbf{x}}$ del desplazamiento generalizado en la macroescala en el campo $\bar{u}_{\mu}$ que contribuye en el campo de desplazamiento generalizado de la microescala de acuerdo con la expresión (13.41).
- El D_M*-operador de inserción*,

$$\begin{aligned} \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_{\mu} &: \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \to \mathscr{V}_{\mu}, \\ & D_M|_{\mathbf{x}} \mapsto \bar{u}_{\mu} = \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_{\mu}(D_M|_{\mathbf{x}}), \end{aligned} \tag{13.49}$$

  que mapea el valor-puntual $D_M|_{\mathbf{x}}$ de las acciones de deformación generalizada en la macroescala en un campo que contribuye en el desplazamiento generalizado en la microescala de acuerdo con la expresión (13.41).

Ambos operadores son lineales en sus respectivos argumentos.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *El* u_M*-operador de inserción es definido en este caso como*

$$\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}, \tag{13.50}$$

es decir el mapea $\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}$ *en un campo uniforme en* Ω_μ *de valor igual al valor-puntual del desplazamiento de la macroescala en el punto* $\mathbf{x}$ *vinculado a la microescala (EVR). Por otro lado, el* D_M*-operador de inserción es postulado como*

$$\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}) = \boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o), \tag{13.51}$$

donde $\mathbf{y}_o = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\mathbf{y}\,d\Omega_\mu$ *es decir, mapea el valor-puntual de la acción de deformación de la macroescala (en este caso deformación infinitesimal) en el desplazamiento linealmente distribuido en la microescala.* ■

Observación 13.5 *La caracterización de estos dos operadores de inserción no es arbitraria. Por el contrario, ellos deben garantizar que los valores-puntuales de acciones de desplazamiento generalizado y deformación generalizada en la macroescala sean preservados cuando insertadas en la microescala. Esto será atendido con la exigencia de restricciones adicionales sobre estos operadores que veremos más adelante (ver por ejemplo* (13.70) *y* (13.71)*).*

De (13.48)-(13.49), las variables cinemáticas $u_M|_{\mathbf{x}}$ y $D_M|_{\mathbf{x}}$ pueden combinarse de manera a proporcionar un campo de desplazamiento generalizado no uniforme (dependiendo de $\mathbf{y}$) en la escala micro. En particular, resaltamos que el dominio $\Omega_\mu^{\mathscr{V}_i}$, $i = 1,\ldots,n_\mu$ corresponde al *dominio de inserción* en donde la componente i de la imagen de los operadores de inserción $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$ y $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$ está definida.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *Para este caso, los valores puntuales de las variables cinemáticas en la macroescala,* $\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}$ *y* $\boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}$*, contribuyen con el desplazamiento en la microescala a través de* $\bar{\mathbf{u}}_\mu$ *de la siguiente forma*

$$\bar{\mathbf{u}}_\mu = \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}) + \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o). \tag{13.52}$$

Evidentemente, el dominio de inserción en la microescala corresponde en este caso a todo el dominio Ω_μ*.* ■

Observación 13.6 *La teoría aquí desarrollada permite operadores de inserción mucho más generales que los que podemos encontrar en la mayoría de las formulaciones actualmente existentes. La mayoría de estas formulaciones sólo considera mapeamientos afines de la deformación de la macroescala en campos de desplazamientos en la microescala (exactamente lo que se emplea en la teoría multiescala clásica). Este tipo de operadores usados en la literatura son inadecuados para problemas que requieren operaciones de inserción más complejas, como aquellas que son necesarias para tratar problemas de localización progresiva de deformaciones, nucleación y evolución de fracturas, bandas de cizallamiento, daño y todo tipo de mecanismos de falla en el nivel de la microescala (EVR). De esta manera nuestra formulación viene al encuentro de esta falta de operadores más complexos. Aún más, y como mostraremos en breve en la Sección 13.7, los operadores de inserción*

juegan un papel fundamental en la caracterización de la homogeneización de las tensiones y las fuerzas generalizadas en la macroescala, algo que también no es llevado en cuenta en las publicaciones existentes.

Observación 13.7 *Como* $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$ *y* $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$ *son, por definición, operadores lineales, tenemos las siguientes representaciones*

$$\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}} = \begin{pmatrix} \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}11} & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}12} & \cdots & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}1n_M} \\ \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}21} & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}22} & \cdots & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}2n_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}n_\mu 1} & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}n_\mu 2} & \cdots & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}n_\mu n_M} \end{pmatrix}, \tag{13.53}$$

y

$$\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}} = \begin{pmatrix} \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}11} & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}12} & \cdots & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}1m_M} \\ \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}21} & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}22} & \cdots & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}2m_M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}n_\mu 1} & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}n_\mu 2} & \cdots & \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}n_\mu m_M} \end{pmatrix}. \tag{13.54}$$

Ahora introducimos la siguiente definición. Decimos que $u_\mu \in \mathscr{V}_\mu$ está *vinculado a la cinemática de la macroescala en el punto* $\mathbf{x} \in \Omega_M$ si existe $u_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ y $D_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$ tal que

$$u_\mu = \bar{u}_\mu + \tilde{u}_\mu = \underbrace{\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M|_{\mathbf{x}}) + \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}})}_{=\bar{u}_\mu} + \tilde{u}_\mu. \tag{13.55}$$

Luego, para todo desplazamiento generalizado en la microescala, $u_\mu \in \mathscr{V}_\mu$, vinculado con la cinemática de la macroescala en el punto $\mathbf{x}$, su correspondiente acción de deformación generalizada en la microescala cinemáticamente admisible está dada por

$$\begin{aligned} D_\mu = \mathscr{D}_\mu(u_\mu) = \mathscr{D}_\mu(\bar{u}_\mu) + \mathscr{D}_\mu(\tilde{u}_\mu) = \\ \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M|_{\mathbf{x}})) + \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}})) + \mathscr{D}_\mu(\tilde{u}_\mu). \end{aligned} \tag{13.56}$$

Por razones físicas, imponemos la siguiente restricción en el operador $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$ para evitar que la inserción de u_M cause acciones de deformación generalizada en la microescala

$$\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M|_{\mathbf{x}})) = 0 \quad \forall u_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}. \tag{13.57}$$

Desde el punto de vista mecánico, esta restricción establece que el desplazamiento generalizado insertado desde la macroescala debe pertenecer al núcleo de $\mathscr{D}_\mu$, $\mathscr{N}(\mathscr{D}_\mu)$, es decir la imagen del operador $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$ pertenece al espacio de los desplazamientos generalizados rígidos en la microescala.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *Un ejemplo de la restricción anterior es evidente en el problema multiescala clásico en mecánica de los sólidos. En efecto, escribiendo para ese caso que* $\mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o) + \tilde{\mathbf{u}}_\mu$*, aseguramos que el desplazamiento en la microescala,* $\mathbf{u}_\mu$*, está vinculado al desplazamiento en la macroescala en el punto* $\mathbf{x}$*. Luego, dado que* $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}$ *es un campo uniforme en la microescala su correspondiente acción de deformación está dada por* $\boldsymbol{\varepsilon}_\mu = (\nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o) + \tilde{\mathbf{u}}_\mu))^s = \boldsymbol{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s$*, satifaciendo así la restricción* (13.57). ■

Observación 13.8 *De* (13.56)*, la acción de deformación generalizada en la microescala puede ser escrita de la siguiente forma*

$$D_\mu = \bar{D}_\mu + \tilde{D}_\mu, \tag{13.58}$$

donde $\bar{D}_\mu$ *es la contribución de la cinemática de la macroescala en la acción de deformación generalizada en la microescala y* $\tilde{D}_\mu$*, la* fluctuación *de la acción de deformación generalizada en la microescala, depende de entidades solamente definidas en la microescala, es decir*

$$\bar{D}_\mu = \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}})), \tag{13.59}$$

$$\tilde{D}_\mu = \mathscr{D}_\mu(\tilde{u}_\mu). \tag{13.60}$$

Observación 13.9 *De lo anterior se sigue que la contribución de la acción de deformación generalizada en la macroescala en su homóloga en la microescla puede ser obtenida directamente aplicando el operador de inserción combinado, definido como* $\mathscr{I}_\mu = \mathscr{D}_\mu \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$*, es decir*

$$\begin{aligned} &\mathscr{I}_\mu : \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \to \mathscr{W}_\mu, \\ &\qquad D_M|_{\mathbf{x}} \mapsto D_\mu = \mathscr{I}_\mu(D_M|_{\mathbf{x}}). \end{aligned} \tag{13.61}$$

13.4.4 Operadores de Homogeneización

Los *operadores de homogeneización* también tienen un papel fundamental en la teoría multiescala que estamos presentando. Evidentemente, en primer lugar, los mismos dependen del modelo físico que se está desarrollando. Independiente de eso, aquí estamos interesados en caracterizar sus propiedades/aspectos fundamentales. Así, estos operadores definen como la cinemática en la microescala debe ser homogeneizada (promediada) para proporcionar los correspondientes valores (en el punto asociado al EVR) de la cinemática en la macroescala. Es decir, son operadores que llevan información de la cinemática de la microescala para la cinemática en la macroescala. Existen dos operadores de homogeneización

- El u_μ*-operador de homogeneización*, que mapea el campo de desplazamiento generalizado de la microescala en el valor a nivel del punto $\mathbf{x}$ del desplazamiento

generalizado en la macroescala

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}} &: \mathscr{V}_\mu \to \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}, \\ &u_\mu \mapsto \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(u_\mu) \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}. \end{aligned} \tag{13.62}$$

- El D_μ*-operador de homogeneización*, que mapea el campo de acciones de deformación generalizada de la microescala en el valor a nivel del punto $\mathbf{x}$ de la acción de deformación generalizada en la macroescala

$$\begin{aligned} \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}} &: \mathscr{W}_\mu \to \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \\ &D_\mu \mapsto \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(D_\mu) \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}. \end{aligned} \tag{13.63}$$

Ambos operadores son *lineales* e involucram promedios sobre los dominios de definición de las correspondientes inserciones, $\Omega_\mu^{\mathscr{V}_i}, i = 1,\dots,n_\mu$, y $\Omega_\mu^{\mathscr{W}_i}, i = 1,\dots,m_\mu$.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este caso, el u_μ-operador de homogeneización es definido por*

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_\mu) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu, \tag{13.64}$$

mientras que el D_μ-operador de homogeneización es definido por

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\varepsilon_\mu) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \varepsilon_\mu \, d\Omega_\mu. \tag{13.65}$$

Es decir, $\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}$ y $\varepsilon_M|_{\mathbf{x}}$ son simplemente medias volumétricas *de los respectivos campos cinemáticos definidos en el EVR.* ■

Observación 13.10 *De la linealidad de los operadores, tenemos la siguiente representación matricial*

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}} = \begin{pmatrix} \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,11} & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,12} & \dots & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,1n_\mu} \\ \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,21} & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,22} & \dots & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,2n_\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,n_M1} & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,n_M2} & \dots & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}\,n_Mn_\mu} \end{pmatrix}, \tag{13.66}$$

y

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}} = \begin{pmatrix} \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,11} & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,12} & \dots & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,1m_\mu} \\ \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,21} & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,22} & \dots & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,2m_\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,m_M1} & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,m_M2} & \dots & \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}\,m_Mm_\mu} \end{pmatrix}. \tag{13.67}$$

Ahora, volvamos a la cuestión planteada en la Observación 13.5 sobre las restricciones que los operadores de inserción $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$ y $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$, definidos por (13.48) y (13.49), deben satisfacer. Sobre bases físicas, exigíamos que estos operadores se deberían definir de forma que la magnitud de las variables cinemáticas que participan en la transferencia a través de las escalas sean, en cierto sentido, conservadas. Esto debe ser entendido como el principio de *conservación de los desplazamientos generalizados en la macroescala* y *conservación de las acciones de deformación generalizada en la macroescala* o, simplemente, *Principio de Conservación Cinemática*. En otras palabras, queremos asegurar que la homogeneización de la inserción de cada componente $u_M^i|_{\mathbf{x}}$ de $u_M|_{\mathbf{x}}$ resulte efectivamente en $u_M^i|_{\mathbf{x}}$. El mismo criterio es aplicado para las componentes $D_M^i|_{\mathbf{x}}$. Para formalizar esta exigencia, definimos $u_M^{\{i\}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ y $D_M^{\{i\}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$ tales que

$$(u_M^{\{i\}})^j = \begin{cases} u_M^i|_{\mathbf{x}} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i, \end{cases} \tag{13.68}$$

$$(D_M^{\{i\}})^j = \begin{cases} D_M^i|_{\mathbf{x}} & \text{si } j = i, \\ 0 & \text{si } j \neq i. \end{cases} \tag{13.69}$$

Luego, el principio de conservación cinemática es satisfecho si $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$ y $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$ verifican las siguientes restricciones

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M^{\{i\}})) = u_M^{\{i\}} \qquad i = 1, \ldots, n_M, \tag{13.70}$$

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M^{\{i\}}))) = D_M^{\{i\}} \qquad i = 1, \ldots, m_M. \tag{13.71}$$

Observación 13.11 *Evidentemente, en el caso en el que no todas las variables cinemáticas sean insertadas en la microescala (ver Observación 13.4), las restricciones* (13.70) *y* (13.71) *deben ser entendidas sobre las variables que efectivamente son transferidas a la microescala.*

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este caso tenemos*

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}})) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{13.72}$$

De la misma manera,

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\varepsilon_M|_{\mathbf{x}}))) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} (\nabla_{\mathbf{y}}(\varepsilon_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o)))^s\, d\Omega_\mu = \varepsilon_M|_{\mathbf{x}}. \tag{13.73}$$

Vemos así que las restricciones (13.70) *y* (13.71) *son satisfechas en el contexto de la teoría clásica.* ■

Observación 13.12 *Finalmente, es fácil verificar que de* (13.70) *la composición* $\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}\,\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$ *define el operador identidad en* $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$. *De manera similar, de* (13.71)*, la composición* $\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}\,\mathscr{D}_\mu\,\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$ *define el operador identidad en* $\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$.

13.4.5 Admisibilidad Cinemática

Vamos ahora a introducir el concepto fundamental de la *admisibilidad cinemática* de la transferencia cinemática entre las escalas. Diremos que el desplazamiento generalizado en la microescala $u_\mu \in \mathscr{V}_\mu$, vinculado con la cinemática de la macroescala, y su acción de deformación generalizada $\mathscr{D}_\mu(u_\mu) \in \mathscr{W}_\mu$ son *cinemáticamente admisibles* con respecto a $u_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ y $D_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$, si las siguientes relaciones se verifican

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(u_\mu) = \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M|_{\mathbf{x}})), \tag{13.74}$$

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(u_\mu)) = \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}}))). \tag{13.75}$$

La definición de admisibilidad cinemática implica en restricciones adicionales. En efecto, dado que $u_\mu \in \mathscr{V}_\mu$ está vinculado con la cinemática de la macroescala, (13.55) se verifica, por lo tanto, el lado izquierdo de (13.74) resulta

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(u_\mu) = \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M|_{\mathbf{x}})) + \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}})) + \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\tilde{u}_\mu). \tag{13.76}$$

Imponiendo ahora la restricción adicional en el operador $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$ dada por

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}})) = 0, \tag{13.77}$$

tenemos como consecuencia de (13.74), (13.76) y (13.77), que $\tilde{u}_\mu$ debe satisfacer la siguiente restricción cinemática

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\tilde{u}_\mu) = 0. \tag{13.78}$$

Como $\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}$ representa una operación de media (promedio) involucrando la medida del dominio relacionado con cada componente de los operadores de inserción, las ecuaciones (13.70) y (13.74) establecen la relación entre $u_M|_{\mathbf{x}}$ y la homogeneización del desplazamiento generalizado en la microescala u_μ. A su vez, la ecuación (13.78) introduce n_M restricciones tensoriales (es decir, R_M restricciones escalares) que deben ser satisfechas por el campo de fluctuación del desplazamiento generalizado en la microescala, $\tilde{u}_\mu$, para vincular la cinemática de la microescala a la cinemática de la macroescala satisfaciendo la *admisibilidad cinemática*.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este ejemplo clásico de multiescala, y recordando la definición del* u_μ*-operador homogeneización, la admisibilidad cinemática de* $\mathbf{u}_\mu$ *implica en*

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_\mu) = \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}})) = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{13.79}$$

Por su parte, por construcción, el operador $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}$ es tal que

$$\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \varepsilon_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o)\,d\Omega_\mu = \varepsilon_M|_{\mathbf{x}}\left(\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o)\,d\Omega_\mu\right) = \mathbf{0}, \tag{13.80}$$

y tenemos así

$$\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o) + \tilde{\mathbf{u}}_\mu)\,d\Omega_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\tilde{\mathbf{u}}_\mu\,d\Omega_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}, \tag{13.81}$$

lo cual es satisfecho sólo si

$$\int_{\Omega_\mu}\tilde{\mathbf{u}}_\mu\,d\Omega_\mu = \mathbf{0}. \tag{13.82}$$

■

Podemos proceder de manera similar con la ecuación (13.75). Llevando en cuenta la ecuación (13.57), tenemos

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(u_\mu)) = \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\underbrace{\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M|_{\mathbf{x}}))}_{=0}) + \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}}))) + \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\tilde{u}_\mu)) = \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}}))). \tag{13.83}$$

Que implica que se debe verificar lo siguiente

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\tilde{u}_\mu)) = 0. \tag{13.84}$$

Luego, la ecuaciones (13.71) y (13.75) determinan la relación entre $D_M|_{\mathbf{x}}$ y la homogeneización de la acción de deformación generalizada en la microescala D_μ.

Resumiendo, llegamos a que todo campo de desplazamiento generalizado cinemáticamente admisible en la microescala u_μ es tal tal que su campo de fluctuación asociado, $\tilde{u}_\mu$, satisface las restricciones cinemáticas (13.78) y (13.84). Tenemos así todos los elementos para, en forma racional como fue deducido, definir el *espacio de fluctuaciones de desplazamientos generalizados cinemáticamente admisibles en la microescala*

$$\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu} = \{\tilde{u}_\mu \in \mathscr{V}_\mu,\, \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\tilde{u}_\mu) = 0,\, \mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\tilde{u}_\mu)) = 0\}. \tag{13.85}$$

Los elementos $\tilde{u}_\mu \in \mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$ satisfacen las *mínimas* restricciones cinemáticas que hacen admisible la transferencia de cinemáticas entre las escalas. Evidentemente, es posible adicionar más restricciones cinemáticas. En ese caso, el espacio resultante

es tal que $\text{Kin}^*_{\tilde{u}_\mu} \subset \text{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$, conduciendo así a modelos multiescala diferentes, en particular, *más rígidos* que el proporcionado por el espacio $\text{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$ debido al hecho de tener más restriccioes que las mínimas necesarias.

Por otro lado, dado que las restricciones sobre $\tilde{u}_\mu$ son lineales y homogéneas, se sigue que el espacio de *fluctuaciones de desplazamiento generalizado virtuales cinemáticamente admisibles en la microescala* coincide con el propio espacio $\text{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$, es decir

$$\text{Var}_{\tilde{u}_\mu} = \text{Kin}_{\tilde{u}_\mu}. \tag{13.86}$$

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este ejemplo clásico de multiescala, y con la definición del operador D_μ-operador de homogeneización, la admisibilidad cinemática de D implica*

$$\mathscr{H}^{\mathscr{W}}_\mu((\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_\mu)^s) = \mathscr{H}^{\mathscr{W}}_\mu((\nabla_{\mathbf{y}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \varepsilon_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o) + \tilde{\mathbf{u}}_\mu))^s) = \\ \mathscr{H}^{\mathscr{W}}_\mu(\varepsilon_M|_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s) = \varepsilon_M|_{\mathbf{x}}. \tag{13.87}$$

Luego,

$$\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}(\varepsilon_M|_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s)\,d\Omega_\mu = \varepsilon_M|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}(\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s\,d\Omega_\mu = \varepsilon_M|_{\mathbf{x}}, \tag{13.88}$$

que se satisface si

$$\int_{\Omega_\mu}(\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s\,d\Omega_\mu = \mathbf{O}. \tag{13.89}$$

Equivalentemente, después de la integración por partes se tiene

$$\int_{\partial\Omega_\mu}(\tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu)^s\,d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O}, \tag{13.90}$$

donde $\mathbf{n}_\mu$ es el vector unitario normal al contorno $\partial\Omega_\mu$ de Ω_μ. Por lo tanto, el espacio de fluctuaciones de desplazamientos cinemáticamente admisibles en la microescala y su espacio asociado de variaciones virtuales admisibles son

$$\text{Kin}_{\tilde{u}_\mu} = \text{Var}_{\tilde{u}_\mu} = \\ \left\{\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu),\ \int_{\Omega_\mu}\tilde{\mathbf{u}}_\mu\,d\Omega_\mu = \mathbf{0},\ \int_{\partial\Omega_\mu}(\tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu)^s\,d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O}\right\}. \tag{13.91}$$

■

Observación 13.13 *Las restricciones impuestas por la admisibilidad cinemática entre las escalas se reducen a n_M restricciones tensoriales dadas por* (13.78) *más las m_M restricciones tensoriales dadas por* (13.84)*. Ahora bien, como en nuestra teoría las cinemáticas en la macroescala y en la microescala pueden ser diferentes, los campos cinemáticos en la microescala pueden no quedar adecuadamente controlados. Es decir, algunos descriptores cinemáticos en la microescala pueden ser*

no visibles desde la macroescala. En estos casos será necesario agregar más restricciones sobre $\tilde{u}_\mu$ de manera a asegurar que el problema en la microescala sea un problema matemáticamente bien puesto (admita solución). Estas restricciones son de tipo homogéneas y dependen de hipótesis basadas en aspectos físicos asociados al modelo cinemático en la microescala.

Observación 13.14 *Como ya observamos, y como en breve será visto en detalle, el espacio* $\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$ *juega un papel fundamental en la definición del equilibrio en la microescala. Así, si restricciones son adicionadas a las ya existentes en* $\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$*, la solución del problema multiescala será evidentemente diferente. Una forma fácil de imponer más restricciones es la de forzar que $\tilde{u} \equiv 0$ en todo el dominio de la microescala. Esto corresponde a lo que se conoce en la literatura de la multiescala clásica en mecánica de los sólidos como* Modelo de Taylor *(o modelo de mezclas). Aquí, y dentro de un contexto más general de la multiescala, vamos a referirnos a este espacio como* espacio de fluctuaciones de Taylor. *Este espacio está formado por un único elemento que es el elemento nulo de* $\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$

$$\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}^{Taylor} = \{\tilde{u}_\mu \in \mathscr{V}_\mu, \tilde{u}_\mu = 0 \text{ en } \Omega_\mu^{\mathscr{V}}\} = \{0\}. \tag{13.92}$$

Obviamente, este espacio corresponde al espacio con las restricciones máximas *que pueden ser establecidas sobre las fluctuaciones. A su vez y como ya mencionamos, podemos adoptar menos restricciones que las máximas impuestas en* $\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}^{Taylor}$*. Por ejemplo, podemos adoptar la restricción de que las fluctuaciones son nulas en el contorno, dando lugar al espacio* $\mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{nbc}$*, que se obtiene prescribiendo $\tilde{\mathbf{u}}_\mu = 0, \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu$. Otro espacio, que llamamos* $\mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{pbc}$*, puede ser construido fácilmente para dominios de EVR con geometría periódica (típica de medios periódicos). Las celdas EVR periódicas tienen campos vectoriales normales $\mathbf{n}_\mu$ que son antiperiódicos en el contorno $\partial\Omega_\mu$ del EVR. En este caso, para todo $\mathbf{y} \in \partial\Omega_\mu$ existe una correspondencia biunívoca con el punto $\mathbf{y}^* \in \partial\Omega_\mu$ sobre el contorno opuesto al $\partial\Omega_\mu$ tal que $\mathbf{n}_\mu(\mathbf{y}) = -\mathbf{n}_\mu(\mathbf{y}^*)$. Luego, la admisibilidad cinemática es asegurada si el campo de fluctuación de desplazamiento $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$ es periódico en $\partial\Omega_\mu$, es decir $\tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}) = \tilde{\mathbf{u}}_\mu(\mathbf{y}^*)$. Para todos estos casos es fácil verificar que* $\mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{Taylor} \subset \mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{nbc} \subset \mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{pbc} \subset \mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}$*. Desde el punto de vista mecánico, esto significa que el modelo multiescala basado en el EVR producirá el comportamiento más rígido para el espacio (de máxima restricción)* $\mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}^{Taylor}$ *y el modelo más flexible para el espacio (con mínima restricción)* $\mathrm{Kin}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}$.

Estamos ya en condiciones de caracterizar el subespacio Kin_{u_μ} de desplazamientos generalizados cinemáticamente admisibles en la microescala. Este subespacio está formado por todos los desplazamientos generalizados, $u_\mu \in \mathscr{V}_\mu$, vinculados con la cinemática de la macroescala en el punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$ y cinemáticamente admisibles con respecto a $u_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ y $D_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$, es decir

$$\mathrm{Kin}_{u_\mu} = \{u_\mu \in \mathscr{V}_\mu, u_\mu = \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(u_M|_{\mathbf{x}}) + \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(D_M|_{\mathbf{x}}) + \tilde{u}_\mu, \\ u_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}, D_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \tilde{u}_\mu \in \mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}\}. \quad (13.93)$$

El correspondiente espacio de acciones virtuales de desplazamiento generalizado cinemáticamente admisibles en la microescala, Var_{u_μ}, está dado por

$$\mathrm{Var}_{u_\mu} = \{\hat{u}_\mu \in \mathscr{V}_\mu; \hat{u}_\mu = u^1_\mu - u^2_\mu, u^1_\mu, u^2_\mu \in \mathrm{Kin}_{u_\mu}\}. \quad (13.94)$$

o, teniendo en cuenta (13.86),

$$\mathrm{Var}_{u_\mu} = \mathrm{Kin}_{u_\mu}. \quad (13.95)$$

13.5 Dualidad en la Multiescala

En esta sección vamos a proceder a aplicar los conceptos de dualidad que vimos en la Sección 13.2.2 para cada ambas escalas. Dentro del contexto de la teoría multiescala que estamos presentando, especial atención se debe dar al establecimiento de la potencia virtual en un punto genérico, $\mathbf{x}$, de la macroescala. En lo que se refiere a la microescala, especial atención debemos dar a lo relacionado con la identificación de los esfuerzos internos y externos generalizados admisibles con la cinemática correspondiente.

13.5.1 Potencia Virtual en la Macroescala

Siguiendo lo presentado en la Sección 13.2, la potencia virtual en la macroescala está dada por

$$P^i_M(\mathscr{D}_M(\hat{u}_M)) = \langle \Sigma_M, \mathscr{D}_M(\hat{u}_M)\rangle_{\mathscr{W}'_M \times \mathscr{W}_M} \quad \hat{u}_M \in \mathrm{Var}_{u_M}, \quad (13.96)$$

o equivalentemente por

$$P^i_M(\mathscr{D}_M(\hat{u}_M)) = \sum_{k=1}^{m_M} \langle \Sigma^k_M, (\mathscr{D}_M(\hat{u}_M))^k\rangle_{\mathscr{W}'_{Mk} \times \mathscr{W}_{Mk}} \quad \hat{u}_M \in \mathrm{Var}_{u_M}. \quad (13.97)$$

En este contexto, estamos interesados en evaluar la potencia virtual asociada a un punto genérico $\mathbf{x}$ de la macroescala que, posteriormente, será vinculda a la potencia virtual en la microescala a través de lo que llamaremos *Principio de la Potencia Virtual Multiescala*, y que será establecido en breve.

En este sentido, notemos que en el punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$, la cantidad cinemática que permite evaluar la potencia interna en ese punto está dada por $\mathscr{D}_M(\hat{u}_M)|_{\mathbf{x}}$. Así, con la notación $\hat{D}_M|_{\mathbf{x}} = \mathscr{D}_M(\hat{u}_M)|_{\mathbf{x}}$, la potencia virtual interna en la macroescala, $P^i_{M,\mathbf{x}}(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})$, en el punto $\mathbf{x}$ puede expresarse de la siguiente manera

$$P^i_{M,\mathbf{x}}(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{m_M} \omega_k (\Sigma_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})^k =: \Sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \quad \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \tag{13.98}$$

donde ω_k, $k = 1,\ldots,m_M$, son escalares dimensionales (ver Observación 13.18) que garantizan la compatibilidad dimensional de los productos $(\Sigma_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})^k$, $k = 1,\ldots,m_M$, que forman parte de cada contribución en la expresión de la potencia interna arriba descripta. Es importate observar que (13.98) tiene la unidad de *potencia*, donde cada producto $(\Sigma_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})^k$ es una *densidad de potencia*, es decir potencia por unidad de medida del correspondiente subconjunto del EVR cuya medida es ω_k. Observe que cada uno de estos subconjuntos puede tener diferente dimensionalidad (por ejemplo, volumen, superficie, punto). Resaltamos que este nivel de generalidad es crucial para modelar sistemas físicos que tienen por característica la simultaneidad de fenómenos de distinta naturaleza definidos en subdominios diferentes del EVR como, por ejemplo, localización de deformaciones, fracturas cohesivas o fenómenos discretos, entre muchos otros.

A su vez, la operación $(\cdot) \bullet (\cdot)$ representa el producto de dualidad entre las variables

$$\begin{aligned} &(\cdot) \bullet (\cdot) : (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})' \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \to \mathbb{R}, \\ &\qquad (\Sigma_M|_{\mathbf{x}}, D_M|_{\mathbf{x}}) \mapsto \Sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet D_M|_{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{m_M} \omega_k \, (\Sigma_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (D_M|_{\mathbf{x}})^k. \end{aligned} \tag{13.99}$$

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este caso, la potencia virtual interna en la macroescala está dada por el producto entre la acción virtual de deformación (tasa de deformación) y el campo de tensiones de Cauchy,*

$$P^i_M = \int_{\Omega_M} \sigma_M \cdot \nabla^S_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_M \, d\Omega_M. \tag{13.100}$$

La potencia virtual interna evaluada en el punto $\mathbf{x}$ *(vinculado al EVR) es*

$$P^i_{M,\mathbf{x}} = \sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} = \omega_1 \sigma_M|_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{13.101}$$

■

De manera similar, definimos la potencia virtual externa en la macroescala

$$P^e_M(\hat{u}_M) = \langle f_M, \hat{u}_M \rangle_{\mathscr{V}'_M \times \mathscr{V}_M} \quad \hat{u}_M \in \mathrm{Var}_{u_M}, \tag{13.102}$$

donde f_M tiene la estructura de $\mathscr{D}^*_M(\Sigma_M)$. La potencia virtual externa en el punto $\mathbf{x}$ toma la forma

$$P^e_{M,\mathbf{x}}(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}) = \sum_{k=1}^{n_M} \gamma_k \, (f_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (\hat{u}_M|_{\mathbf{x}})^k =: f_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \quad \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}. \tag{13.103}$$

Los parámetros dimensionales γ_k, $k = 1, \ldots, n_M$, son enteramente análogos a los parámetros ω_k de (13.98). Observe que en (13.103) hemos usado la misma notación para el producto de dualidad, $(\cdot) \bullet (\cdot)$, como en (13.98) pero el verdadero sentido de este producto está dado por el contexto en el que está colocado. En este caso, el producto de dualidad $(\cdot) \bullet (\cdot)$ está definido como

$$\begin{aligned} (\cdot) \bullet (\cdot) : (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})' \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M} \to \mathbb{R}, \\ (f_M|_{\mathbf{x}}, u_M|_{\mathbf{x}}) \mapsto f_M|_{\mathbf{x}} \bullet u_M|_{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^{n_M} \gamma_k \, (f_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (u_M|_{\mathbf{x}})^k. \end{aligned} \tag{13.104}$$

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este caso la potencia virtual externa en la macroescala está dada por*

$$P^e_M = \int_{\Omega_M} \mathbf{f}_M \cdot \hat{\mathbf{u}}_M \, d\Omega_M + \int_{\Gamma_{M_t}} \mathbf{t}_M \cdot \hat{\mathbf{u}}_M \, d\Gamma_M. \tag{13.105}$$

Su correspondiente en el punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$ *es*

$$P^e_{M,\mathbf{x}} = \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \gamma_1 \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{13.106}$$

■

Con esto, podemos definir la *Potencia Virtual Total de la macroescala en el punto* **x**. Para ello, usando (13.98) y (13.103), definimos

$$\begin{aligned} P^i_{M,\mathbf{x}}(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) = \Sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} - f_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \\ \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \end{aligned} \tag{13.107}$$

La Figura 13.3 entrega una representación esquemática de los diversos conceptos utilizados en la macroescala que forman parte de la teoría variacional multiescala aquí propuesta.

Observación 13.15 *El punto* **x** *es un punto perteneciente a un cierto objeto geométrico en la macroescala. En general, el puede ser un punto en un volumen, un punto en una superficie, o simplemente un punto en sí mismo. De esta manera, la potencia virtual externa,* $P^e_{M,\mathbf{x}}$*, en ese punto está asociada a fuerzas externas generalizadas definidas sobre el objeto geométrico al cual el punto pertenece, las cuales están caracterizadas por dualidad. Por ejemplo, en el caso de un punto en el volumen de un cuerpo sólido tridimensional, tendremos, por dualidad, la caracterización de fuerzas generalizadas de cuerpo. Esta noción generalizada incluye fuerzas generalizadas pasivas (como serían las fuerzas debido a la gravedad en la mecánica clásica) y fuerzas generalizadas de inercia (como las asociadas a la aceleración en mecánica clásica). Luego, el término* fuerzas generalizadas de cuerpo *lo usaremos aquí para referirnos a estas dos clases de fuerzas generalizadas (pasivas y de inercia). Así, fenómenos dinámicos son automáticamente llevados en cuenta en nuestra*

formulación. Sin embargo, debemos resalatar nuevamente que en esta formulación la macroescala y la microescala comparten la misma escala de tiempo.

13.5.2 Potencia Virtual en la Microescala

Llevando en cuenta los conceptos de dualidad ya presentados en la Sección 13.2, la potencia virtual interna en la microescala puede ser expresada de la siguiente manera

$$P^i_\mu(\mathscr{D}_\mu(\hat{u}_\mu)) = \langle \Sigma_\mu, \mathscr{D}_\mu(\hat{u}_\mu)\rangle_{\mathscr{W}'_\mu \times \mathscr{W}_\mu} \quad \hat{u}_\mu \in \mathrm{Var}_{u_\mu}. \tag{13.108}$$

Considerando (13.55) y (13.57), y con un cierto abuso de notación, obtenemos la siguiente expresión equivalente

$$P^i_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \mathscr{D}_\mu(\hat{\tilde{u}}_\mu)) = \langle \Sigma_\mu, \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) + \hat{\tilde{u}}_\mu)\rangle_{\mathscr{W}'_\mu \times \mathscr{W}_\mu}$$
$$\hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}, \hat{\tilde{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}, \tag{13.109}$$

en función de las acciones de deformación en la macroescala, $\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}$, y de las acciones de fluctuaciones virtuales en la microescala, $\hat{\tilde{u}}_\mu$. Observe que la cinemática en la macroescala es mapeada en la microescala a través del operador de inserción $\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu$. La Figura 13.4 ilustra de manera esquemática los conceptos básicos de la formulación variacional en la microescala, fundamentales para la formulación unificada variacional de la teoría multiescala que estamos presentando.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *Llevando en cuenta los términos que participan en la definición de la acción de deformación en la microescala, la potencia virtual interna en este ejemplo toma la forma*

$$P^i_\mu = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{u}}_\mu)^s \, d\Omega_\mu = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot (\hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} + (\nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s) \, d\Omega_\mu =$$
$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s \, d\Omega_\mu. \tag{13.110}$$

■

Veamos ahora la potencia virtual externa en la microescala. Como vimos, ella es definida como un funcional lineal en el subespacio $\mathrm{Var}_{u_\mu} = \mathrm{Kin}_{u_\mu}$, luego

$$P^e_\mu(\hat{u}_\mu) = \langle f_\mu, \hat{u}_\mu \rangle_{\mathscr{V}'_\mu \times \mathscr{V}_\mu} \quad \hat{u}_\mu \in \mathrm{Var}_{u_\mu}. \tag{13.111}$$

De (13.108) y de la definición del operador adjunto $\mathscr{D}^*_\mu$ podemos caracterizar totalmente la naturaleza de las fuerzas generalizadas externas admisibles en la microescala $f_\mu \in \mathscr{V}'_\mu$. De hecho, tenemos

$$\langle \Sigma_\mu, \mathscr{D}_\mu(\hat{u}_\mu)\rangle_{\mathscr{W}'_\mu\times\mathscr{W}_\mu} = \langle \mathscr{D}^*_\mu(\Sigma_\mu), \hat{u}_\mu\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu} =$$
$$\langle f_\mu, \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}) + \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) + \hat{\tilde{u}}_\mu\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu} \quad \hat{u}_\mu \in \mathrm{Var}_{u_\mu}, \quad (13.112)$$

es decir

$$P^e_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{u}}_\mu) = \langle f_\mu, \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}) + \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) + \hat{\tilde{u}}_\mu\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu}$$
$$\hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}, \hat{\tilde{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (13.113)$$

Observe que en la evaluación de la potencia virtual externa en la microescala participan entidades cinemáticas definidas en la macroescala y entidades cinemáticas definidas en la microescala.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *Para este ejemplo, la potencia virtual externa en la microescala está dada por*

$$P^e_\mu = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot (\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} + \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o) + \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)\, d\Omega_\mu =$$
$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu. \quad (13.114)$$

■

Con la definición de las potencias virtuales interna y externa introducimos la *Potencia Virtual Total en la microescala* como sigue

$$P^t_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{u}}_\mu) = P^i_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \mathscr{D}_\mu(\hat{\tilde{u}}_\mu)) - P^e_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{u}}_\mu)$$
$$\hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}, \hat{\tilde{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}, \quad (13.115)$$

caracterizada por la suma de funcionales lineales (e continuos) en Var_{u_μ}.

La contribución de entidades cinemáicas virtuales de la macroescala, $\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}$ y $\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}$, en la evaluación de la potencia virtual total en la microescala, dada por la (13.115), tiene implicaciones fundamentales en la teoría. Para ver esto, evaluemos P^t_μ para $\hat{\tilde{u}}_\mu = 0$,

$$P^t_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, 0) = P^i_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, 0) - P^e_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, 0) =$$
$$\langle \Sigma_\mu, \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}))\rangle_{\mathscr{W}'_\mu\times\mathscr{W}_\mu} - \langle f_\mu, \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}) + \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu} =$$
$$\langle (\mathscr{D}^*_\mu\Sigma_\mu - f_\mu), \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu} - \langle f_\mu, \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu}. \quad (13.116)$$

De esta expresión, entidades duales (del tipo fuerzas y tensiones), que denotaremos $f^\mu_M|_{\mathbf{x}} \in (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})'$ y $\Sigma^\mu_M|_{\mathbf{x}} \in (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})'$, en dualidad respectivamente con las acciones virtuales en la macroescala $\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}$ y $\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}$, pueden ser prontamente identificadas como mostramos a seguir. Haciendo uso del operador adjunto $(\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu)' : \mathscr{V}'_\mu \to (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})'$ y $(\mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu)' : \mathscr{V}'_\mu \to (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})'$, de (13.116) obtenemos

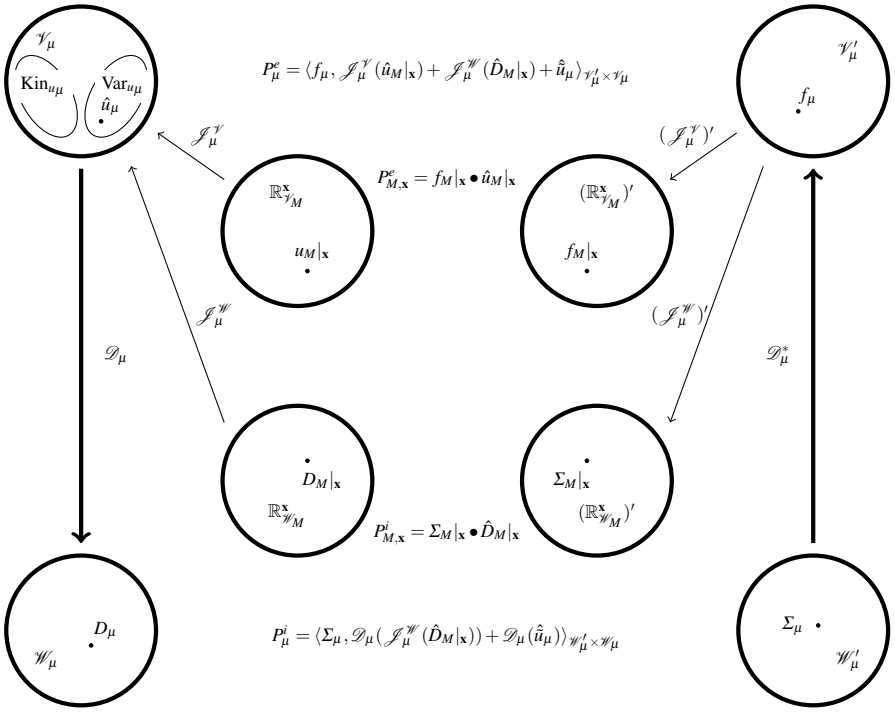


Fig. 13.4 Método de la Potencia Virtual Multiescala. Diagrama esquemático de espacios, conjuntos, funcionales y operaciones básicos en la microescala.

$$\begin{aligned}\Sigma^\mu_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} &= \sum_{k=1}^{m_M} \omega_k \, (\Sigma^\mu_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})^k \\ &:= \langle (\mathscr{D}^*_\mu \Sigma_\mu - f_\mu), \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu} \\ &= \langle (\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu)'(\mathscr{D}^*_\mu \Sigma_\mu - f_\mu), \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}\rangle_{(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})'\times\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}, \end{aligned} \tag{13.117}$$

$$\begin{aligned} f^\mu_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} &= \sum_{k=1}^{n_M} \gamma_k \, (f^\mu_M|_{\mathbf{x}})^k \cdot (\hat{u}_M|_{\mathbf{x}})^k \\ &:= \langle f_\mu, \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}'_\mu\times\mathscr{V}_\mu} \\ &= \langle (\mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu)' f_\mu, \hat{u}_M|_{\mathbf{x}}\rangle_{(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})'\times\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}. \end{aligned} \tag{13.118}$$

Luego, colocando las definiciones introducidas en (13.117) y (13.118) en la expresión (13.116) obtenemos finalmente

$$P^t_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, 0) = \Sigma^\mu_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} - f^\mu_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{13.119}$$

Resumiendo, usando conceptos de dualidad hemos mostrado que, como resultado de la admisibilidad cinemática (vinculando las cinemáticas de la macroescala

y de la microescala), la potencia virtual total en la microescala tiene contribuciones que son evaluadas a través de acciones cinemáticas virtuales definidas en la macroescala. La comparación entre (13.119) y (13.107) sugiere que puede ser postulado un vínculo adicional entre las potencias virtuales en la macroescala y en la microescala. Esto será mostrado a seguir.

13.6 Principio de la Potencia Virtual Multiescala

El *Principio de la Potencia Virtual Multiescala* (PPVM) que veremos en esta sección establece el vínculo de consistencia entre las potencias virtuales asociadas a cada escala (macro y micro) que mencionamos en la sección anterior y que, como veremos en detalle más adelante, da lugar a las siguientes consecuencias

- Caracteriza las n_μ ecuaciones variacionales de equilibrio en la microescala.
- Carcateriza las m_M fórmulas de homogeneización de las tensiones generalizadas en la macroescala. En otras palabras, establece las expresiones que nos permiten obtener las tensiones generalizadas en la macroescala en función de los esfuerzos generalizados existentes en la microescala.
- Caracteriza las n_M fórmulas de homogeneización de las fuerzas generalizadas en la macroescala. Es decir, establece las expresiones que nos proporcionan los esfuerzos generalizados externos en función de los esfuerzos generalizados en la microescala.

El principio en sí, puede ser visto como la versión variacional extendida del Principio de Macro-Homogeneización de Hill-Mandel [142, 177] y se postula como sigue.

Principio de la Potencia Virtual Multiescala (PPVM). La potencia virtual total en el punto $\mathbf{x}$ en la macroescala debe ser igual a la potencia virtual total en la correspondiente microescala (EVR asociado al punto $\mathbf{x}$) para toda acción virtual cinemáticamente admisible en la macroescala y en la microescala. Es decir

$$P^t_{M,\mathbf{x}}(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) = P^t_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{u}}_\mu) \quad \forall(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{u}}_\mu) \text{ cinemáticamente admisible.} \quad (13.120)$$

o en forma más explícita

$$\Sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} - f_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} = \langle \Sigma_\mu, \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) + \hat{\tilde{u}}_\mu)\rangle_{\mathscr{W}'_\mu \times \mathscr{W}_\mu} - \langle f_\mu, \mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}) + \mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}) + \hat{\tilde{u}}_\mu\rangle_{\mathscr{V}'_\mu \times \mathscr{V}_\mu}$$
$$\forall(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{u}}_\mu) \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}} \times \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}} \times \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (13.121)$$

Como una variante del clásico Principio de Hill-Mandel, donde sólo intervienen potencias internas, el PPVM implica en la equivalencia entre la potencia virtual

total (es decir potencia virtual interna y externa) en el punto $\mathbf{x}$ de la macroescala y la potencia virtual total en el correspondiente EVR en la microescala.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este ejemplo clásico, las fuerzas de cuerpo y tensiones en la macroescala* $(\sigma_M|_{\mathbf{x}}, \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}})$ *y sus similares campos en la microescala* $(\sigma_\mu, \mathbf{f}_\mu)$*, satisfacen el PPVM si y sólo si la siguiente ecuación variacional es satisfecha*

$$\sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s\, d\Omega_\mu$$
$$- \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{y}_o))^s \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu\, d\Omega_\mu$$
$$\forall (\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu) \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}} \times \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}} \times \mathrm{Var}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}. \quad (13.122)$$

■

Observación 13.16 *Es importante resaltar que el Principio de la Potencia Virtual Multiescala proporciona también la definición de los escalares* ω_k*,* $k = 1, \ldots, m_M$ *y* γ_k*,* $k = 1, \ldots, n_M$*, que aparecen en el lado izquierdo de* (13.121) *(siguiendo las identidades* (13.99) *y* (13.104)*).*

13.7 Operadores Duales

Los operadores duales de homogeneización para las tensiones y fuerzas generalizadas en la macroescala así como las ecuaciones de equilibrio en la microescala surgen como consecuencia natural del PPVM. Como veremos en breve, ellos corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas con la ecuación variacional (13.121) establecida por el PPVM.

13.7.1 Equilibrio en la Microescala

Adoptando $\hat{D}_M|_{\mathbf{x}} = 0$ y $\hat{u}_M|_{\mathbf{x}} = 0$ en (13.121), obtenemos la forma variacional de la ecuación de equilibrio en la microescala

$$\langle \Sigma_\mu, \mathscr{D}_\mu(\hat{\tilde{u}}_\mu) \rangle_{\mathscr{W}'_\mu \times \mathscr{W}_\mu} - \langle f_\mu, \hat{\tilde{u}}_\mu \rangle_{\mathscr{V}'_\mu \times \mathscr{V}_\mu} = 0 \quad \forall \hat{\tilde{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (13.123)$$

Obviamente, estas ecuaciones tienen el mismo formato de las ecuaciones de equilibrio correspondientes a la aplicación del PPV al problema físico en la microescala caracterizado por las tensiones y fuerzas generalizadas y por las restricciones cinemáticas implícitas en la definición de $\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}$.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este caso, cuando adoptamos* $\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ *y* $\hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O}$ *en la expresión del PPVM, el equilibrio del EVR es obtenido como la siguiente ecuación variacional*

$$\int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = 0 \quad \forall \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \tag{13.124}$$

■

Haciendo uso del operador adjunto $\mathscr{D}_\mu^*$ en (13.123), obtenemos la siguiente forma alternativa

$$\langle \mathscr{D}_\mu^*(\Sigma_\mu) - f_\mu, \hat{\tilde{u}}_\mu \rangle_{\mathscr{V}_\mu' \times \mathscr{V}_\mu} = 0 \quad \forall \hat{\tilde{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}, \tag{13.125}$$

o equivalentemente

$$\mathscr{D}_\mu'(\Sigma_\mu) - f_\mu \in (\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu})^\perp \subset \mathscr{V}_\mu{}'. \tag{13.126}$$

Aún más, recordando que f_μ debe satisfacer (13.29), es decir

$$\langle f_\mu, \hat{\tilde{u}}_\mu \rangle_{\mathscr{V}_\mu' \times \mathscr{V}_\mu} = 0 \quad \forall \hat{\tilde{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu} \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}_\mu), \tag{13.127}$$

obtenemos

$$f_\mu \in (\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu} \cap \mathscr{N}(\mathscr{D}_\mu))^\perp, \tag{13.128}$$

donde $(\cdot)^\perp$ representa el complemento ortogonal de $(\cdot)$. Es decir, el sistema f_μ de fuerzas generalizadas es ortogonal a las fluctuaciones virtuales rígidas admisibles en la microescala del EVR.

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *Si realizamos la siguiente descomposición* $\mathbf{f}_\mu = \bar{\mathbf{f}}_\mu + \tilde{\mathbf{f}}_\mu$*, donde* $\bar{\mathbf{f}}_\mu = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \, d\Omega_\mu$*, y* $\tilde{\mathbf{f}}_\mu = \mathbf{f}_\mu - \bar{\mathbf{f}}_\mu$*, tenemos que* $\int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = \int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{f}}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu$*. Por lo tanto, solamente las fluctuaciones de las fuerzas de cuerpo,* $\tilde{\mathbf{f}}_\mu$*, que no son ortogonales a* $\mathrm{Var}_{\tilde{\mathbf{u}}_\mu}$*, entran en juego en el problema del equilibrio de la microescala.* ■

Finalmente resaltamos que el *problema del equilibrio en la microescala* queda completamente definido por la ecuación variacional (13.123) cuando la fuerza externa f_μ es proporcionada (un dato del problema), y cuando la ley constitutiva $\Sigma_\mu = \Sigma_\mu(u_\mu^t)$, expresando las tensiones Σ_μ como función de la historia u_μ^t del campo u_μ, es caracterizada para cada punto del EVR. Finalmente, el problema del equilibrio en la microescala puede ser colocado de la siguiente forma.

Para una dada ecuación constitutiva $\Sigma_\mu = \Sigma_\mu(u_\mu^t)$, y una dada historia $u_M^t|_{\mathbf{x}}$ y $D_M^t|_{\mathbf{x}}$, de los desplazamientos generalizados y acciones de deformación generalizada, y para una dada historia de las fuerzas externas generalizadas admisibles en la microescala, f_μ^t, determinar la historia $u_\mu^t \in \mathrm{Kin}_{u_\mu}$ de los desplazamientos generalizados cinemáticamente admisibles en la microescala tales que

$$\langle \Sigma_\mu(u_\mu^\tau), \mathscr{D}_\mu(\hat{u}_\mu) \rangle_{\mathscr{W}' \times \mathscr{W}} = \langle f(\tau), \hat{u}_\mu \rangle_{\mathscr{V}' \times \mathscr{V}} \quad \forall \hat{u}_\mu \in \mathrm{Var}_{u_\mu}, \forall \tau \in [0,t]. \tag{13.129}$$

13.7.2 Homogeneización de Tensiones Generalizadas

Haciendo $\hat{u}_M|_{\mathbf{x}} = 0$ y $\hat{\tilde{u}}_\mu = 0$ en (13.121) (ver también (13.117)) obtenemos

$$\begin{aligned}\Sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} &= \langle \Sigma_\mu, \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}}))\rangle_{\mathscr{W}_\mu' \times \mathscr{W}_\mu} - \langle f_\mu, \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}_\mu' \times \mathscr{V}_\mu} \\ &= \langle \mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu, \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\hat{D}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}_\mu' \times \mathscr{V}_\mu} \\ &= \langle (\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}})'(\mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu), \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}\rangle_{(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})' \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}} \\ &= \Sigma_M^\mu|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \end{aligned} \tag{13.130}$$

La expresión anterior nos permite identificar rápidamente el Σ_M*-operador general de homogeneización* (lineal) dado por

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_\Sigma : \mathscr{V}_\mu' &\to (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})', \\ (\mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu) &\mapsto \Sigma_M^\mu|_{\mathbf{x}} = \mathfrak{H}_\Sigma(\mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu), \end{aligned} \tag{13.131}$$

tal que

$$\langle (\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}})'(\mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu), \hat{D}_M|_{\mathbf{x}}\rangle_{(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})' \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}} = \mathfrak{H}_\Sigma(\mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu) \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \tag{13.132}$$

De (13.130) y de la definición anterior llegamos a

$$(\Sigma_M|_{\mathbf{x}} - \mathfrak{H}_\Sigma(\mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu)) \bullet \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall \hat{D}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \tag{13.133}$$

Obtenemos así la expresión de la fórmula de homogeneización para las tensiones generalizadas en la macroescala

$$\Sigma_M|_{\mathbf{x}} - \mathfrak{H}_\Sigma(\mathscr{D}_\mu^* \Sigma_\mu - f_\mu) \in (\widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}})^\perp \subseteq (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})'. \tag{13.134}$$

Observación 13.17 *El Σ_M-operador de homogeneización y la correspondiente fórmula de homogeneización para las cantidades del tipo* **tensiones** *son aquí* **deducidas** *como consecuencia del PPVM. Esto es una diferencia fundamental entre la presente formulación y lo que se encuentra en la literatura, donde la fórmulas de homogeneización de las tensiones son dadas a priori y sin ninguna justificativa teórica.*

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *En este caso clásico, colocando $\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ y $\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu = \mathbf{0}$ en el PPVM, se tiene*

$$\boldsymbol{\sigma}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_M|_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_\mu} \boldsymbol{\sigma}_\mu \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu \otimes (\mathbf{y} - \mathbf{y}_o))^s \cdot \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu \quad \forall \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \tag{13.135}$$

La fórmula de homogeneización la obtenemos identificando primero

$$\sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} = |\Omega_\mu|\, \sigma_M|_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}, \tag{13.136}$$

que resulta en

$$\sigma_M|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \left(\sigma_\mu - (\mathbf{f}_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s\right) d\Omega_\mu. \tag{13.137}$$

En este caso tenemos $\omega_1 = |\Omega_\mu|$ por lo que la homogeneización de las tensiones es físicamente consistente. Observe que esta es la fórmula del Σ_M-operador de homogeneización que resulta naturalmente de la propia formulación. Lo anterior fue alcanzado de manera rápida. Para ver lo mismo en una manera más detallada, consideremos el operador $\mathscr{D}_\mu(\cdot) = (\nabla_{\mathbf{y}}(\cdot))^s$ explícitamente como sigue

$$\sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_\mu} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}}(\hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}-\mathbf{y}_o)))^s\, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu$$
$$\forall \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \tag{13.138}$$

Luego, integrando por partes el primer término del lado derecho tenemos

$$\sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_\mu} (-\operatorname{div}_{\mathbf{y}} \sigma_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu$$
$$+ \int_{\partial\Omega_\mu} (\sigma_\mu \mathbf{n}_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}\, d\partial\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu$$
$$\forall \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \tag{13.139}$$

Ahora, usando la forma fuerte del equilibrio en la microescala tenemos que

$$\sigma_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} = \left(\int_{\partial\Omega_\mu} (\sigma_\mu \mathbf{n}_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s\, d\partial\Omega_\mu \right) \cdot \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \hat{\varepsilon}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}}. \tag{13.140}$$

Luego, procediendo de la misma forma que anteriormente, concluimos que la fórmula para la Σ_M-homogeneización está dada por

$$\sigma_M|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\partial\Omega_\mu} (\sigma_\mu \mathbf{n}_\mu \otimes (\mathbf{y}-\mathbf{y}_o))^s\, d\Omega_\mu. \tag{13.141}$$

Esta expresión es totalmente análoga a la anteriormente obtenida en (13.137)*. La ventaja de esta última expresión sobre la* (13.137) *es que la homogeneización depende solamente de variables definidas en la frontera del EVR – algo que ya había sido puesto en evidencia por Hill [142] como un aspecto de fundamental importancia práctica en las teorías que utilizan el concepto del EVR. No obstante esto, es importante observar que la primera fórmula requiere menos regularidad que la segunda fórmula para los campos que intervienen en las mismas y, por lo tanto, está mejor adecuada para problemas abordados desde el punto variacional (débil)*

en todos sus niveles. ■

Observación 13.18 *De acuerdo con la expresión* (13.130)*, los coeficientes* ω_k*,* $k = 1\ldots,m_M$*, que aparecen en el lado izquierdo (ver también* (13.99)*), son identificados a través del procedimiento de homogeneización dado por el operador* $\mathfrak{H}_\Sigma$ *de manera que la operación de homogeneización sea físicamente consistente (ver el ejemplo anterior de mecánica de sólidos multi-escala clásico).*

13.7.3 Homogeneización de Fuerzas Generalizadas

Para obtener estas expresiones, vamos a particularizar (13.121) tomando $\hat{D}_M|_{\mathbf{x}} = 0$ y $\hat{\hat{u}}_\mu = 0$ (ver también (13.118)). Esto conduce a

$$\begin{aligned} f_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} &= \langle f_\mu, \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\hat{u}_M|_{\mathbf{x}})\rangle_{\mathscr{V}'_\mu \times \mathscr{V}_\mu} \\ &= \langle (\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}})'(f_\mu), \hat{u}_M|_{\mathbf{x}}\rangle_{(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})' \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}} \\ &= f_M^\mu|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}. \end{aligned} \tag{13.142}$$

De manera similar a la realizada para obtener el operador de homogeneización para tensiones, de la ecuación variacional anterior identificamos facilmente el f_M*-operador de homogeneización*

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_f : \mathscr{V}'_\mu &\to (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})', \\ f_\mu &\mapsto f_M^\mu|_{\mathbf{x}} = \mathfrak{H}_f(f_\mu), \end{aligned} \tag{13.143}$$

tal que

$$\langle (\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}})'(f_\mu), \hat{u}_M|_{\mathbf{x}}\rangle_{(\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})' \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}} = \mathfrak{H}_f(f_\mu) \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}. \tag{13.144}$$

Con la definición de $\mathfrak{H}_f$, (13.142) resulta

$$(f_M|_{\mathbf{x}} - \mathfrak{H}_f(f_\mu)) \bullet \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall \hat{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}. \tag{13.145}$$

Y obtenemos así la fórmula de homogeneización que nos permite caracterizar las fuerzas generalizadas en la macroescala en función de las fuerzas generalizadas en la microescala

$$f_M|_{\mathbf{x}} - \mathfrak{H}_f(f_\mu) \in (\widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}})^\perp \subseteq (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})'. \tag{13.146}$$

Mecánica de los sólidos multiescala clásica. *Considerando* $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O}$ *y* $\hat{\mathbf{u}}_\mu = \mathbf{0}$ *en el correspondinte PPVM, obtenemos*

$$\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \in \widehat{\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}}. \tag{13.147}$$

Aquí identificamos

$$\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = |\Omega_\mu| \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}, \tag{13.148}$$

de donde obtenemos

$$\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \, d\Omega_\mu. \tag{13.149}$$

Esto define el f_M-operador de homogeneización. Observe que γ_1 es aquí identificado como $\gamma_1 = |\Omega_\mu|$ garantizando así la consistencia física de la operación de homogeneización. ■

Observación 13.19 *De acuerdo con* (13.142)*, los coeficientes γ_k, $k = 1\ldots,n_M$, que forman parte de su lado izquierdo (ver también* (13.104)*), quedan identificados a través del proceso de homogeneización definido por $\mathfrak{H}_f$ de manera a hacer físicamente consistente la operación (ver el ejemplo anterior de mecánica de sólidos multi-escala clásico).*

13.8 Comentarios Finales

Resumiendo, en este capítulo hemos establecido una teoría completa para modelos multiescala de sistemas físicos basada en el concepto de EVR y fundada sobre principios variacionales que eliminan todo tipo de arbitrariedad, muy común en otras formulaciones existentes en la literatura. Dentro de la teoría aquí propuesta, los modelos que emplean el concepto de EVR son establecidos a través de un conjunto sistemático y bien definido de pasos englobados en lo que llamamos el *Método de la Potencia Virtual Multiescala*. Dentro de este método, y una vez establecida la cinemática a ser adoptada en cada una de las escalas, juntamente con la definición de la vinculación a través de las escalas entre tales cantidades cinemáticas, la naturaleza de las cantidades de tipo *tensiones* y de tipo *fuerzas* en ambas escalas son identificadas mediante el concepto matemático de dualidad. Por su parte, las ecuaciones de equilibrio y las relaciones de homogeneización para las cantidades de tipo tensiones y fuerzas son deducidas de manera unívoca y mediante argumentos variacionales bien establecidos como consecuencias del *Principio de la Potencia Virtual Multiescala*.

Un punto interesante a resaltar en la teoría multiescala desarrollada en esta monografía es que los conceptos de potencia interna y externa no son ahora totalmente independientes entre ellos como ocurre en la teoría convencional de una única escala. De hecho, y en general, la tensión generalizada en la macroescala, Σ_M, que por dualidad está caracterizada por la potencia interna de la macroescala, tiene contribuciones de la tensión generalizada en la microescala, Σ_μ (y por lo tanto caracterizada por la potencia interna en la microescala), y contribuciones de la fuerza generalizada en la microescala, f_μ (que por su vez está caracterizada por la potencia externa en la microescala). Además, los efectos de Σ_μ y de f_μ en la tensión generalizada en la

macroescala Σ_M están combinados de manera no lineal a través del equilibrio en la microescala definido por (13.120).

Estas interacciones claramente alteran las noción *constitutiva* estándar que tenemos del *comportamiento material*, ya que las fuerzas externas en la microescala (tales como fuerzas de cuerpo y fuerzas de inercia en problemas dinámicos) pueden contribuir en la definición de las tensiones en la macroescala. Ahora bien, una situación donde este concepto constitutivo estándar es preservado ocurre cuando la transferencia entre escalas involucra solamente la igualdad entre las potencias virtuales internas de la macroescala y de la microescala. Es decir, solamente cuando $P^i_{M,\mathbf{x}}$ y P^i_μ son consideradas en el Principio de la Potencia Virtual Multiescala, o, en otras palabras, cuando las potencias virtuales externas de ambas escalas no son llevadas en cuenta en el modelo multiescala. En este caso, la estructura de un *modelo multiescala puramente constitutivo* es recuperada. Esta es la situación de todos los modelos multiescala que hacen uso del Principio de Hill-Mandel de Macrohomogeneidad [177, 142]. El aspecto interesante en este caso es que la tensión generalizada en la macroescala, $\Sigma_M|_{\mathbf{x}}$, depende únicamente del comportamiento constitutivo en la microescala y de las interacciones mecánicas entre los diferentes elementos estructurales que participan en la caracterización del EVR, y para los cuales la tensión generalizada en la microescala Σ_μ es la única responsable. De hecho, si bien f_μ puede existir, este campo resulta ortogonal al espacio de desplazamientos virtuales admisibles generalizados y, por lo tanto, no generan potencia virtual. En otras palabras, f_μ es en este caso la fuerza *reactiva* asociada a las restricciones cinemáticas que están incorporadas en la definición del espacio $\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}$ [271] y, como consecuencia, f_μ no puede ser adoptado arbitrariamente.

Capítulo 14
Aplicaciones del Análisis Multiescala

14.1 Introducción

Este capítulo tiene por objetivo mostrar la aplicación del Método de la Potencia Virtual Multiescala en dos problemas de la mecánica de los sólidos. En ambos ejemplos vamos a suponer que los cuerpos están constituidos por materiales altamente heterogéneos en el nivel de la microescala, y que los mismos son estables en ambas escalas en el sentido de que, durante todo el proceso de carga, no presentan fenómenos de localización de deformación, falla y/o daño que puedan dar lugar a la pérdida de la capacidad portante. A su vez llevaremos en cuenta los efectos de fuerzas dinámicas (inercia) en la microescala de manera a estudiar el impacto que producen estas fuerzas en la definición del modelo en la macroescala.

En el primer ejemplo vamos a suponer que en ambos niveles la cinemática es la misma y que nos encontramos dentro del rango de deformaciones finitas. El segundo ejemplo difiere del anterior solamente en el hecho de que consideraremos modelos constitutivos diferentes en ambas escalas. En particular, en la macroescala consideraremos un determinado comportamiento constitutivo y que el medio continuo es incompresible mientras que en la microescala llevaremos en cuenta un comportamiento constitutivo pero no consideraremos el medio como siendo incompresible. Estos dos ejemplos son suficientes para mostrar la versatilidad del método desarrollado al permitir abordar diferentes situaciones que el modelado multiescala puede requerir. En este sentido la lectura de los trabajos publicados por nosotros, donde mostramos la aplicación de esta técnica multiescala en diversos problemas que incluyen, entre otros, fractura, fenómenos de localización de la deformación, falla, termomecánica, y problemas en la mecánica de los fluidos, puede resultar de gran utilidad para el lector interesado.

14.2 Mecánica de Sólidos con Fuerzas Externas

En esta sección vamos a mostrar el desarrollo de un modelo multiescala en la mecánica de los sólidos en grandes deformaciones donde incorporaremos los efectos de fuerzas externas pasivas y/o activas (dinámicas) siendo que, para llevar en cuenta esta última, vamos a suponer que ambas escalas comparten la misma escala temporal[1]. Como veremos en esta parte del capítulo, la incorporación de este efecto (fuerzas dinámicas) es muy simple. En efecto, para ello basta incorporar la potencia virtual asociada a estas fuerzas en la definición del *Principio de la Potencia Virtual Multiescala*.

14.2.1 Cinemática Multiescala

Como vamos a trabajar dentro del régimen de deformaciones finitas en ambas escalas, el modelo será desarrollado en las respectivas configuraciones de referencia ocupada por el cuerpo sólido (que también adoptaremos como inicial) y que supondremos libre de cargas, tensiones y/o deformaciones iniciales. Esto es, estas configuraciones corresponden al estado virgen del material.

Con esto en mente y como realizado en el Capítulo 13, designamos respectivamente con $\Omega_M \subset \mathbb{R}^3$ a la configuración de referencia en la macroescala, $\partial\Omega_M$ es su contorno, el cual suponemos suficientemente suave y y $\mathbf{n}_M$ es la normal exterior a este contorno. A su vez, designamos con $\mathbf{x} \in \Omega_M$ un punto material arbitrario de Ω_M.

La cinemática a ser adoptada en la macroescala es la clásica de grandes deformaciones. Luego, la misma está caracterizada por desplazamientos $\mathbf{u}_M \in \text{Kin}_{u_M}$, donde

$$\text{Kin}_{u_M} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_M); \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \partial\Omega_{Mu}\}, \tag{14.1}$$

es la variedad lineal formada por todos los desplazamientos cinemáticamente admisibles con la condición de contorno esencial impuesta en la parte del contorno $\partial\Omega_{Mu}$. A su vez, el operador de acción de deformación está dado por el operador gradiente en la configuración de referencia, es decir $\mathscr{D}_M(\cdot) = \nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$. De esta manera, la acción compatible de deformación está dada por el gradiente del desplazamiento, es decir $D_M = \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{u}_M = \mathbf{G}_M$. Con esto, el espacio de acciones de deformación está caracterizado por todos los campos tensoriales de segundo orden (no necesariamente simétricos) tales que sean, por ejemplo, cuadrado integrables en Ω_M, es decir $\mathscr{W}_M = \mathbf{L}^2(\Omega_M)$. De las definiciones anteriores es fácil ver que el valor que toman

[1] Las herramientas presentadas dentro de nuestro Método de la Potencia Virtual Multiescala pueden ser fácilmente extendidas de manera a también incorporar escalas diferentes para la variable tiempo. Un ejemplo de aplicación de este tipo de modelo multiescala espacial y temporal es el necesario para el modelado de sistemas biológicos humanos donde, por ejemplo, el envejecimiento ocurre a lo largo de la vida humana (10^9 segundos) mientras que el período del latido del corazón ocurre en el lapso de 1 segundo.

los desplazamientos y acciones de deformación en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$ están dados, respectivamente, por vectores $\mathbf{w}$ y tensores (no simétricos) $\mathbf{H}$ pertenecientes a los siguientes espacios

$$\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{w} = \mathbf{u}|_{\mathbf{x}}, \mathbf{u} \in \mathscr{V}_M\}, \tag{14.2}$$

$$\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} = \{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3\times 3}; \mathbf{H} = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}, \mathbf{G}_M \in \mathscr{W}_M\}. \tag{14.3}$$

Como establecido en el capítulo anterior, vamos a suponer que a cada punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$ le corresponde un EVR, cuya configuración de referencia está dada por Ω_μ, y es tal que coincide con su centro geométrico que es adoptado como origen del sistema de coordenadas en la microescala donde un punto genérico es designado por $\mathbf{y}$, verificándose así

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{y}\, d\Omega_\mu = \mathbf{0}. \tag{14.4}$$

De manera análoga en la macroescala, el contorno de Ω_μ es supuesto suave y designado por $\partial\Omega_\mu$ con normal $\mathbf{n}_\mu$.

Como mencionamos, la cinemática en la microescala es del mismo tipo que la cinemática en la macroescala. Luego, está caracterizada por campos de desplazamientos que designaremos $\mathbf{u}_\mu \in \mathscr{V}_{u_\mu}$, donde $\mathscr{V}_{u_\mu} = \mathbf{H}^1(\Omega_\mu)$. A su vez, el operador de acción de deformación es el operador gradiente $\mathscr{D}_\mu(\cdot) = \nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$ y las acciones compatibles de deformación están dadas por $D_\mu = \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_\mu = \mathbf{G}_\mu \in \mathscr{W}_\mu = \mathbf{L}^2(\Omega_\mu)$.

Como en la microescala estamos considerando materiales que no presentan en todo el proceso de carga ningún fenómeno de localización de deformación y/o falla del material, vamos a suponer que el operador de inserción de desplazamiento está dado por

$$\mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}) = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{y} \in \Omega_\mu, \tag{14.5}$$

mientras que el operador de inserción de las acciones de deformación de la macroescala para la microescala está definido por

$$\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}) = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{y} \quad \mathbf{y} \in \Omega_\mu, \tag{14.6}$$

donde estamos considerando que el centro geométrido de Ω_μ coincide con el centro de coordenadas en la microescala.

Con estos elementos así definidos, el desplazamiento en la microescala toma la forma

$$\mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu \quad \mathbf{y} \in \Omega_\mu. \tag{14.7}$$

Dado que $\mathscr{D}_\mu(\cdot) = \nabla_{\mathbf{y}}(\cdot)$, verificamos que $\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}^{\mathscr{V}}_\mu(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}})) = \mathbf{O}$ y también que $\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}^{\mathscr{W}}_\mu(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})) = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$. De esta manera obtenemos

$$\mathbf{G}_\mu = \mathscr{D}_\mu(\mathbf{u}_\mu) = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu. \tag{14.8}$$

Vamos ahora a adoptar los siguientes operadores cinemáticos de homogeneización. Al que lleva desplazamientos en la microescala para la macroescala lo definimos como

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_\mu) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu, \tag{14.9}$$

mientras que al que lleva deformaciones de la microescala para la macroescala lo definimos como

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathbf{G}_\mu) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathbf{G}_\mu \, d\Omega_\mu. \tag{14.10}$$

Es interesante observar aquí que, por construcción, el *Principio de Conservación Cinemática* de desplazamiento y deformación, dado, respectivamente, por (13.70) y (13.71), es automáticamente satisfecho, es decir las siguientes igualdades se verifican trivialmente

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}})) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}) \, d\Omega_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}, \tag{14.11}$$

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}))) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})) \, d\Omega_\mu = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{14.12}$$

Para satisfacer la *admisibilidad cinemática*, ver las expresiones (13.74) y (13.75), algunas restricciones adicionales serán necesarias imponer al campo de fluctuaciones $\tilde{\mathbf{u}}_\mu$. En efecto, para el presente ejemplo de aplicación la expresión (13.74) toma la forma

$$\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}) \, d\Omega_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{14.13}$$

Teniendo presente la descomposición del campo de desplazamiento en la micrescala dada por (14.7), la definición adoptada para el operador de inserción $\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}$, ver la expresión (14.5), y dado que

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{y} \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}, \tag{14.14}$$

vemos que los desplazamientos en la microescala satisfacen la admisibilidad cinemática exigida por la expresión (14.13) si y sólo si el campo de fluctuaciones satisface la restricción

$$\int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}. \tag{14.15}$$

De la misma manera, la admisibilidad cinemática exigida por la expresión (13.75) toma, para el presente ejemplo, la siguiente forma

$$\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathbf{G}_\mu \, d\Omega_\mu = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathscr{D}_\mu(\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}})) \, d\Omega_\mu = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{14.16}$$

Nuevamente, de (14.6) y de (14.8), la admisibilidad cinemática exigida por (14.16) es satisfecha si y sólo si el gradiente en la microescala del campo de fluctuaciones satisface la restricción adicional

$$\int_{\Omega_\mu} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{O}, \tag{14.17}$$

o su equivalente después de integrar por partes

$$\int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O}. \tag{14.18}$$

La admisibilidad cinemática así garantizada permite establecer el vínculo entre la cinemática en la macroescala, caracterizada en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega$ por $\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}$ y $\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$, y la cinemática en el EVR asociado al punto $\mathbf{x}$ dada por la expansión (14.7) y las restricciones sobre el campo de fluctuaciones dadas por las expresiones (14.15) y (14.17), o su equivalente (14.18).

Como resultado de todo esto tenemos perfectamente caracterizado tanto el espacio admisible de acciones de desplazamiento en la microescala como su correspondiente espacio de acciones virtuales dados por

$$\begin{aligned}\mathrm{Kin}_{u_\mu} = \mathrm{Var}_{u_\mu} = \Big\{ & \mathbf{u}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu); \mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \\ & \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not{\gamma}_M}, \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not{\gamma}_M}, \int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}, \int_{\Omega_\mu} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{O} \Big\},\end{aligned} \tag{14.19}$$

o también

$$\begin{aligned}\mathrm{Kin}_{u_\mu} = \mathrm{Var}_{u_\mu} = \Big\{ & \mathbf{u}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu); \mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu, \\ & \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not{\gamma}_M}, \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not{\gamma}_M}, \int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}, \int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O} \Big\}.\end{aligned} \tag{14.20}$$

Podemos observar que el espacio Kin_{u_μ} puede ser reescrito poniendo en evidencia el espacio admisible de fluctuaciones $\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$ (y por lo tanto del espacio de acciones virtuales de perturbaciones $\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}$) dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu} = \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu} = \\ \Big\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu); \int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}, \int_{\Omega_\mu} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{O} \Big\},\end{aligned} \tag{14.21}$$

o de forma equivalente

$$\begin{aligned}\mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu} = \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu} = \\ \Big\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu); \int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}, \int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O} \Big\}.\end{aligned} \tag{14.22}$$

Con esta definición, tenemos

$$\mathrm{Kin}_{u_\mu} = \{\mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \tilde{\mathbf{u}}_\mu; \\ \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M}, \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma\not\gamma_M}, \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}\}. \quad (14.23)$$

Otra manera de caracterizar los desplazamientos en la microescala, $\mathbf{u}_\mu$, totalmente equivalente a la anterior, y que facilitará la obtención de las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al *Principio de la Potencia Virtual Multiescala*, es poner en evidencia las homogeneizaciones en desplazamientos y deformaciones dadas por la admisibilidad cinemática (ver (14.13) y (14.16)), en lugar de las fluctuaciones. En otras palabras, no establecemos de forma explícita la expansión (14.7), la cual resulta ahora una consecuencia implícita de esta nueva caracterización. En efecto tenemos

$$\mathrm{Kin}^*_{u_\mu} = \left\{ \mathbf{u}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu); \int_{\Omega_\mu} \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}, \int_{\Omega_\mu} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}, \right. \\ \left. \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M}, \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma\not\gamma_M} \right\}, \quad (14.24)$$

o también

$$\mathrm{Kin}^*_{u_\mu} = \left\{ \mathbf{u}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu); \int_{\Omega_\mu} \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}}, \int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{u}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}, \right. \\ \left. \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M}, \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma\not\gamma_M} \right\}. \quad (14.25)$$

Ahora bien, es fácil verificar que todo elemento $\mathbf{u}_\mu \in \mathrm{Kin}_{u_\mu}$ pertenece también a $\mathrm{Kin}^*_{u_\mu}$ y, a su vez, todo elemento de $\mathrm{Kin}^*_{u_\mu}$ es un elemento de Kin_{u_μ}. Es decir, ambas definiciones son equivalentes, esto es

$$\mathrm{Kin}^*_{u_\mu} = \mathrm{Kin}_{u_\mu}. \quad (14.26)$$

14.2.2 Caracterización de la Potencia Virtual

Para finalizar el modelo multiescala nos falta caracterizar las potencias externas e internas en ambas escalas. En este sentido y como estamos trabajando en grandes deformaciones y con una cinemática clásica, la potencia total en la macroescala está dada por

$$P^t_M(\hat{\mathbf{u}}_M, \nabla\hat{\mathbf{u}}_M) = \underbrace{\int_{\Omega_M} \mathbf{P}_M \cdot \nabla_{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{u}}_M \, d\Omega_M}_{=P^i_M} - \underbrace{\int_{\Omega_M} \mathbf{f}_M \cdot \hat{\mathbf{u}}_M \, d\Omega_M}_{=P^e_M}, \quad (14.27)$$

donde $\mathbf{P}_M$ es el tensor de Piola-Kirchhoff de primera especie. Aquí debemos resaltar que $\mathbf{f}_M$ puede estar integrada por una *fuerza pasiva* $\mathbf{f}^p_M$ (por ejemplo la generada

por la gravedad) y/o por una *fuerza activa/dinámica* representada por $\mathbf{f}_M^a$, es decir $\mathbf{f}_M = \mathbf{f}_M^p - \mathbf{f}_M^a$.

De lo anterior, vemos que para cada punto $\mathbf{x} \in \Omega_M$ tenemos las *densidades* de potencias interna y externa (que posteriormente serán vinculadas, vía el Principo de la Potencia Virtual Multiescala, con la potencia total en el EVR asociado) dadas respectivamente por

$$P^i_{M,\mathbf{x}} = \mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \nabla_{\mathbf{x}} \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \tag{14.28}$$

$$P^e_{M,\mathbf{x}} = \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \qquad \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}. \tag{14.29}$$

y donde las *operaciones* $(\cdot) \bullet (\cdot)$, diferentes para cada tipo de potencia, serán posteriormente caracterizadas vía este principio.

Por otro lado en la microescala la potencia interna está dada por

$$P^i_\mu(\nabla_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{u}}_\mu) = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu \quad \hat{\mathbf{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{u_\mu}, \tag{14.30}$$

que en forma extendida toma la forma

$$P^i_\mu = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot (\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu) \, d\Omega_\mu = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu$$
$$\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \tag{14.31}$$

La incorporación de los efectos de las fuerzas de cuerpo (por ejemplo las debidas a la gravedad) y fuerzas por efectos dinámicos en la microescala es realizada de manera simple, bastando para ello incorporarlas en la definición de la potencia externa en esta escala. De hecho, y como ocurría en la macroescala, el campo de fuerzas en la microescala será designado por $\mathbf{f}_\mu$ y estará compuesto por una componente *pasiva* (por ejemplo debida a la gravedad), que será designada por $\mathbf{f}^p_\mu$, y por una componente *activa* asociada con la aceleración de las partículas en la microescala, y que será representada por $\mathbf{f}^a_\mu$. Tenemos así

$$\mathbf{f}_\mu = \mathbf{f}^p_\mu - \mathbf{f}^a_\mu, \tag{14.32}$$

$$\mathbf{f}^a_\mu = \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu = \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \mathbf{y} + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu). \tag{14.33}$$

De esta manera, y llevando en cuenta que $\hat{\mathbf{u}}_\mu = \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \mathbf{y} + \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{u_\mu}$ la potencia externa en la microescala está dada por

$$P^e_\mu(\hat{\mathbf{u}}_\mu) = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^a_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu =$$
$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu$$
$$- \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu$$
$$\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}, \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (14.34)$$

14.2.3 Principio de la Potencia Virtual Multiescala

Tenemos así las condiciones para aplicar el *Principio de la Potencia Virtual Multiescala* (PPVM) que, como vimos en el Capítulo 13, nos proporciona todos los elementos que están faltando para concluir el modelo en estudio. De hecho, haciendo uso de conceptos básicos del cálculo variacional, obtenemos de este principio (i) las expresiones de homogeneización (y sus correspondientes operadores) que proporcionan las tensiones en la macroescala en función de las tensiones y fuerzas pasivas y activas en la microescala, (ii) las expresiones de homogeneización (y sus correspondientes operadores) que proporcionan las fuerzas pasivas y activas en la macroescala en función de sus correspondientes en la microescala, (iii) las ecuaciones variacionales de equilibrio que las tensiones y fuerzas (pasivas y activas) en la microescala satisfacen y, finalmente, (iv) dado que el espacio $\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}$ tiene las restricciones asociadas a la admisibilidad cinemática, obtenemos también las fuerzas *reactivas* asociadas por dualidad a estas restricciones. Una vez más, resaltamos que estas expresiones son *consecuencia* de las hipótesis cinemáticas adoptadas para cada escala, la admisibilidad cinemática vinculando las cinemáticas en ambos niveles y la dualidad materializada a través del PPVM. En otras palabras, ellas son deducidas de manera natural vía el PPVM, esto es, no son establecidas de manera *ad hoc* como en las teorías existentes en publicaciones sobre multiescala baseada en el concepto de EVR.

Decimos que $(\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}}, \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}}) \in (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})' \times (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M})'$ y $(\mathbf{P}_\mu, \mathbf{f}_\mu) \in \mathscr{W}'_\mu \times \mathscr{V}'_\mu$ satisfacen el PPVM si y sólo si la siguiente ecuación variacional es satisfecha

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu$$
$$- \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu$$
$$+ \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu$$
$$\forall (\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu) \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M} \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \times \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (14.35)$$

Para estudiar todas las consecuencias que surgen del principio anterior vamos a reescribir el mismo pero ahora relajando las restricciones de admisibilidad

cinemática existentes en la definición del espacio $\mathrm{Var}_{\bar{u}_\mu}$ dadas por $\int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}$ y $\int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O}$. De este modo, y como visto a lo largo de estas notas, estaremos caracterizando las reacciones de vínculo asociadas a estas restricciones cinemáticas. Para ello recurrimos a los multiplicadores de Lagrange dados, respectivamente, por $\lambda \in (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M})'$ y $\Lambda \in (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M})'$. Obtenemos así la siguiente ecuación variacional equivalente al PPVM definido por (14.35)

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_M \bullet \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} - \mathbf{f}_M \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} &= \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu \\
&\quad - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu \\
&\quad + \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu \\
&\quad + \lambda \cdot \int_{\Omega_\mu} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu + \hat{\lambda} \cdot \int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu - \Lambda \cdot \int_{\partial\Omega_\mu} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu - \hat{\Lambda} \cdot \int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu \\
&\quad \forall (\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu, \hat{\lambda}, \hat{\Lambda}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M} \times \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M} \times \mathbf{H}^1(\Omega_\mu) \times (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M})' \times (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M})'. \quad (14.36)
\end{aligned}$$

Como dicho, existe total equivalencia entre las expresiones (14.35) y (14.36). Resulta más práctico y conceptualmente simple derivar todas las consecuencias del PPVM a partir de la (14.36) ya que los espacios se encuentran libres de restricciones y las consecuencias de las ecuaciones variacionales se obtienen de forma más directa.

14.2.4 Problema de Equilibrio y Homogeneización

Procederemos ahora a obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al PPVM dado por la expresión (14.36), donde las restricciones cinemáticas han sido relajadas por medio de multiplicadores de Lagrange, que, en última instancia, representan las reacciones de vínculo del sistema a tales restricciones.

Así, de la ecuación variacional (14.36), y haciendo uso de conceptos clásicos del cálculo variacional obtenemos como consecuencia lo siguiente.

- **Admisibilidad cinemática.** Anulando todas las variaciones excepto $\hat{\lambda} \in (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M})'$ y $\hat{\Lambda} \in ((\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\not\gamma_M})'$ obtenemos, respectivamente, las dos expresiones que establecen la admisibilidad cinemática de los campos de fluctuaciones, es decir

$$\int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \mathbf{0}, \quad (14.37)$$

$$\int_{\partial\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O}. \quad (14.38)$$

- **Homogeneización de las tensiones en la macroescala.** Anulando todas las variaciones excepto $\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$ obtenemos

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \, d\Omega_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y}) \, d\Omega_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} + \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{y}) \, d\Omega_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}. \quad (14.39)$$

De la expresión anterior concluimos que la operación $\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}}$ resulta identificada de la siguiente manera $\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} = |\Omega_\mu| \mathbf{P}_M \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}}$, con lo que obtenemos la expresión de la homogeneización de las tensiones en la macroescala en función de las tensiones y de las fuerzas (pasivas y activas) en la microescala

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{P}_\mu - \mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y} + \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{y})) \, d\Omega_\mu = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{P}_\mu - \mathbf{f}_\mu \otimes \mathbf{y}) \, d\Omega_\mu. \quad (14.40)$$

Como podemos apreciar de la expresión anterior, la tensión en la macro escala depende explícita e implícitamente de $\ddot{\mathbf{u}}_\mu$. De hecho, la expresión anterior puede ser reescrita de la siguiente forma

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_M + \mathbf{S}_M = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{y}) \, d\Omega_\mu + \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{P}_\mu - \mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y}) \, d\Omega_\mu, \quad (14.41)$$

donde $\mathbf{A}_M$ lleva en cuenta la dependencia explícita, mientras que $\mathbf{S}_M$ lleva en cuenta la dependencia implícita a través del estado de tensiones en la micro escala, $\mathbf{P}_\mu$, que veremos depende de $\ddot{\mathbf{u}}_\mu$ vía la ecuación de equilibrio en la micro escala.

- **Homogeneización de las fuerzas en la macroescala.** De la misma manera que antes, tomando todas las variaciones nulas excepto $\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}$ obtenemos

$$\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \left(\int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu \right) \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}. \quad (14.42)$$

La expresión anterior permite identificar $\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}$ como $\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \bullet \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = |\Omega_\mu| \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}$ con lo que obtenemos la expresión de la homogeneización de las fuerzas en la macroescala en función de las fuerzas en la microescala

$$\mathbf{f}_M = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}^p_\mu - \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu) \, d\Omega_\mu. \quad (14.43)$$

Antes de continuar, veamos primero algunas consecuencias de la expresión anterior. Consideremos primero el caso en que no llevamos en cuenta fuerzas activas

en ninguna de las dos escalas, y supongamos que las fuerzas pasivas en la microescala sean motivadas por la acción del campo gravitacional (en este caso las fuerzas pasivas son llamadas *peso propio*). Luego $\mathbf{f}_\mu = \rho_\mu \mathbf{g}|_{\mathbf{x}}$ ya que el campo de aceleración gravitacional en la microescala puede admitirse constante, y hemos designado con $\mathbf{g}|_{\mathbf{x}}$ el valor de este campo en el punto $\mathbf{x}$. Con estas hipótesis, de (14.43) obtenemos

$$\mathbf{f}_M^p|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \mathbf{g}|_{\mathbf{x}}\, d\Omega_\mu = \left(\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \, d\Omega_\mu\right)\mathbf{g}|_{\mathbf{x}}, \tag{14.44}$$

identificando de esta manera el peso específico en la macroescala dado por

$$\rho_M|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \, d\Omega_\mu. \tag{14.45}$$

Consideremos ahora el caso de fuerzas activas presentes en ambas escalas. Luego, de lo anterior obtenemos

$$\mathbf{f}_M^a|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu^a \, d\Omega_\mu. \tag{14.46}$$

Recordando (14.33), esta expresión toma la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_M^a|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} \rho_\mu (\ddot{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{y} + \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)\, d\Omega_\mu = \\ \rho_M|_{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} + \ddot{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}}\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\rho_\mu \mathbf{y}\, d\Omega_\mu + \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\rho_\mu \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu.\end{aligned} \tag{14.47}$$

En otras palabras, de acuerdo a la teoría multiescala propuesta, la fuerza activa en el punto $\mathbf{x}$ de la macroescala está dada por la contribución del término clásico de la mecánica, $\rho_M|_{\mathbf{x}}\ddot{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}}$, juntamente con otros dos términos no clásicos asociados con las aceleraciones $\ddot{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}}$ y $\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu$.

- **Equilibrio en la microescala y multiplicadores de Lagrange.** Para deducir las ecuaciones que gobiernan el equilibrio en la microescala procedemos a anular todas las variaciones excepto $\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu)$ en la ecuación variacional (14.36) que caracteriza el PPVM. Obtenemos así

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu}\mathbf{f}_\mu^p \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu}\rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu \\ &+ \lambda \cdot \int_{\Omega_\mu}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu - \Lambda \cdot \int_{\partial\Omega_\mu}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu = 0 \quad \forall \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu),\end{aligned} \tag{14.48}$$

y haciendo uso de la propiedad $\int_{\Omega_\mu}\nabla_{\mathbf{y}}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = \int_{\partial\Omega_\mu}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu$ (ver (14.17) y (14.18), se tiene

$$\int_{\Omega_\mu} (\mathbf{P}_\mu - \Lambda) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu^p \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu + \int_{\Omega_\mu} \lambda \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = 0 \quad \forall \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu). \quad (14.49)$$

– **Caracterización del Multiplicador de Lagrange λ.** Como $\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu)$, podemos adoptar $\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu$ como una constante arbitraria en la ecuación variacional (14.49), y recordando (14.43), obtenemos

$$\lambda = \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu^p - \rho_\mu \ddot{\mathbf{u}}_\mu) \, d\Omega_\mu = \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}}. \quad (14.50)$$

En otras palabras, la fuerza *reactiva*, asociada por dualidad con la restricción cinemática dada por la admisibilidad cinemática $\int_{\Omega_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu d\Omega_\mu = \mathbf{0}$, está dada por la fuerza externa en la macroescala $\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}}$.

– **Equilibrio en la microescala.** Substituyendo el resultado anterior en la (14.49) obtenemos la ecuación variacional que caracteriza el problema del equilibrio en la microescala

$$\int_{\Omega_\mu} (\mathbf{P}_\mu - \Lambda) \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu - \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = 0 \quad \forall \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu). \quad (14.51)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a la ecuación variacional anterior se deducen fácilmente usando la integración por partes, y corresponden a

$$-\operatorname{div}(\mathbf{P}_\mu - \Lambda) = \mathbf{f}_\mu - \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \quad \text{en } \Omega_\mu, \quad (14.52)$$

$$\mathbf{P}_\mu \mathbf{n}_\mu = \Lambda \mathbf{n}_\mu \quad \text{en } \partial\Omega_\mu. \quad (14.53)$$

Como Λ es un tensor constante, y es más, mostraremos en seguida (ver (14.63) abajo) que el multiplicador de Lagrange Λ es tal que $\Lambda = \mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}}$, tenemos finalmente

$$-\operatorname{div} \mathbf{P}_\mu = \mathbf{f}_\mu - \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \quad \text{en } \Omega_\mu, \quad (14.54)$$

$$\mathbf{P}_\mu \mathbf{n}_\mu = \mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} \mathbf{n}_\mu \quad \text{en } \partial\Omega_\mu. \quad (14.55)$$

Estas ecuaciones, conjuntamente con las restricciones cinemáticas asociadas a la admisibilidad cinemática, dadas por (14.37) y (14.38), y con la ecuación constitutiva para las tensiones en la microescala representadas por el campo tensorial de Piola-Kirchhoff de primera especie, y dada por $\mathbf{P}_\mu = \mathscr{P}_\mu(\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{u}_\mu)$, definen el conjunto de ecuaciones que caracteriza el equilibrio en la microescala en su forma fuerte. Podemos observar que estas ecuaciones de equilibrio corresponden a un problema con condiciones de contorno de tipo Neumann, donde las tracciones en el contorno $\partial\Omega_\mu$ están dadas por $\Lambda \mathbf{n}_\mu =$

$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}}\mathbf{n}_\mu$, y con restricciones subsidiarias dadas por las restricciones de admisibilidad cinemática.

– **Caracterización del Multiplicador de Lagrange Λ.** Para realizar esta caracterización, veamos primero la siguiente identidad

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \, d\Omega_\mu = \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \, d\Omega_\mu = \\ - \int_{\Omega_\mu} \operatorname{div} \mathbf{P}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\Omega_\mu + \int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \mathbf{n}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\partial\Omega_\mu. \quad (14.56)$$

Con esta identidad, y haciendo uso de la ecuación de equilibrio (14.52) y (14.53) (sabiendo que Λ es constante), obtenemos por substitución

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \, d\Omega_\mu = \int_{\Omega_\mu} (\mathbf{f}_\mu - \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}}) \otimes \mathbf{y} \, d\Omega_\mu + \int_{\partial\Omega_\mu} \Lambda \mathbf{n}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\partial\Omega_\mu. \quad (14.57)$$

Luego, como $\mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}}$ es un vector constante y como hemos escogido el centro de coordenadas en la microescala coincidente con el centro geométrico de Ω_μ (ver (14.4)), resulta

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{y} \, d\Omega_\mu = \mathbf{f}_M|_{\mathbf{x}} \otimes \int_{\Omega_\mu} \mathbf{y} \, d\Omega_\mu = \mathbf{O}. \quad (14.58)$$

Substituyendo este resultado en la expresión anterior y reordenando términos obtenemos

$$\int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\Omega_\mu = \int_{\partial\Omega_\mu} \Lambda \mathbf{n}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\partial\Omega_\mu. \quad (14.59)$$

De la misma manera, Λ es un tensor constante y recordando que

$$\int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{n}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\partial\Omega_\mu = \left(\int_{\partial\Omega_\mu} \mathbf{y} \otimes \mathbf{n}_\mu \, d\partial\Omega_\mu \right)^T = \left(\int_{\Omega_\mu} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{y} \, d\Omega_\mu \right)^T = \\ \int_{\Omega_\mu} \mathbf{I} \, d\Omega_\mu = |\Omega_\mu| \mathbf{I}, \quad (14.60)$$

obtenemos

$$\int_{\partial\Omega_\mu} \Lambda \mathbf{n}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\partial\Omega_\mu = |\Omega_\mu| \Lambda. \quad (14.61)$$

Substituyendo este resultado en la (14.59) tenemos

$$\frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{P}_\mu \, d\Omega_\mu - \frac{1}{|\Omega_\mu|} \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}_\mu \otimes \mathbf{y} \, d\Omega_\mu = \Lambda. \quad (14.62)$$

Este último resultado conjuntamente con la expresión de la homogeneización del tensor de tensiones en la macroescala dada por (14.40) permite finalmente obtener la caracteriación del multiplicador de Lagrange Λ, que resulta

$$\Lambda = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}(\mathbf{P}_\mu - \mathbf{f}_\mu \otimes \mathbf{y})\, d\Omega_\mu = \mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{14.63}$$

De esta manera, la *reacción* asociada por dualidad con la restricción cinemática correspondiente a la condición de admisibilidad cinemática dada por $\int_{\Omega_\mu}\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu\, d\Omega_\mu = \int_{\partial\Omega_\mu}\tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu\, d\partial\Omega_\mu = \mathbf{O}$ es el estado de tensiones en el punto $\mathbf{x}$ de la macroescala $\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}}$.

– **Homogeneización de la tensiones en la macroescala en función de integrales de contorno.** Una consecuencia de la derivación de las expresiones anteriores consiste en la obtención de una nueva fórmula para la homogeneización de la tensiones en la macroescala. En efecto, de (14.59) y de la ecuación de equilibrio en el contorno dada por (14.55) obtenemos

$$\int_{\Omega_\mu}\mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu}\mathbf{f}_\mu \otimes \mathbf{y}\, d\Omega_\mu = \int_{\partial\Omega_\mu}\mathbf{P}_\mu\mathbf{n}_\mu \otimes \mathbf{y}\, d\partial\Omega_\mu, \tag{14.64}$$

que conjuntamente con la expresión de la homogeneización de las tensiones en la macroescala dada por (14.40) permite una nueva definición para la homogeneización de las tensiones en la macroescala como sigue

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\partial\Omega_\mu}\mathbf{P}_\mu\mathbf{n}_\mu \otimes \mathbf{y}\, d\partial\Omega_\mu. \tag{14.65}$$

Es interesante resaltar que esta expresión es general en el sentido de que es independiente de llevar en cuenta, o no, las fuerzas que actúan en la microescala (pasivas y/o activas). De hecho, estas fuerzas están implícitamente incorporadas en la caracterización del estado de tensiones en la microescala, $\mathbf{P}_\mu$, que equilibra estas cargas. En otras palabras, o bien usamos la expresión (14.40) para obtener la homogeneización de las tensiones en la macroescala, para lo cual se deben llevar en cuenta de forma explícita las fuerzas $\mathbf{f}_\mu$ o, en su lugar, usamos la expresión (14.65) que, como vimos, es independiente (de forma explícita) de estas fuerzas. Desde el punto de vista teórico ambas expresiones son idénticas, sin embargo esto no ocurre desde el punto de vista computacional donde ambas expresiones tienen sus ventajas y desventajas. Como es bien conocido, los campos que intervienen en ambas expresiones son mejor aproximados en el interior del dominio que en el contorno del mismo. Luego y desde este punto de vista, la expresión (14.40) tiene su ventaja sobre la expresión (14.65).

Ejercicio 14.1. Redefinir el Principio de la Potencia Virtual Multiescala dado en (14.35) en el espacio $\mathrm{Kin}^*_{u_\mu}$ (definido en (14.24)), esto es poniendo en evidencia los desplazamientos $\mathbf{u}_\mu$. Extienda este principio vía multiplicadores de Lagrange relajando ahora las restricciones subsidiarias existentes en la definición de este espacio (que corresponden a la homogeneización en desplazamientos y deformaciones dadas en (14.13) y (14.16)), y proceda obtener las homogeneizaciones de tensiones, fuerzas, equilibrio en la microescala y caracterización de estos nuevos multipli-

cadores de Lagrange. Compare los resultados con los obtenidos en esta sección y comente el papel de los multiplicadores de Lagrange en ambas formulaciones.

14.2.5 Operadores Tangentes

En esta sección vamos a calcular el operador tangente asociado con la expresión de la homogeneización de las tensiones en el nivel de la macroescala, la cual viene dada por la expresión (14.40). Esto es necesario ya que el problema del equilibrio en este nivel requiere conocer este operador tangente que proporciona cual es el incremento de tensiones en la macroescala para un incremento en la deformación en la misma escala.

En particular y para simplificar nuestra presentación vamos a limitarnos al caso estático donde los efectos de las fuerzas de inercia no serán llevados en cuenta. Con esta limitación, la homogeneización de las tensiones (14.40) toma la forma

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} (\mathbf{P}_\mu - \mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y}) d\Omega_\mu. \tag{14.66}$$

Recordemos también la ecuación de equilibrio en la microescala dada por la ecuación variacional (14.35) para $\hat{\mathbf{u}}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ y $\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}} = \mathbf{O}$. Este problema está bien definido una vez adoptado el comportamiento del material en la microescala. Es decir, una vez que sea caracterizada la ecuación constitutiva del material en Ω_μ. En particular, vamos a suponer que la respuesta del material dependa de la historia del proceso pero que no esté asociada a ningún fenómeno de fractura, falla o localización de deformaciones. Con esto, la ecuación constitutiva que caracteriza la tensión en la microescala en el instante t en función de la historia de la deformación hasta ese instante, representada aquí por $(\mathbf{F}_\mu)^t = \mathbf{I} + (\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{u}_\mu)^t$, la podemos caracterizar a través del funcional constitutivo

$$\mathbf{P}_\mu = \mathfrak{F}_\mu((\mathbf{F}_\mu)^t) = \mathfrak{F}_\mu((\mathbf{I} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^t). \tag{14.67}$$

Con esta definición en manos, el problema de equilibrio en la microescala consiste en determinar para cada instante t el campo $\tilde{\mathbf{u}}^t_\mu \in \mathrm{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$ tal que

$$\int_{\Omega_\mu} \mathfrak{F}_\mu((\mathbf{I} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^t) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu - \int_{\Omega_\mu} \mathbf{f}^p_\mu(\mathbf{y},t) \cdot \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = 0$$
$$\forall \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}, \tag{14.68}$$

que nos muestra claramente la dependencia de la historia de las fluctuaciones con la historia de las deformaciones de la macroescala. Esta relación no lineal, definida implícitamente por (14.68), entre la historia de las fluctuaciones del campo de desplazamiento $\tilde{\mathbf{u}}^t_\mu$ (y por lo tanto su gradiente) y la historia de la deformación en la macroescala, $(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t$, la podemos representar por el funcional no lineal

$$(\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^t = \mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t). \tag{14.69}$$

Substituyendo (14.69) en (14.67), y haciendo abuso de notación, obtenemos

$$\mathbf{P}_\mu = \mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t) = \mathfrak{F}_\mu((\mathbf{I}+\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}+\mathfrak{C}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}))^t). \tag{14.70}$$

En otras palabras, el comportamiento micro depende explícitamente de la historia de la deformación de la macroescala e implícitamente de la misma deformación a través de las fluctuaciones. Además, substituyendo este resultado en la expresión de la homogeneización de las tensiones (14.66) obtenemos finalmente

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}} = \mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}(\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{I}+\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}+\mathfrak{C}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}))^t) - \mathbf{f}^p_\mu \otimes \mathbf{y})d\Omega_\mu. \tag{14.71}$$

Tenemos así todos los elementos para caracterizar el operador tangente constitutivo en la macroescala que estamos buscando. Tal operador corresponderá a la *derivada direccional* del operador $\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}$ calculada en el *punto* $(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t$ según la *dirección* $\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$, esto es

$$\begin{aligned} D\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} &= \frac{d}{d\varepsilon}\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t + \varepsilon\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})\Big|_{\varepsilon=0} = \\ &\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)[\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} + D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}]d\Omega_\mu = \\ &\left[\frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}\left(D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t) + D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\right)d\Omega_\mu\right]\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \tag{14.72}$$

donde, para un punto genérico en la microescala, $D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$ representa la derivada direccional del operador $\mathfrak{F}_\mu$ evaluada en el punto $(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t$ según la dirección $\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$, y donde $D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$ representa la derivada direccionl del operador $\mathfrak{C}$ en el punto $(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t$ según la dirección $\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$, es decir

$$\nabla_{\mathbf{y}}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu = D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}. \tag{14.73}$$

Aquí es importante observar (y esta observación es válida para todo modelo multiescala construido dentro de la presente formulación) que la inspección de la expresión (14.72) nos muestra que el operador tangente constitutivo en la macroescala está constituido por la contribución de dos términos. El primero correspondiente a la homogeneización de la derivada direccional de la parte explícita del funcional constitutivo en la microescala, y que es equivalente a suponer que las fluctuaciones son nulas. Es decir, correspondiente a adoptar el modelo cinemático de Taylor. El segundo término está asociado con la contribución de las fluctuaciones de los desplazamientos. Para poner en evidencia estas contribuciones escribimos de la siguiente forma la expresión de la ecuación constitutiva en la macroescala

$$D\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t) = D^{Taylor}\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t) + \widetilde{D}\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t), \tag{14.74}$$

donde

$$D^{Taylor}\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)d\Omega_\mu, \tag{14.75}$$

y

$$\widetilde{D}\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t) = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu} D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)d\Omega_\mu. \tag{14.76}$$

Finalmente, note que todos estos operadores tangentes son campos tensoriales de cuarto orden. En particular, la contribución $D^{Taylor}\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}$ depende exclusivamente del comportamiento del material en la microescala y, por lo tanto, sólo podrá ser caracterizado cuando el material sea escogido. De hecho, $D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)$ es el campo tensorial de cuarto orden correspondiente al operador constitutivo tangente clásico del material en la microescala. Ahora, vamos a mostrar como caracterizar más explícitamente el operador tangente $D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)$. Para ello, vea que, de su definición, este operador tensorial de cuarto orden representa la relación tangente entre $(\nabla_{\mathbf{y}}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^t$ y $(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t$ dada por la expresión (14.69), y formalizada por la expresión (14.73). Para caracterizar este operador obtenemos la linealización de la ecuación variacional (no lineal) que define el equilibrio en la microescala y, por lo tanto, la relación (14.69). Este proceso de linealización consiste en determinar para cada instante t el campo $\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \text{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$ tal que

$$\int_{\Omega_\mu} D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\nabla_{\mathbf{y}}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = \\ -\int_{\Omega_\mu} D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu \quad \forall\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \text{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \tag{14.77}$$

Para $\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}$ expresado en coordenadas cartesianas, es decir $\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}} = [\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}]_{ij}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j)$, podemos introducir el campo vectorial $\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{ij} \in \text{Kin}_{\tilde{u}_\mu}$ definido por el siguiente problema variacional

$$\int_{\Omega_\mu} D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)\nabla_{\mathbf{y}}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{ij} \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu = \\ -\int_{\Omega_\mu} D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \cdot \nabla_{\mathbf{y}}\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \, d\Omega_\mu \quad \forall\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \text{Var}_{\tilde{u}_\mu}, \tag{14.78}$$

de donde

$$\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu = [\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}]_{ij}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{ij}, \tag{14.79}$$

obteniendo así

$$\nabla_{\mathbf{y}}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu = [\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}]_{ij}\nabla_{\mathbf{y}}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{ij}. \tag{14.80}$$

De esta forma, recordando que estamos trabajando con componentes cartesianas, la expresión anterior se reescribe como

$$\nabla_{\mathbf{y}}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu = [\nabla_{\mathbf{y}}\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu]_{pq}(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q) = \frac{\partial(\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu)_p}{\partial x_q}(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q) = [\delta\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}}]_{ij}\frac{\partial(\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{ij})_p}{\partial x_q}(\mathbf{e}_p\otimes\mathbf{e}_q). \quad (14.81)$$

Comparando (14.73) con esta última expresión obtenemos finalmente la caracterización del operador tangente $D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)$ en función de sus componentes cartesianas

$$[D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)]_{ijkl} = \frac{\partial(\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{kl})_i}{\partial x_j}. \quad (14.82)$$

Este resultado junto con el conocimiento del operador constitutivo tangente clásico del material en la microescala nos permite caracterizar las componentes cartesianas del operador constitutivo tangente en la macroescala asociado con la contribución de las fluctuaciones (14.76), cuyas componentes cartesianas resultan

$$[\widetilde{D}\mathfrak{P}_M|_{\mathbf{x}}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)]_{ijkl} = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}[D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)]_{ijpq}[D\mathfrak{C}((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)]_{pqkl}d\Omega_\mu = \frac{1}{|\Omega_\mu|}\int_{\Omega_\mu}[D\mathfrak{F}_\mu((\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}})^t)]_{ijpq}\frac{\partial(\delta\tilde{\mathbf{u}}_\mu^{kl})_p}{\partial x_q}d\Omega_\mu. \quad (14.83)$$

14.3 Mecánica de Sólidos Incompresibles

Como mencionado en el comienzo de este capítulo, en esta sección estamos interesado en las implicaciones del PPVM cuando, en el modelo de la macroescala, queremos capturar un comportamiento constitutivo de tipo incompresible mentras que, en la microescala, el comportamiento constitutivo puede ser, o no, incompresible. De hecho, como será mostrado en las secciones siguientes, el PPVM proporciona todos los elementos para estudiar de manera clara y concisa este aspecto indispensable en el modelado multiescala de materiales biológicos. En particular en la próxima sección presentamos el caso de acoplamiento entre una macroescala incompresible y una microescala integrada por materiales cuyo comportamiento es compresible (excluyendo localización, daño, y fenómenos similares), todo descripto en la configuración actual (o espacial). Luego, presentamos el modelo donde en ambas escalas se consideran medios incompresibles, con la descripción realizada en la configuración actual. Posteriormente, presentamos estos mismos casos pero, ahora, con las descripciones dadas en la configuración de referencia (o material). Finalmente, para simplificar nuestra presentación, vamos a suponer que la cinemática en

ambas escalas es la misma y está dada por la cinemática clásica utilizada en régimen de grandes deformaciones.

14.3.1 Principio de la Potencia Virtual Monoescala

Antes de entrar en el tema veamos primero el problema de la macroescala donde su comportamiento material es conocido (formulación clásica de una única escala). Para este problema, designamos con Ω_M^e la configuración espacial del cuerpo, cuyas coordenadas son $\mathbf{x}_e$ (índice e denota descripción espacial). También tenemos la configuración material Ω_M^m con coordenadas $\mathbf{x}_m$ (índice m denota descripción material). El campo de desplazamientos entre ambas configuraciones será denotado $\mathbf{u}_M$ de forma indistinta para su descripción espacial y material, desde que no haya confusión. En la primera parte donde trabajaremos con la configuración espacial $\mathbf{u}_M$ será un campo espacial, y luego al trabajar con la configuración material $\mathbf{u}_M$ será la descripción material del campo de desplazamientos.

Para un medio incompresible, recordemos que el tensor $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}_m}\mathbf{u}_M$ (aquí $\mathbf{u}_M$ es la descripción material del campo de desplazamientos) debe satisfacer

$$\det\mathbf{F} = \det(\mathbf{I} + \nabla_{\mathbf{x}_m}\mathbf{u}_M) = 1. \tag{14.84}$$

Esto es equivalente a exigir que

$$(\det\mathbf{F})_e^{-1} = (\det\mathbf{F}^{-1})_e = \det\mathbf{F}_e^{-1} = 1 = \det(\mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}_e}\mathbf{u}_M) = 1, \tag{14.85}$$

donde ahora $\mathbf{u}_M$ es la descripción espacial del campo de desplazamientos. Luego, el problema del equilibrio, sin relajar la restricción cinemática asociada a la incompresibilidad, está dado por el problema variacional que consiste en determinar el campo espacial $\mathbf{u}_M \in \mathrm{Kin}_{u_M}$ tal que

$$\int_{\Omega_M^e} \sigma_M^D \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_e}\hat{\mathbf{v}}_M)^s \, d\Omega_M^e = \langle f, \hat{\mathbf{v}}_M \rangle \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_M \in \mathrm{Var}_{u_M}, \tag{14.86}$$

donde

$$\mathrm{Kin}_{u_M} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_M^e);\, (\det\mathbf{F}^{-1})_e = 1 \text{ en } \Omega_M^e, \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \partial\Omega_{Mu}^e\}, \tag{14.87}$$

$$\mathrm{Var}_{u_M} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega_M^e);\, \mathrm{div}_{\mathbf{x}_e}\,\mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega_M^e, \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega_{Mu}^e\}, \tag{14.88}$$

además, $\nabla_{\mathbf{x}_e}(\cdot)$ representa el operador gradiente con respecto a las coordenadas espaciales $\mathbf{x}_e$, $\mathrm{div}_{\mathbf{x}_e}$ es el operador de divergencia sobre estas coordenadas, y $(\mathbf{A})^D$ indica la componente desviadora del tensor de segundo orden $\mathbf{A}$. Observe el paralelo entre esta formulación y lo desarrollado para el caso de mecánica de fluidos en el Capítulo 11. De hecho, la potencia interna está asociada al estado de tensiones σ_M caracterizado por su componente desviadora, σ_M^D, ya que su variable dual es el campo $\nabla_{\mathbf{x}_e}\hat{\mathbf{v}}_M$ que posee trazo nulo. En otras palabras, la presión (que existe en el

cuerpo sólido) no la podemos calcular debido a que la misma realiza potencia nula con las acciones virtuales que son de divergencia nula.

Observación 14.1 *Observe que* Kin_{u_M} *definido en* (14.87) *es una variedad no lineal, luego, en este caso* Var_{u_M} *no se obtiene como diferencia de elementos de* Kin_{u_M}*, sino que es el espacio tangente a* Kin_{u_M}*. Por eso es que, si bien la restricción es que los desplazamientos satisfagan* (14.85)*, las acciones de movimiento tienen que satisfacer la restricción tangente, que implica en acciones de movimiento con divergencia nula.*

Ahora procedemos a relajar la restricción de incompresibilidad via el multiplicador de Lagrange correspondiente. Entonces, el problema del equilibrio consiste en determinar $(\mathbf{u}_M, \lambda_M) \in \mathrm{Kin}^*_{u_M} \times L^2(\Omega^e_M)$ tal que

$$\int_{\Omega^e_M} \left(\boldsymbol{\sigma}^D_M \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{v}}_M)^s + \lambda_M \operatorname{div}_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{v}}_M + \hat{\lambda}_M (1 - \det(\mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}_e} \mathbf{u}_M))\right) d\Omega^e_M = \langle f, \hat{\mathbf{v}}_M \rangle \quad \forall (\hat{\mathbf{v}}_M, \hat{\lambda}_M) \in \mathrm{Var}^*_{u_M} \times L^2(\Omega^e_M), \quad (14.89)$$

donde

$$\mathrm{Kin}^*_{u_M} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega^e_M); \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \partial\Omega^e_{Mu}\}, \quad (14.90)$$

$$\mathrm{Var}^*_{u_M} = \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega^e_M); \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega^e_{Mu}\}. \quad (14.91)$$

Es importante observar que el campo de tensión $\boldsymbol{\sigma}^D_M$ es un campo simétrico y desviador, por lo que siempre debemos tener en cuenta que el término de potencia interna es

$$\int_{\Omega^e_M} \boldsymbol{\sigma}^D_M \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{v}}_M)^s \, d\Omega^e_M = \int_{\Omega^e_M} \boldsymbol{\sigma}^D_M \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{v}}_M)^D \, d\Omega^e_M = \int_{\Omega^e_M} \boldsymbol{\sigma}^D_M \cdot \nabla_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{v}}_M \, d\Omega^e_M, \quad (14.92)$$

independiente de relajar o no la restricción cinemática de incompresibilidad. Por otro lado, λ_M es la reacción asociada a la restricción cinemática en la macroescala, y que no está dada por comportamiento constitutivo sino por equilibrio (en este caso equilibrio de la macroescala). Mas aún, en la variable $\mathbf{u}_M$ la solución del problema variacional relajado, (14.89), es la misma que la que obtendríamos con la ecuación correspondiente al problema sin relajar (14.86). Es decir $\mathbf{u}_M$ es tal que $\det(\mathbf{I} - \nabla_{\mathbf{x}_e} \mathbf{u}_M) = 1$ y $\boldsymbol{\sigma}^D_M$ es el estado de tensiones que obtenemos por medio de la ecuación constitutiva adoptada para representar la parte desviadora del medio incompresible.

Estos dos puntos importantes son los que debemos resaltar aquí. Por un lado, la potencia interna está dada siempre por (14.92), y dado que la solución siempre es un campo cuyas acciones de movimiento poseen divergencia nula, tenemos que desde el punto de vista de la multiescala, para ambos casos (formulación con o sin relajamiento) las acciones de deformación estarán dadas por un gradiente desviador,

es decir $((\nabla_{\mathbf{x}_e}\mathbf{v}_M)^s)^D|_{\mathbf{x}_e} = \mathbf{G}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e}$. Por otro lado, la potencia asociada a la restricción de vínculo (incompresibilidad) no la entendemos ni como una potencia interna ni como una potencia externa. Ella es una potencia asociada a la **liberación** de una restricción. Es decir, la liberación de la restriccón permite caracterizar una fuerza generalizada, que es la variable dual, la cual se precisa aplicar sobre el cuerpo para satisfacer la restricción.

En las secciones desarrolladas a continuación nos centraremos en formular el problema multiescala de determinar el comportamiento constitutivo del material, es decir, determinar el tensor σ_M^D. Por simplicidad, desconsideraremos el efecto de las fuerzas externas en el modelo multiescala.

14.3.2 Cinemática Multiescala

Consideremos en primer lugar el caso en el cual la microescala está compuesta por materiales compresibles, pero en la macroescala queremos modelar un medio continuo incompresible.

En la sección anterior hemos establecido el PPV para la macroescala, y en el hemos definido la cinemática que rige el problema. Es decir, hemos caracterizado los campos de desplazamientos $\mathbf{u}_M$ y el espacio $\mathscr{V}_M$ donde se encuentran, así como el conjunto de candidatos a solución Kin_{u_M} (ver (14.87)) y las acciones de movimiento admisibles en el espacio Var_{u_M} (ver (14.88)). Hemos también escrito también el PPV de dos formas, sin relajar la condición de incompresibilidad (ver (14.86)) y relajando la restricción mediante un multiplicador de Lagrange (ver (14.89)).

El operador tasa de deformación ha quedado definido como siendo $\mathscr{D}_M(\cdot) = (\nabla_{\mathbf{x}_e}(\cdot))^s$, luego $\mathscr{W}_M = \mathbf{L}^2(\Omega_M^e)$. Observe ahora que $\mathscr{D}_M$ actúa sobre el espacio Var_{u_M} que son acciones de movimiento con divergencia nula. Luego, las tasas de deformación compatibles son tales que $D_M = (\nabla_{\mathbf{x}_e}(\cdot))^{sD} = \mathbf{G}_M^{sD}$, es decir, tensores de segundo orden simétricos y con trazo nulo (o sea, tensores simétricos desviadores). De este modo, las acciones de movimiento y las tasas de deformación en un punto $\mathbf{x}_e \in \Omega_M^e$ se encuentran en los siguientes espacios

$$\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M} = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3; \mathbf{w} = \mathbf{u}|_{\mathbf{x}_e}, \mathbf{u} \in \mathscr{V}_M\}, \tag{14.93}$$

$$\mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} = \{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}; \mathbf{H} = \mathbf{H}^T, \text{tr}\mathbf{H} = 0\}, \tag{14.94}$$

con

$$\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} = \{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3\times 3}; \mathbf{H} = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_e}, \mathbf{G}_M \in \mathscr{W}_M\}. \tag{14.95}$$

Para la microescala, cuyo dominio espacial es Ω_μ^e, con coordenadar $\mathbf{y}_e$, la cinemática es clásica, por lo que los campos de desplazamientos $\mathbf{u}_\mu$ (en su descripción espacial) se encuentran en el espacio $\mathscr{V}_{u_\mu} = \mathbf{H}^1(\Omega_\mu^e)$, y el operador tasa de deformación es $\mathscr{D}_\mu(\cdot) = (\nabla_{\mathbf{y}_e}(\cdot))^s = \mathbf{G}_\mu \in \mathscr{W}_\mu = \mathbf{L}^2(\Omega_\mu^e)$.

Los operadores de inserción en este caso los definimos como

$$\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}_e}) = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}_e} \qquad \forall \mathbf{y}_e \in \Omega_\mu^e, \tag{14.96}$$

$$\mathscr{J}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_e}) = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_e}\mathbf{y}_e \qquad \forall \mathbf{y}_e \in \Omega_\mu^e, \tag{14.97}$$

donde consideramos que el centro geométrido de Ω_μ^e coincide con el centro de coordenadas en la microescala. Con esto, obtenemos la siguiente representación para las acciones de movimiento y las tasas de deformación en la microescala

$$\mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}_e} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_e}\mathbf{y}_e + \tilde{\mathbf{u}}_\mu \qquad \mathbf{y}_e \in \Omega_\mu^e, \tag{14.98}$$

$$\mathbf{G}_\mu = (\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_e})^s + (\nabla_{\mathbf{x}_e}\tilde{\mathbf{u}}_\mu)^s \qquad \mathbf{y}_e \in \Omega_\mu^e. \tag{14.99}$$

Introducimos ahora los operadores de homogeneización cinemáticos

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{V}}(\mathbf{u}_\mu) = \frac{1}{|\Omega_\mu^e|}\int_{\Omega_\mu^e} \mathbf{u}_\mu \, d\Omega_\mu^e, \tag{14.100}$$

$$\mathscr{H}_\mu^{\mathscr{W}}(\mathbf{G}_\mu) = \frac{1}{|\Omega_\mu^e|}\int_{\Omega_\mu^e} \mathbf{G}_\mu \, d\Omega_\mu^e. \tag{14.101}$$

Así, es directo verificar que las fluctuaciones deben satisfacer las restricciones cinemáticas

$$\int_{\Omega_\mu^e} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu^e = \mathbf{0}, \tag{14.102}$$

$$\int_{\partial\Omega_\mu^e} (\tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu^e)^s \, d\partial\Omega_\mu^e = \mathbf{O}. \tag{14.103}$$

Con esto se tiene

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{u_\mu} = \{&\mathbf{u}_\mu = \mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}_e} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_e}\mathbf{y}_e + \tilde{\mathbf{u}}_\mu; \\ &\mathbf{u}_M|_{\mathbf{x}_e} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{V}_M}, \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_e} \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}\},\end{aligned} \tag{14.104}$$

donde

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu} = \Bigg\{&\tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega_\mu^e); \int_{\Omega_\mu^e} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega_\mu^e = \mathbf{0}, \\ &\int_{\partial\Omega_\mu^e} (\tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}_\mu^e)^s \, d\partial\Omega_\mu^e = \mathbf{O}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{14.105}$$

Observación 14.2 *En relación a la Observación 14.1, es muy importante hacer notar aquí que las expansiones* (14.93) *y* (14.94)*, así como las restricciones* (14.102) *y* (14.103)*, y el espacio de variaciones admisibles* Var_{u_μ} *definido en* (14.104) *definen las características de las acciones de movimiento y de las acciones (tasas) de deformación. O sea, la teoría multiescala que hemos desarrollado tiene por objetivo dar consistencia a la transferencia entre escalas, para lo cual es preciso especificar correctamente los espacios en los cuales se deben encontrar tanto las acciones de*

movimiento como las acciones de tasas de deformación, ya que, por el concepto de dualidad, son estas cantidades las que definen la forma en la que se realiza potencia. Recuerde que hemos postulado que tanto la potencia como los operadores de homogeneización y de inserción son operadores lineales.

Observación 14.3 *En el caso de trabajar con una microescala en la cual se considera un medio incompresible, todos los elementos de esta sección se mantienen invariantes a menos del espacio* $\mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}$ *definido en* (14.105)*, el cual, para la situación aquí considerada, resulta*

$$\mathrm{Var}^{+}_{\tilde{u}_\mu} = \Big\{ \tilde{\mathbf{u}}_\mu \in \mathbf{H}^1(\Omega^e_\mu);\, \mathrm{div}_{\mathbf{y}_e}\, \tilde{\mathbf{u}}_\mu = 0,\, \int_{\Omega^e_\mu} \tilde{\mathbf{u}}_\mu \, d\Omega^e_\mu = \mathbf{0}, \int_{\partial\Omega^e_\mu} (\tilde{\mathbf{u}}_\mu \otimes \mathbf{n}^e_\mu)^s \, d\partial\Omega^e_\mu = \mathbf{O} \Big\}. \quad (14.106)$$

14.3.3 Principio de la Potencia Virtual Multiescala

Hemos visto en la al inicio de esta sección que la potencia interna (recuerde que no consideraremos las fuerzas externas en el análisis multiescala) para este problema es

$$P^i_M((\nabla_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{u}}_M)^{sD}) = \int_{\Omega^e_M} \sigma^D_M \cdot (\nabla_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{v}}_M)^{sD} d\Omega^e_M, \quad (14.107)$$

de donde verificaremos en seguida que

$$P^i_{M,\mathbf{x}_e} = \sigma^D_M|_{\mathbf{x}_e} \bullet (\nabla_{\mathbf{x}_e} \hat{\mathbf{u}}_M)^{sD}|_{\mathbf{x}_e} = \sigma^D_M|_{\mathbf{x}_e} \bullet \mathbf{G}^{sD}_M|_{\mathbf{x}_e} \quad \mathbf{G}^{sD}_M|_{\mathbf{x}_e} \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \quad (14.108)$$

y en forma explícita, anticipando la caracterización de la operación $(\cdot) \bullet (\cdot)$, tenemos

$$P^i_{M,\mathbf{x}_e} = |\Omega^e_M| \sigma^D_M|_{\mathbf{x}_e} \cdot \mathbf{G}^{sD}_M|_{\mathbf{x}_e} \quad \mathbf{G}^{sD}_M|_{\mathbf{x}_e} \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}. \quad (14.109)$$

La potencia interna en la microescala se escribe como sigue

$$P^i_\mu((\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\mathbf{u}}_\mu)^s) = \int_{\Omega^e_\mu} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\mathbf{u}}_\mu)^s d\Omega^e_\mu \quad \hat{\mathbf{u}}_\mu \in \mathrm{Var}_{u_\mu}, \quad (14.110)$$

o de forma extendida

$$P^i_\mu = \int_{\Omega^e_\mu} \sigma_\mu \cdot (\hat{\mathbf{G}}^{sD}_M|_{\mathbf{x}_e} + (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s) d\Omega^e_\mu = \int_{\Omega^e_\mu} \sigma_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}^{sD}_M|_{\mathbf{x}_e} d\Omega^e_\mu + \int_{\Omega^e_\mu} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s d\Omega^e_\mu$$
$$\hat{\mathbf{G}}^{sD}_M|_{\mathbf{x}_e} \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (14.111)$$

Enunciemos ahora el PPVM para este problema. Decimos entonces que $\sigma_M^D|_{\mathbf{x}} \in (\mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})'$ y $\sigma_\mu \in \mathscr{W}'_\mu$ satisfacen el PPVM si y sólo si se verifica la siguiente ecuación variacional

$$\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e} \bullet \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} = \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} \, d\Omega_\mu^e + \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s d\Omega_\mu^e$$
$$\forall (\hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu) \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \times \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (14.112)$$

o equivalentemente

$$\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e} \cdot \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} = \frac{1}{|\Omega_\mu^e|} \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} \, d\Omega_\mu^e + \frac{1}{|\Omega_\mu^e|} \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s d\Omega_\mu^e$$
$$\forall (\hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu) \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \times \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (14.113)$$

De esta forma, como primera consecuencia del PPVM, tomando $\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu = \mathbf{0}$ en (14.113), obtenemos la fórmula de homogeneización de las tensiones

$$\left(\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e} - \frac{1}{|\Omega_\mu^e|} \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu \, d\Omega_\mu^e \right) \cdot \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} = 0 \quad \forall \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}, \quad (14.114)$$

es decir

$$\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e} - \frac{1}{|\Omega_\mu^e|} \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu \, d\Omega_\mu^e \in (\mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})^\perp \in (\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M})', \quad (14.115)$$

y de la definición del espacio $\mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$ dada en (14.94), concluimos que $\sigma_M^D|_{\mathbf{x}}$ es, de hecho, un tensor simétrico y con trazo nulo, es decir desviador, y está caracterizado como

$$\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e} = \frac{1}{|\Omega_\mu^e|} \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu^D \, d\Omega_\mu^e, \quad (14.116)$$

es decir, resulta ser la homogeneización de la parte desviadora del estado de tensión en la microescala.

Luego, tomando $\hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} = \mathbf{O}$ en (14.113), tenemos el problema de equilibrio en la microescala

$$\int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu \cdot (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s d\Omega_\mu^e = 0 \quad \forall \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}. \quad (14.117)$$

Observación 14.4 *Para el caso de un medio incompresible en la microescala (ver Observación 14.3), el PPVM dado por la* (14.113) *resulta ahora*

$$\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e} \cdot \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} = \frac{1}{|\Omega_\mu^e|} \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu^D \cdot \hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} \, d\Omega_\mu^e + \frac{1}{|\Omega_\mu^e|} \int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu^D \cdot (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)^s d\Omega_\mu^e$$
$$\forall (\hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu) \in \mathbb{S}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} \times \mathrm{Var}^+_{\tilde{u}_\mu}, \quad (14.118)$$

donde $\mathrm{Var}^+_{\tilde{u}_\mu}$ *está definido en* (14.106)*. Las consecuencias del PPVM son entonces la homogeneización de las tensiones, que resulta idéntica a la* (14.116)*, es decir*

$$\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e} = \frac{1}{|\Omega_\mu^e|}\int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu^D \, d\Omega_\mu^e, \tag{14.119}$$

y el problema de equilibrio en la microescala, el cual es

$$\int_{\Omega_\mu^e} \sigma_\mu^D \cdot (\nabla_{\mathbf{y}_e} \hat{\hat{\mathbf{u}}}_\mu)^s d\Omega_\mu^e = 0 \quad \forall \hat{\hat{\mathbf{u}}}_\mu \in \mathrm{Var}_{\bar{u}_\mu}^+. \tag{14.120}$$

Observe que en este caso, podemos relajar la restricción cinemática sobre los campos de fluctuaciones de la microescala, de manera similar a lo realizado en el PPV (14.89)*. Debemos resaltar que esto no impactaría el desarrollo del modelo multiescala propuesto.*

Observación 14.5 *Es importante observar al lector que hemos hecho hincapié en* **no colocar** *el relajamiento de la restricción cinemática dentro del balance de potencias expresado por el PPVM, y sí cuando se desea calcular el equilibrio. En otras palabras el PPVM nos lleva al equilibrio en la microescala pero este equilibrio puede ser calculado de dos formas, sin relajar la restricción, o relajando la misma. En otras palabras, el relajamiento no forma parte del concepto del PPVM ya que sólo interviene en cómo encontrar ese equilibrio.*

14.3.4 Incompresibilidad y Configuración Material

En esta sección no vamos a colocar en evidencia el problema de equilibrio ya que fue tratado en la sección anterior. Sino que nos concentraremos en la fórmula de homogeneización de la tensión.

De esta forma, $\mathbf{P}_M$ y $\mathbf{P}_\mu$ son los tensores de tensión de Piola-Kirchhoff de primera especie en la macroescala y en la microescala. A su vez, usamos la notación $\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}$ para describir el gradiente (material) de la acción de movimiento descripta en la configuración material, y recordemos que la siguiente identidad es válida en todo punto $\mathbf{x}_m$ de la configuración material de la macroescala

$$[\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m = \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-1}, \tag{14.121}$$

es decir

$$[\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m \mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m} = \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}, \tag{14.122}$$

donde $\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}$ es el gradiente de la macroescala en la descripción espacial y $\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m} = \mathbf{I} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m}$ es el gradiente de deformación en el punto $\mathbf{x}_m$ de la macroescala.

A su vez, por considerar el medio de la macroescala incompresible, se tiene

$$\mathrm{tr}\,\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e} = \mathbf{I}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e} = \mathbf{I}\cdot[\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m = \mathbf{I}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-1} = (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m} = 0. \tag{14.123}$$

Debido a que buscamos caracterizar la fórmula de homogeneización en la configuración de referencia, tomaremos la fórmula de homogeneización de tensión que se deriva del PPVM escrito en la configuración material (14.36) (desconsiderando las fuerzas volumétricas). En este caso, el PPVM resulta

$$\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}_m} \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m} = \frac{1}{|\Omega_\mu^m|} \int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu \cdot (\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m} + \nabla_{\mathbf{x}_m} \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu)\, d\Omega_\mu^m$$
$$\forall (\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}, \hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu) \in \mathbb{T}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m}) \times \mathrm{Var}_{\tilde{u}_\mu}, \quad (14.124)$$

donde

$$\mathbb{T}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m}) = \{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M};\, (\mathbf{I} + \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T} \cdot \mathbf{H} = 0\}, \quad (14.125)$$

con

$$\mathbb{R}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M} = \{\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{3\times 3};\, \mathbf{H} = \mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m},\, \mathbf{G}_M \in \mathscr{W}_M\}. \quad (14.126)$$

Observe que $\mathbb{T}^{\mathbf{x}}_{\mathscr{W}_M}$ es un espacio que depende de $\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m}$, lo que es totalmente consistente, ya que se trata del espacio tangente de una variedad no lineal.

Luego, centrando el análisis únicamente en la derivación de la fórmula de homogeneización, y usando la (14.122), obtenemos

$$\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}\, d\Omega_\mu^m = \left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m \right) \cdot [\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m \mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m} =$$
$$\left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m \right) (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T \cdot [\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m =$$
$$\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m \right) (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T \right]^D \cdot [\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m, \quad (14.127)$$

donde la ultima igualdad se obtiene haciendo uso de la (14.123) que establece que el tensor $[\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m$ tiene trazo nulo. Sin embargo, en (14.124) se tiene $\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}$, para lo cual trabajamos con la expresión anterior de la siguiente manera, utilizando nuevamente la (14.122)

$$\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}\, d\Omega_\mu^m = \left[\left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m \right) (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T \right]^D \cdot [\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e}]_m =$$
$$\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m \right) (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T \right]^D \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m} (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-1} =$$
$$\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m \right) (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T \right]^D (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T} \cdot \hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}. \quad (14.128)$$

Substituyendo este resultado en la expresión (14.124) del PPVM y considerando $\hat{\tilde{\mathbf{u}}}_\mu = \mathbf{0}$, obtenemos

$$\left(\mathbf{P}_M|_{\mathbf{x}_m} - \frac{1}{|\Omega_\mu^m|}\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m}\mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m\right)(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T\right]^D(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T}\right)\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m} = 0$$
$$\forall\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}\in\mathbb{T}^{\mathbf{x}}_{/\!\!/_M}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m}). \quad (14.129)$$

Por otro lado, sabemos que por ser incompresible el medio que constituye la macroescala, y empleando la (14.121), se verifica la siguiente relación

$$\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e} = \sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_e} = \sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}\cdot[\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-1}]_e \quad (14.130)$$

que en la configuración material resulta

$$[\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M^{sD}|_{\mathbf{x}_e}]_m = [\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}]_m\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-1} =$$
$$[\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}]_m(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}. \quad (14.131)$$

E introduciendo el tensor de tensión de Piola-Kirchhoff de primera especie asociado a $\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}$, que denotaremos por $\mathbf{P}_M^d|_{\mathbf{x}_m}$, se tiene

$$\det\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m}[\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}]_m(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m} = \mathbf{P}_M^d|_{\mathbf{x}_m}\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}. \quad (14.132)$$

Con este resultado en la expresion (14.129) obtenemos

$$\left[\det\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m}[\sigma_M|_{\mathbf{x}_e}]_m - \frac{1}{|\Omega_\mu^m|}\left(\int_{\Omega_\mu^m}\mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m\right)(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T\right]^D\cdot\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-1} = 0$$
$$\forall\hat{\mathbf{G}}_M|_{\mathbf{x}_m}\in\mathbb{T}^{\mathbf{x}}_{/\!\!/_M}(\mathbf{G}_M|_{\mathbf{x}_m}). \quad (14.133)$$

Esto implica que

$$\det\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m}[\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}]_m - \frac{1}{|\Omega_\mu^m|}\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m}\mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m\right)(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T\right]^D = \alpha\mathbf{I}. \quad (14.134)$$

Sin embargo, como el lado derecho de la expresión anterior es la suma de dos tensores desviadores, el lado derecho también debe ser desviador, lo que implica que necesariamente tiene que ser $\alpha = 0$. Así, llegamos a la fórmula de homogeneización de las tensiones para en la configuración material para el caso de una macroescala incompresible

$$\mathbf{P}_M^d|_{\mathbf{x}_m} = \det\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m}[\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}]_m(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T} =$$
$$\frac{1}{|\Omega_\mu^m|}\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m}\mathbf{P}_\mu\, d\Omega_\mu^m\right)(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T\right]^D(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T}. \quad (14.135)$$

Comparemos rápidamente la expresión anterior con la (14.116). Para esto, de la expresión anterior, y considerando la relación entre tensión de Cauchy y de Piola-Kirchhoff en la microescala, se obtiene lo siguiente

$$[\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}]_m = \frac{1}{\det \mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m}|\Omega_\mu^m|}\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu \, d\Omega_\mu^m\right)(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T\right]^D = \frac{1}{\det \mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m}|\Omega_\mu^m|}\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m} \det \mathbf{F}_\mu [\sigma_\mu]_m \mathbf{F}_\mu^{-T} \, d\Omega_\mu^m\right)(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T\right]^D. \quad (14.136)$$

Se puede apreciar que, como (14.136) difiere de (14.116), ambos modelos, en la configuración espacial y en la configuración material, entregan fórmulas de homogeneización de tensión diferentes. Esto es consistente con el hecho de que la transformación entre configuraciones conlleva un mapeamiento no lineal. Luego, aplicar el método de modelado multiescala en la configuración de material difiere sutilmente de cuando el mismo es aplicado en la configuración espacial.

Observación 14.6 *Para el caso en el que la microescala también es modelada como un medio incompresible, utilizando un razonamiento análogo es posible concluir que la fórmula de homogeneización resulta*

$$\mathbf{P}_M^d|_{\mathbf{x}_m} = \frac{1}{|\Omega_\mu^m|}\left[\left(\int_{\Omega_\mu^m} \mathbf{P}_\mu^d \, d\Omega_\mu^m\right)(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^T\right]^D (\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T}, \quad (14.137)$$

donde hemos usado las siguientes definiciones $\mathbf{P}_M^d|_{\mathbf{x}_m} = \det \mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m}[\sigma_M^D|_{\mathbf{x}_e}]_m(\mathbf{F}_M|_{\mathbf{x}_m})^{-T}$ *y* $\mathbf{P}_\mu^d = \det \mathbf{F}_\mu [\sigma_\mu^D]_m \mathbf{F}_\mu^{-T}$.

14.4 Comentarios Finales

Como mencionamos en el comienzo de este capítulo, y en el capítulo anterior, recomendamos la lectura de los siguientes trabajos [32, 33, 34, 35, 120, 260, 261, 268, 269, 270, 271, 289, 290, 291] donde presentamos aplicaciones del Método de la Potencial Virtual Multiescala en diversos problemas de la mecánica de los sólidos y de fluidos. Al proceder de esta manera, el lector tendrá una visión completa de la potencialidad y versatilidad del método multiescala basado en el concepto de EVR propuesto para el modelado de sistemas físicos complejos. Como resaltado anteriormente, este Método de la Potencial Virtual Multiescala está fundado sobre principios variacionales que permiten definir con claridad las hipótesis básicas del modelo, eliminando cualquier tipo de suposiciones arbitrárias o sin ningún fundamento.

Parte VI
APÉNDICE

Apéndice A
Definiciones y Notaciones

A.1 Introducción

Con el objetivo de facilitar la lectura de este trabajo, haciéndolo más autocontenido, en este apéndice presentamos de manera resumida algunos conceptos y resultados de álgebra lineal, análisis real y análisis convexo así como notaciones que son utilizadas en los capítulos que integran esta monografía. En la bibliografía citamos algunos libros y trabajos que nos sirvieron para la preparación de este trabajo. Con estos libros y sus respectivas bibliografías el lector podrá adquirir un conocimiento más profundo sobre estos temas, los cuales resultan indispensables para un mejor entendimiento de la mecánica y su formulación variacional.

A.2 Conjuntos

Un conjunto $\mathscr{B}$ es una colección de elementos b. Si b es un elemento del conjunto $\mathscr{B}$ diremos que b *pertenece* a $\mathscr{B}$, propiedad que será representada por $b \in \mathscr{B}$. Con $b \notin \mathscr{B}$ indicaremos que el elemento b no pertenece al conjunto $\mathscr{B}$.

Otra manera que utilizaremos para definir un conjunto $\mathscr{B}$ es a través de la introducción de un conjunto referencial $\mathscr{C}$, cuyos elementos pertenecen al conjunto $\mathscr{B}$ si satisfacen cierta propiedad $\mathscr{P}$. Lo anterior será representado de la siguiente manera

$$\mathscr{B} = \{c \in \mathscr{C}; c \text{ satisface } \mathscr{P}\}, \tag{A.1}$$

que se leerá *el conjunto $\mathscr{B}$ formado por todos los elementos de $\mathscr{C}$ tales que satisfacen la propiedad $\mathscr{P}$*.

Diremos que un conjunto es *finito* si contiene un número finito de elementos, caso contrario diremos que es un conjunto *infinito*. Un conjunto $\mathscr{B}$ es *numerable* si es posible establecer una correspondencia biunívoca entre $\mathscr{B}$ y un subconjunto cualquiera de $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales). Todo conjunto nume-

rable puede ser finito o infinito numerable. Un conjunto no numerable es un conjunto infinito pero no numerable.

Decimos que $\mathscr{A}$ es un *subconjunto* de $\mathscr{B}$, $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{B}$, si *todos* los elementos de $\mathscr{A}$ pertenecen a $\mathscr{B}$. En particular si $\mathscr{B}$ tiene elementos que no pertenecen a $\mathscr{A}$ diremos que $\mathscr{A}$ es un *subconjunto propio*, y en este caso lo representamos por $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$. A su vez dos conjuntos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ se dicen son iguales si se verifica que

$$\mathscr{A} \subset \mathscr{B}, \qquad \mathscr{B} \subset \mathscr{A}. \tag{A.2}$$

La unión, intersección y diferencia de dos conjuntos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ será representada respectivamente por $\mathscr{A} \cup \mathscr{B}$, $\mathscr{A} \cap \mathscr{B}$ y $\mathscr{A} \setminus \mathscr{B}$, donde

$$\mathscr{A} \cup \mathscr{B} = \{x; x \in \mathscr{A} \text{ o } x \in \mathscr{B}\}, \tag{A.3}$$
$$\mathscr{A} \cap \mathscr{B} = \{x; x \in \mathscr{A} \text{ y } x \in \mathscr{B}\}, \tag{A.4}$$
$$\mathscr{A} \setminus \mathscr{B} = \{x; x \in \mathscr{A} \text{ y } x \notin \mathscr{B}\}. \tag{A.5}$$

Otro concepto que usaremos es el de producto cartesiano. Sean dos conjuntos $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ no vacíos (tienen por lo menos un elemento), el *producto cartesiano* de $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$, que lo representaremos por $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$, es el conjunto de pares ordenados (a,b) tales que $a \in \mathscr{A}$ y $b \in \mathscr{B}$ es decir

$$\mathscr{A} \times \mathscr{B} = \{(a,b); a \in \mathscr{A} \text{ y } b \in \mathscr{B}\}. \tag{A.6}$$

Por par ordenado queremos indicar que (a,b) y (a',b') son iguales si y sólo si $a = a'$ y $b = b'$.

A.3 Funciones o Transformaciones

Una función, aplicación o transformación consiste en

1. un conjunto $\mathscr{A}$,
2. un conjunto $\mathscr{B}$, no necesariamente diferente de $\mathscr{A}$,
3. una regla, o correspondencia, f que permite asociar a *cada* elemento de $\mathscr{A}$ un *único* elemento de $\mathscr{B}$.

En este caso diremos que f es una *función de valor-$\mathscr{B}$ en $\mathscr{A}$* o también que f *es una función definida en $\mathscr{A}$ con valor en $\mathscr{B}$*. Los términos *transformación* u *operador* serán empleados indistintamente por nosotros en lugar de *función*. También diremos que f es una función que *transforma* o *aplica $\mathscr{A}$ en $\mathscr{B}$*. Todo esto lo indicaremos de la siguiente forma

$$f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}. \tag{A.7}$$

El conjunto de todos los elementos de $\mathscr{A}$ para los cuales f está definida es llamado *dominio* de f y se indica con $\mathscr{D}(f)$.

Sea $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ luego, dado $x \in \mathscr{D}(f)$ el elemento $y \in \mathscr{B}$ asociado a x a través de la función f, lo indicaremos indistintamente con

$$y = f(x) \quad \text{o} \quad f : x \mapsto y, \tag{A.8}$$

y recibe el nombre de *valor de f en x* o *imagen de x bajo f*. A su vez, x es también llamado *una preimagen de y bajo f*. Obsérvese que decimos **una** preimagen y no **la** preimagen.

El conjunto de todos los valores que f puede tomar en $\mathscr{B}$ recibe el nombre de *rango de f* o *contradominio de f*. Esto lo representaremos de la siguiente forma

$$\mathscr{R}(f) = \{y \in \mathscr{B}; \exists x \in \mathscr{D}(f) \text{ tal que } f(x) = y\}. \tag{A.9}$$

Sea $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, luego f es

- *inyectiva* si a distintos elementos de $\mathscr{A}$, corresponden distintos elementos en $\mathscr{B}$, es decir
$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2, \tag{A.10}$$
o, de forma alternativa, f es inyectiva si y sólo si todo elemento $y \in \mathscr{R}(f)$ tiene una y sólo una preimagen x en $\mathscr{D}(f)$;
- *sobreyectiva* o *suryectiva*, o que *f aplica $\mathscr{A}$ sobre $\mathscr{B}$* si $\mathscr{R}(f) = \mathscr{B}$;
- *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.

Observación A.1 *Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de todos los números reales y sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ($\mathbb{R}^+$ es el conjunto de todos los números reales no negativos) tal que $f : x \mapsto x^2$. Como puede apreciarse esta función no es inyectiva ya que el número 4 tiene* **dos** *preimágenes (2 y -2). Sea ahora $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ definida como anteriormente, luego f es biyectiva.*

Observación A.2 *Otro ejemplo de considerable interés en mecánica es el de la aplicación que permite pasar de una configuracion de un cuerpo a otra configuración, y que denotamos por $\mathscr{X}_t : \mathscr{B} \to \mathscr{B}_t$, donde $\mathscr{B}$ es el conjunto que se identifica con una configuración de referencia del cuerpo y $\mathscr{B}_t$ es el conjunto identificado con la configuración del cuerpo en un determinado instante t. En este ejemplo $\mathscr{X}_t$ describe el movimiento del cuerpo. Como se ve en el Capítulo 4, esta aplicación es biyectiva.*

La aplicación sobreyectiva $I : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ definida por

$$\begin{aligned} I : \mathscr{A} &\to \mathscr{A} \\ x &\mapsto I(x) = x, \end{aligned} \tag{A.11}$$

es llamada *función identidad en $\mathscr{A}$*.

Si $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $g : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ son tales que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathscr{A}$ entonces diremos que ambas funciones son iguales ($f = g$). Aquí debemos recordar al lector que no confunda función con representación de la función. Así, por ejemplo, $f(x) = |x|$ y $g(x) = \exp^{\log|x|}$ son representaciones de una misma función.

Sea $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ de dominio $\mathscr{D}(f)$. La función g tal que $\mathscr{D}(f) \subset \mathscr{D}(g)$ y $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \mathscr{D}(f)$ es una *extensión* de f. A su vez, si $\mathscr{D}(f) = \mathscr{X}$ y $\mathscr{A}$ es un subconjunto de $\mathscr{X}$, la función h tal que $\mathscr{D}(h) = \mathscr{A}$ y $h(x) = f(x)$ para todo $x \in \mathscr{A}$ es una *restricción de f en $\mathscr{A}$*. A esto último lo representaremos por $h = f|_{\mathscr{A}}$.

Sea $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ y $g : \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ tales que $\mathscr{R}(f) \cap \mathscr{D}(g) \neq \emptyset$ entonces podemos introducir la función $g \circ f$ definida por

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathscr{A} &\to \mathscr{C}, \\ a &\mapsto (g \circ f)(a) = g(f(a)), \end{aligned} \tag{A.12}$$

cuyo dominio es

$$\mathscr{D}(g \circ f) = \{x \in \mathscr{D}(f); f(x) \in \mathscr{D}(g)\}, \tag{A.13}$$

y el contradominio es

$$\mathscr{R}(g \circ f) = \{y \in \mathscr{R}(g); y = g(f(x)), x \in \mathscr{D}(g \circ f)\}. \tag{A.14}$$

La función $g \circ f$ es llamada *composición de f con g*, o también se utiliza la expresión *f compuesta con g*.

Si g y f son biyectivas, y existe $g \circ f$, entonces $g \circ f$ también es biyectiva. Por otra parte, de la definición se sigue que la composición no es conmutativa ya que en general $f \circ g$ no necesariamente está definida. Por otra parte, la composición es asociativa, es decir

$$r \circ (g \circ f) = (r \circ g) \circ f. \tag{A.15}$$

En lo que sigue usaremos indistintamente la notación $g \circ f$ y gf para representar la composición de f con g.

La transformación $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es *invertible* si existe una aplicación $g : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}$ tal que gf y fg son las funciones identidad de $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$, respectivamente. En este caso decimos que g es la *inversa* de f.

Los siguientes teoremas introducen algunos conceptos importantes.

Teorema A.1 (Unicidad de la función inversa) *Si la función $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es invertible entonces tiene una única inversa.*

Demostración. Suponga que existen g_1 y g_2 no iguales ($g_1 \neq g_2$) e inversas de f, y sea y un elemento arbitrario de $\mathscr{Y}$. Como fg_1 y $g_2 f$ representan las funciones identidad en $\mathscr{Y}$ y en $\mathscr{X}$ respectivamente, resulta

$$g_2(y) = g_2(fg_1(y)) = g_2 f(g_1(y)) = g_1(y), \tag{A.16}$$

luego

$$g_2 = g_1. \tag{A.17}$$

Hemos arribado a un absurdo que provino de suponer la existencia de dos funciones inversas diferentes. Por lo tanto, existe una única inversa. ■

En lo que sigue utilizaremos la notación f^{-1} para indicar la inversa de la función f.

Teorema A.2 *Si la función $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es invertible, entonces f^{-1} también es invertible y $(f^{-1})^{-1} = f$.*

La validez de este teorema es obvia.

Teorema A.3 *Si la función $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es invertible, entonces es inyectiva.*

Demostración. Suponga f invertible. Tenemos que probar que f es inyectiva es decir, a cada $y \in \mathscr{Y}$ corresponde una única preimagen $x \in \mathscr{X}$. Supongamos lo contrario es decir, existen dos elementos x_1 y x_2 tales que

$$f(x_1) = f(x_2) = y \tag{A.18}$$

Como f es invertible

$$x_1 = f^{-1}f(x_1) = f^{-1}f(x_2) = x_2. \tag{A.19}$$

Es decir, $x_1 = x_2$. Luego f es inyectiva. ■

Teorema A.4 *Si la función $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ es invertible, entonces $\mathscr{R}(f) = \mathscr{Y}$.*

Demostración. Sea $y \in \mathscr{Y}$ arbitrario, luego

$$y = ff^{-1}(y) = f(x) \implies y \in \mathscr{R}(f) \quad \forall y \in \mathscr{Y}, \tag{A.20}$$

lo que implica que

$$\mathscr{R}(f) = \mathscr{Y}, \tag{A.21}$$

y el resultado queda demostrado. ■

Teorema A.5 *La condición necesaria y suficiente para que $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ sea invertible es que f sea biyectiva.*

Demostración. Los teoremas A.3 y A.4 proporcionan la demostración de la condición necesaria. Para demostrar la condición suficiente suponga f biyectiva y sea $y \in \mathscr{Y}$ arbitrario. Lo anterior corresponde a decir que $\mathscr{R}(f) = \mathscr{Y}$ y que f es inyectiva. Luego, para todo y de $\mathscr{Y}$ existe una única preimagen x en $\mathscr{X}$. Llamemos con g a la función que relaciona cada $y \in \mathscr{Y}$ con su única preimagen $x \in \mathscr{X}$ es decir $g(y) = x$. Luego gf y fg son las funciones identidad de $\mathscr{X}$ y $\mathscr{Y}$, respectivamente. Por tanto f es invertible. ■

Del teorema anterior se concluye que si g y f son dos funciones biyectivas tales que su composición gf está definida, entonces

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \tag{A.22}$$

A.4 Grupos

Sea un conjunto $\mathscr{P}$ en el que definimos una operación interna (que representaremos con $*$) que satisface las propiedades

1. para $x, y \in \mathscr{P}$ luego, $x * y \in \mathscr{P}$,
2. para $x, v, z \in \mathscr{P}$ entonces se verifica la propiedad asociativa, es decir

$$x * v * z = x * (v * z) = (x * v) * z, \tag{A.23}$$

3. existe un elemento $i \in \mathscr{P}$ tal que

$$i * x = x \quad \forall x \in \mathscr{P}, \tag{A.24}$$

4. para $x \in \mathscr{P}$ arbitrario, existe $x^{-1} \in \mathscr{P}$ llamado *elemento inverso de x* tal que

$$x^{-1} * x = i, \tag{A.25}$$

entonces, decimos que $\mathbf{P} = (\mathscr{P}, *)$ es un *grupo*.

Observación A.3 *Dado el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ y la operación interna $+$, donde $+$ representa la operación usual de adición de números naturales luego, $(\mathbb{N}, +)$ es un grupo. En cambio, $(\mathbb{N}, \cdot)$, donde $\cdot$ representa la operación usual de multiplicación de números naturales, no es un grupo.*

Observación A.4 *El conjunto de todas las funciones biyectivas que aplican un conjunto en sí mismo con la operación interna $\circ$ (composición) forman un grupo.*

Un grupo $\mathscr{X}$ es *abeliano* si la operación interna satisface la propiedad de simetría o conmutatividad, es decir

$$x * y = y * x \quad \forall x, y \in \mathscr{X}. \tag{A.26}$$

En un grupo abeliano la operación interna es representada usualmente con el signo $+$. De esta manera, las propiedades de la operación interna resultan expresadas por

$$x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z \qquad \text{asociatividad,} \tag{A.27}$$

$$x + y = y + x \qquad \text{conmutatividad.} \tag{A.28}$$

$$\tag{A.29}$$

A su vez, generalmente en los grupos abelianos representamos el elemento identidad por 0 y el inverso del elemento x por $-x$ es decir

$$x + 0 = x, \tag{A.30}$$

$$x + (-x) = 0. \tag{A.31}$$

En este caso decimos también que el grupo es *aditivo*.

La operación binaria que permite definir una estructura algebraica de grupo en un conjunto debe satisfacer las 4 propiedades formuladas como axiomas al comienzo de esta sección. En particular, representar esta operación como las operaciones usuales de multiplicación, adición, etc., caracteriza la naturaleza de los elementos del conjunto.

Un grupo puede contener un número finito o infinito de elementos. Si el grupo es finito, el número de elementos es llamado *orden del grupo*.

Un *subgrupo* de un grupo está formado por un subconjunto del conjunto que define el grupo al cual se le endosa la misma operación interna del grupo. El concepto de *subgrupo propio* es similar al de subconjunto propio.

Consideremos ahora la relación

$$\overline{z} = w * z * w^{-1}, \tag{A.32}$$

donde $z, w \in \mathbf{P} = (\mathscr{P}, *)$, luego, $\overline{z}$ también pertenece a $\mathbf{P}$. Si consideramos w como un elemento fijo en $\mathbf{P}$ y z un elemento arbitrario de $\mathbf{P}$, la expresión anterior define unívocamente $\overline{z}$ en función de z. Desde este punto de vista, la expresión (A.32) define una aplicación biyectiva del grupo $\mathbf{P}$ en sí mismo, siendo que la aplicación preserva las relaciones de grupo.

En efecto, por ejemplo

$$\overline{c} * \overline{z} = (w * c * w^{-1}) * (w * z * w^{-1}) = w * c * z * w^{-1} = \overline{c * z}. \tag{A.33}$$

Por otra parte, dado un subgrupo $\mathbf{S}$ de $\mathbf{P}$, la aplicación (A.32) transforma $\mathbf{S}$ en otro subgrupo $\overline{\mathbf{S}}$ llamado *conjugado de* $\mathbf{S}$. Esta transformación es indicada simbólicamente como

$$\overline{\mathbf{S}} = w\mathbf{S}w^{-1} \quad \mathbf{S} \subset \mathbf{P} \text{ y } w \in \mathbf{P}. \tag{A.34}$$

Si un grupo $\mathbf{S}$ es igual a su conjugado $\overline{\mathbf{S}}$, es decir si

$$\mathbf{S} = w\mathbf{S}w^{-1} \quad \forall w \in \mathbf{P}, \tag{A.35}$$

o su equivalente

$$\mathbf{S}w = w\mathbf{S}, \tag{A.36}$$

decimos que $\mathbf{S}$ es un subgrupo *invariante* o *subgrupo autoconjugado*. Debemos notar que (A.35) no significa que:

$$z = w * z * w^{-1} \quad \forall z \in \mathbf{S}, \tag{A.37}$$

sino simplemente que

$$\overline{z} = w * z * w^{-1} \in \mathbf{S} \quad \forall z \in \mathbf{S}. \tag{A.38}$$

Si los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$, con n un número finito, pertenecen a un grupo $\mathbf{P}$, el conjunto de todos los elementos formados a través de la operación interna realizada con estos elementos entre sí y con sus inversas genera un subgrupo de $\mathbf{P}$ llamado *subgrupo generado por* $\{f_i\}_{i \leq n}$.

Un subgrupo generado con un único elemento f (en este caso $n = 1$) es llamado *cíclico*. En este caso los elementos

$$i, f, f*f, f*f*f, \ldots, f^{-1}, f^{-1}*f^{-1}, f^{-1}*f^{-1}*f^{-1}, \ldots, \tag{A.39}$$

son llamados de *potencias* de f, y formalmente podemos escribirlos como

$$f^0 = i, f^1 = f, f^2 = f*f, \ldots, f^{-2} = f^{-1}*f^{-1}, \ldots. \tag{A.40}$$

De la propia definición, en un grupo cíclico se verifica

$$f^m * f^n = f^n * f^m = f^{n+m}, \tag{A.41}$$

$$(f^m)^n = (f^n)^m = f^{nm}. \tag{A.42}$$

Como consecuencia se tiene que todo grupo cíclico es abeliano.

A.5 Morfismos

Sean $(\mathscr{A}, \bullet)$ y $(\mathscr{B}, *)$ dos grupos. La función

$$f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, \tag{A.43}$$

que no altera estas estructuras es llamada *morfismo* o también *homomorfismo*.

Un morfismo biyectivo es llamado *isomorfismo*. En este caso decimos que $\mathscr{A}$ y $\mathscr{B}$ son *isomorfos*.

Un morfismo en que el dominio y contradominio es un mismo conjunto ($\mathscr{A} = \mathscr{B}$) es llamado *endomorfismo*. Finalmente, un endomorfismo biyectivo es llamado *automorfismo*.

A.6 Espacios Vectoriales

Un espacio vectorial real (o espacio lineal real) es un conjunto V de elementos llamados *vectores* provisto de dos operaciones

i) una operación interna

$$A : V \times V \to V, \tag{A.44}$$

llamada *adición* y tradicionalmente representada por

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \tag{A.45}$$

ii) una operación externa

$$M : \mathbb{R} \times V \to V, \tag{A.46}$$

llamada *multiplicación por escalar* y generalmente representada por

$$M(\alpha, \mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}. \tag{A.47}$$

Estas dos operaciones satisfacen los siguientes axiomas

1. la adición es conmutativa

$$\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \tag{A.48}$$

2. la adición es asociativa

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \tag{A.49}$$

3. existe un elemento nulo de V, que designaremos por $\mathbf{0}$, llamado *vector nulo de* V, tal que

$$\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \tag{A.50}$$

4. para cada $\mathbf{u} \in V$, existe un vector, $-\mathbf{u}$, llamado *vector opuesto* o *negativo* de $\mathbf{u}$, tal que

$$\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \tag{A.51}$$

5. la multiplicación por escalar es asociativa

$$\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in V, \tag{A.52}$$

6. la multiplicación por escalar es distributiva con respecto a la adición escalar

$$(\alpha+\beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{u} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u} \in V, \tag{A.53}$$

7. la multiplicación por escalar es distributiva con respecto a la adición de vectores

$$\alpha(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u}+\alpha\mathbf{v} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{A.54}$$

Observación A.5 *Observe que las 7 propiedades listadas anteriormente no son independientes entre ellas.*

La definición de adición de vectores conjuntamente con los 4 axiomas introducidos al comimenzo de esta sección definen una estructura aditiva.

Con los elementos anteriores podemos introducir una tercera operación, llamada *substracción*, definida de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &S : V \times V \to V, \\ &\quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto S(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}-\mathbf{v} = \mathbf{u}+(-\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{A.55}$$

Todas estas operaciones (adición, multiplicación por escalar y substracción) son llamadas también de operaciones lineales.

Finalmente, dados los vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n \in V$ y los escalares $a_1, a_2, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ introducimos el vector $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ que es llamado *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots n$.

Observación A.6 *Un ejemplo importante es el espacio vectorial (llamado también espacio cartesiano n-dimensional)* $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{v}; \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n), v_i \in \mathbb{R}\}$ *donde las operaciones de adición y multiplicación por escalar están definidas por*

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n), \tag{A.56}$$

$$a\mathbf{u} = (au_1, au_2, \ldots, au_n). \tag{A.57}$$

Un subconjunto U de V se dice es un *subespacio* de V si es cerrado con respecto a la combinación lineal. En otras palabras, U es un subespacio de V si toda combinación lineal de vectores de U pertenece también a U. De la definición anterior se sigue que si U es un subespacio entonces $\mathbf{0} \in U$. Un subespacio de $\mathbb{R}^n$ es, por ejemplo, el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{v} = (0, v_2, v_3, \ldots, v_n)$.

A partir de las definiciones anteriores, los siguientes teoremas son deducidos fácilmente.

Teorema A.6 *En todo espacio vectorial existe un único elemento nulo.*

Demostración. El axioma 3 del inicio de la sección nos dice que existe al menos un vector nulo. Supongamos entonces dos vectores nulos $\mathbf{0}_1$ y $\mathbf{0}_2$ diferentes ($\mathbf{0}_1 \neq \mathbf{0}_2$). Tomando en el mencionado axioma $\mathbf{u} = \mathbf{0}_1$ y $\mathbf{0} = \mathbf{0}_2$, obtenemos

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1. \tag{A.58}$$

En forma similar, tomando $\mathbf{u} = \mathbf{0}_2$ y $\mathbf{0} = \mathbf{0_1}$, resulta

$$\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2. \tag{A.59}$$

Pero del axioma 1 tenemos que la adición es conmutativa, luego

$$\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1, \tag{A.60}$$

de donde sigue que $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. ■

Teorema A.7 *Sea V un espacio vectorial. Luego, para todo $\mathbf{u} \in V$ existe un único vector negativo $\mathbf{v} = -\mathbf{u} \in V$ tal que $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$.*

Demostración. El axioma 4 nos dice que existe al menos un elemento negativo. Supongamos que $\mathbf{u}$ tiene dos vectores negativos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ diferentes ($\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$), luego

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \tag{A.61}$$

$$\mathbf{u} + \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}. \tag{A.62}$$

Sumando $\mathbf{v}_2$ a ambos miembros de la primera ecuación obtenemos

$$\mathbf{v}_2 + (\mathbf{u} + \mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_2 + \mathbf{0} = \mathbf{v}_2, \tag{A.63}$$

pero a su vez del axioma 2 tenemos

$$\mathbf{v}_2 + (\mathbf{u} + \mathbf{v}_1) = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{u}) + \mathbf{v}_1 = \mathbf{0} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1, \tag{A.64}$$

de donde $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. ■

Teorema A.8 *Sea V un espacio vectorial. Luego, para cualquier $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ y $a, b \in \mathbb{R}$ se verifica*

(i) $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$,
(ii) $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$,
(iii) $(-a)\mathbf{u} = (-a\mathbf{u}) = a(-\mathbf{u})$,
(iv) *si* $a\mathbf{u} = \mathbf{0}$ *luego puede ser* $a = 0$ *o* $\mathbf{u} = \mathbf{0}$,
(v) *si* $a\mathbf{u} = a\mathbf{v}$ *y* $a \neq 0$ *entonces* $\mathbf{u} = \mathbf{v}$,
(vi) *si* $a\mathbf{u} = b\mathbf{u}$ *y* $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ *entonces* $a = b$.
(vii) $\mathbf{u} + \mathbf{u} = 2\mathbf{u}$, $\mathbf{u} + \mathbf{u} + \mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ *y en general* $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{u} = n\mathbf{u}$.

Demostración. Sólo haremos la demostración de (i)-(iii), las restantes quedan como ejercicio para el lector.

(i) Sea $\mathbf{w} = 0\mathbf{u}$, tenemos que probar que $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Para ello adicionemos $\mathbf{w}$ a sí mismo

$$\mathbf{w} + \mathbf{w} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u} = (0+0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{w}. \tag{A.65}$$

Substrayendo $\mathbf{w}$ a ambos miembros de la expresión anterior resulta $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

(ii) Sea $\mathbf{w} = a\mathbf{0}$ adicionando $\mathbf{w}$ a sí mismo

$$\mathbf{w} + \mathbf{w} = a\mathbf{0} + a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} = \mathbf{w}. \tag{A.66}$$

Substrayendo $\mathbf{w}$ a ambos miembros de la expresión anterior resulta $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

(iii) Sea $\mathbf{w} = (-a)\mathbf{u}$, adicionando $a\mathbf{u}$ a ambos miembros

$$\mathbf{w} + a\mathbf{u} = (-a)\mathbf{u} + a\mathbf{u} = (-a+a)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{A.67}$$

Luego, $\mathbf{w}$ es el vector negativo de $a\mathbf{u}$, es decir $\mathbf{w} = -(a\mathbf{u})$. Ahora bien, adicionando $a(-\mathbf{u})$ a $a\mathbf{u}$ tenemos

$$a(-\mathbf{u}) + a\mathbf{u} = a(-\mathbf{u} + \mathbf{u}) = \mathbf{0}, \tag{A.68}$$

luego $(-a)\mathbf{u} = (-a\mathbf{u}) = a(-\mathbf{u})$.

■

Sea B un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V. El conjunto de todas las combinaciones de elementos de B es un subespacio de V. Llamaremos este subespacio como espacio *expandido* o *generado* por B, y lo representaremos por span$B$. Numerosas preguntas surgen en este momento. Por ejemplo, *qué espacios pueden*

ser generados por conjuntos finitos de elementos?. Si un espacio puede ser generado por un conjunto finito de elementos, *cuál es el menor número de elementos requeridos?*. Para responder a estas preguntas veremos en las próximas secciones los conceptos de *dependencia*, *independencia*, *bases* y *dimensión*.

A.7 Conjuntos y Dependencia en Espacios Vectoriales

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto k de vectores. Decimos que S es *linealmente independiente* (l.i.) si la ecuación

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \quad a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, k, \tag{A.69}$$

es satisfecha solamente para $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$. El conjunto que no es l.i. se dice es *linealmente dependiente* (l.d.).

Lema A.1 *Sea S un conjunto de vectores del espacio vectorial V. S es l.i. si y sólo si todo subconjunto de S es l.i.. Caso contrario es l.d.*

Teorema A.9 *Sea* $S_k = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ *un conjunto l.i. de k vectores del espacio vectorial V. Sea además* $\text{span}(S_k)$ *el subespacio generado por* S_k*. Luego, todo conjunto de* $k+1$ *elementos de* $\text{span}(S_k)$ *es l.d.*

Demostración. La demostración la haremos por inducción. Supongamos primero $k = 1$. Luego, S_1 consiste en un único elemento $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ y por lo tanto S_1 es l.i.. Consideremos dos ($k+1 = 2$) elementos arbitrarios del $\text{span}(S_1)$. Sean $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ dichos elementos que, por pertenecer a $\text{span}(S_1)$, toman la forma

$$\mathbf{w}_1 = a_1\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{w}_2 = a_2\mathbf{v}_1, \tag{A.70}$$

donde $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ no son simultáneamente nulos. Si multiplicamos ambos miembros de la primera expresión por a_2 y los de la segunda por a_1 y substraemos los vectores así obtenidos resulta

$$a_2\mathbf{w}_1 - a_1\mathbf{w}_2 = \mathbf{0}, \tag{A.71}$$

para todo a_1, a_2 no simultáneamente nulos. Luego, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ es l.d. Como los $\mathbf{w}_i$ adoptados son arbitrarios se sigue que todo conjunto de $k+1 = 2$ elementos de $\text{span}(S_1)$ es l.d. Con esto el teorema queda demostrado para $k = 1$. Supongamos ahora que el teorema vale para $k-1$, vamos a demostrar que también es válido para k. Para ello, consideremos un conjunto arbitrario de $k+1$ elementos diferentes de $\text{span}(S_k)$ que lo designaremos $T = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{k+1}\}$, debemos probar que T es l.d. Como $\mathbf{w}_i \in \text{span}(S_k)$, $\forall i = 1, \ldots, k+1$, se tiene que

$$\mathbf{w}_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\mathbf{v}_j \quad i = 1, \ldots, k+1. \tag{A.72}$$

Dos casos pueden ocurrir.

1) Supongamos $a_{i1} = 0$, $i = 1, \ldots, k+1$ luego, cada elemento de T es sólo combinación lineal de los elementos del conjunto $S' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Ahora bien, S' es l.i. y consiste de $k-1$ elementos. Como el teorema se supuso válido para $k-1$ se sigue que T es l.d.
2) No todos los escalares a_{i1} son nulos. Supongamos en particular $a_{11} \neq 0$, si es necesario renumeramos los $\mathbf{w}_i$ para lograr esto. Particularizando la expresión (A.72) para $i = 1$ y multiplicando ambos miembros por $c_i = a_{i1}/a_{11}$, obtenemos

$$c_i \mathbf{w}_1 = a_{i1} \mathbf{v}_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} \mathbf{v}_j. \tag{A.73}$$

Substrayendo (A.72) de (A.73) tenemos

$$c_i \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) \mathbf{v}_j, \tag{A.74}$$

para $i = 2, 3, \ldots, k+1$. Esta última ecuación expresa que los k vectores $c_i \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_i$ son combinaciones lineales del conjunto $S' = \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ l.i.. Nuevamente, como el teorema es válido para $k-1$ se sigue que el conjunto de los k vectores $c_i \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_i$ es l.d.. De lo anterior y para escalares $b_2, b_3, \cdots, b_{k+1}$ no todos nulos, resulta

$$\sum_{j=2}^{k+1} b_j (c_j \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_j) = \mathbf{0}, \tag{A.75}$$

de donde

$$\left(\sum_{j=2}^{k+1} b_j c_j \right) \mathbf{w}_1 - \sum_{j=2}^{k+1} b_j \mathbf{w}_j = \mathbf{0}, \tag{A.76}$$

que nos dice que el conjunto de $k+1$ vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{k+1}$ es l.d..

Con el resultado anterior y con el argumento de inducción concluimos la demostración del teorema. ■

A.8 Bases y Dimensión

Decimos que un conjunto finito S de elementos del espacio vectorial V es una *base* (finita) de V si S es l.i. y si $\text{span}(S) = V$.

El espacio vectorial V es de *dimensión finita* si tiene una base finita. Si $V = \{\mathbf{0}\}$, entonces $\dim V = 0$, si $V \neq \{\mathbf{0}\}$ y no tiene una base finita entonces diremos que V es de *dimensión infinita*.

Observación A.7 *Sea $X = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)\}$ el conjunto de las sucesiones reales. X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión infinita, con la operación adición y multiplicación por escalar definida componente a componente.*

Teorema A.10 *Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Luego, toda base de V tiene el mismo número de elementos. En particular, llamaremos dimensión de V al número de elementos que tiene una base de V.*

Demostración. Sean S y T dos bases de V. Como V es de dimensión finita S y T tienen un número finito de elementos, sea s el número de elementos en S y t el número de elementos en T. Como S es un conjunto l.i. de s vectores, del Teorema A.9 se sigue que todo conjunto de $s+1$ elementos de V es l.d.. Como T es por hipótesis l.i. resulta $t \leq s$. Intercambiando S por T en el razonamiento anterior llegaremos a que $s \leq t$. De estos dos resultados concluimos que $s = t$ con lo que queda demostrado el teorema. ■

Observación A.8 *Sea $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}\}$. El conjunto $S = \{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$, donde $\mathbf{e}_i = (0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ con 1 en la posición i-ésima, es una base de $\mathbb{R}^n$ y $\dim \mathbb{R}^n = n$.*

Teorema A.11 *Sea V un espacio vectorial n-dimensional ($\dim V = n$). Luego*

1) Todo conjunto l.i. de n elementos de V es una base de V.
2) Todo conjunto l.i. de elementos de V es un subconjunto de alguna base de V.

Demostración. Como $\dim V = n$, existe en V un subconjunto B l.i. de n elementos de V tal que $\text{span}(B) = V$. Sea $T = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un conjunto l.i. de n elementos de V. Luego $\text{span}(T) \subseteq V$. Si $\text{span}(T) \neq V$, existe $\mathbf{w} \in V$ tal que $\mathbf{w} \notin \text{span}(T)$. Luego, $T' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{w}\}$ resulta l.i. y $T' \subset V$. Por el Teorema A.9 sabemos que T' es l.d., por lo tanto llegamos a una contradicción que provino de suponer $\text{span}(T) \neq V$. Luego, T es una base de V con lo que demostramos la primera parte del teorema.

Para probar la segunda parte consideremos el conjunto arbitrario l.i. de elementos de V $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$. Si $k = n$, S es una base de V. Caso contrario, existe un elemento $\mathbf{w} \in V$ que no pertenece a $\text{span}(S)$. Adjuntando este elemento a S obtenemos el conjunto $S' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}\}$. Si este conjunto es l.d. existen escalares $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ no todos nulos para los cuales

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \mathbf{v}_i + a_{k+1} \mathbf{w} = \mathbf{0}. \tag{A.77}$$

Como $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ es l.i. se sigue que $a_{k+1} \neq 0$. Podemos así, expresar $\mathbf{w}$ en función de un combinación lineal de los $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$, es decir, $\mathbf{w} \in \text{span}(S)$ contradiciendo la hipótesis de que $\mathbf{w} \notin \text{span}(S)$. Por lo tanto S' es un conjunto l.i. Nuevamente, si $k+1 = n$ entonces S' es una base de V, y como $S \subset S'$ queda demostrada la segunda parte del teorema. Si S' no es una base de V, se repite el razonamiento anterior hasta arribar a un conjunto $\overline{S}$ que sea una base de V. El número de pasos para arribar a este conjunto $\overline{S}$ es finito ya que caso contrario obtendríamos un conjunto l.i. con $n+1$ elementos contradiciendo el Teorema A.9. ■

Corolario A.1 *Si V es de dimensión finita y W es un subespacio de V, entonces* $\dim W \leq \dim V$.

Corolario A.2 *Si V es de dimensión infinita, cualquiera sea $n \in \mathbf{N}$, existe un subconjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ de elementos de V que es l.i..*

A.9 Componentes

Sea V un espacio vectorial n-dimensional y sea $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} = \{\mathbf{e}_i\}_{i \leq n}$ una base de V. Luego

$$V = \text{span}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{A.78}$$

y, por lo tanto, todo vector $\mathbf{v} \in V$ es una combinación lineal de los vectores bases, es decir

$$\mathbf{v} = v^1\mathbf{e}_1 + v^2\mathbf{e}_2 + \ldots + v^n\mathbf{e}_n \quad v^i \in \mathbb{R}. \tag{A.79}$$

Los coeficientes v^i son llamados *componentes* de $\mathbf{v}$ con respecto a la base dada por $\{\mathbf{e}_i\}_{i \leq n}$. Estas componentes son únicas ya que los elementos de la base forman un conjunto l.i.. En efecto, supongamos que $\mathbf{v}$ admita una segunda representación del tipo (A.79), designemos con d^i estas nuevas componentes. Luego substrayendo ambas representaciones obtenemos

$$\sum_{i=n}^{n} (v^i - d^i)\mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \tag{A.80}$$

como $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ es l.i. se sigue que (A.80) implica $v^i - d^i = 0$ para toda componente i, luego $v^i = d^i$.

Frecuentemente en estas notas encontraremos expresiones del tipo (A.79) o del tipo (A.80), en otros casos el número de índices puede ser mayor. A los efectos de simplificar la notación introduciremos, de ahora en adelante, una convención ya bastante usual. La misma establece que en todo término conteniendo índices repetidos, la sumatoria de dicho término para el índice variando de 1 al rango de variación que le corresponda queda sobre entendida. Con esta convención, (A.79) pasa a ser escrita simplemente por

$$\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i. \tag{A.81}$$

En particular

$$\mathbf{e}_i = \delta_i^j \mathbf{e}_j \quad \text{donde } \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases} \tag{A.82}$$

Sean $\{\mathbf{e}_i\}_{i \leq n}$ y $\{\overline{\mathbf{e}}_i\}_{i \leq n}$ dos bases diferentes del espacio vectorial n-dimensional V. Definamos los números reales e_k^j y $\overline{e}_k^j$ como, respectivamente, la componente j-ésima del k-ésimo elemento de estas bases con respecto cada una a la otra. Es decir

$$\mathbf{e}_k = e_k^j \overline{\mathbf{e}}_j \quad \overline{\mathbf{e}}_k = \overline{e}_k^j \mathbf{e}_j. \tag{A.83}$$

De lo anterior se obtiene

$$\mathbf{e}_i = e_i^j \overline{e}_j^k \mathbf{e}_k \quad \overline{\mathbf{e}}_i = \overline{e}_i^j e_j^k \overline{\mathbf{e}}_k. \tag{A.84}$$

Comparando (A.84) con (A.82), resulta

$$e_i^j \overline{e}_j^k = \overline{e}_i^j e_j^k = \delta_i^{\ j}. \tag{A.85}$$

La expresión anterior también nos dice que las matrices $[e_i^j]$ y $[\overline{e}_i^j]$ son inversas una respecto de la otra.

Teorema A.12 *Si v^i y $\overline{v}^i$ son las componentes de $\mathbf{v} \in V$ respecto a las bases $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ y $\{\overline{\mathbf{e}}_i\}_{i\leq n}$ respectivamente, entonces*

$$v^i = \overline{e}_j^i \overline{v}^j, \tag{A.86}$$

$$\overline{v}^i = e_j^i v^j, \tag{A.87}$$

donde e_j^i y $\overline{e}_j^i$ están definidas en (A.83).

Demostración. Tomando la representación de $\mathbf{v}$ en la base $\{\overline{\mathbf{e}}_i\}_{i\leq n}$, y recordando la representación de esta base en función de la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ dada por (A.83), obtenemos

$$\mathbf{v} = \overline{v}^j \overline{\mathbf{e}}_j = \overline{v}^j \overline{e}_j^i \mathbf{e}_i = v^i \mathbf{e}_i, \tag{A.88}$$

de la expresión anterior se concluye que

$$v^i = \overline{e}_j^i \overline{v}^j. \tag{A.89}$$

Para demostrar (A.87) seguimos un razonamiento análogo al anterior pero esta vez expresando $\mathbf{v}$ como combinación lineal de los elementos de la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$. ■

A.10 Suma de Conjuntos y Subespacios

Sean X e Y dos subconjuntos de vectores del espacio vectorial V. La suma de estos subconjuntos, representada por $X+Y$, consiste en el conjunto de todos los vectores de la forma $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ donde $\mathbf{x} \in X$ e $\mathbf{y} \in Y$. Si X e Y son dos subespacios de V, luego $X+Y$ es también un subespacio de V.

A.11 Variedad Lineal

Sea S un subespacio del espacio vectorial U y sea $\mathbf{u}_0 \in U$ un determinado elemento de este espacio. El conjunto de todos los elementos $\mathbf{u} \in U$ tales que

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \eta \quad \eta \in S, \tag{A.90}$$

se llama *variedad lineal* de U. Observe que si $\mathbf{u}_0 \in S$ tenemos que la variedad lineal será en sí misma un subespacio que coincide con S. La variedad lineal recibe también el nombre de *translación de S en* $\mathbf{u}_0$, y será representada por

$$X = \mathbf{u}_0 + S. \tag{A.91}$$

La expresión anterior quiere enfatizar que dado un elemento $\mathbf{u} \in X$ siempre existe un elemento $\eta \in S$ tal que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \eta$.

A.12 Conjuntos Convexos y Conos

El conjunto K del espacio vectorial V se dice *convexo* si para todo $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$ y $\alpha \in [0,1]$ resulta

$$\alpha\mathbf{u} + (1-\alpha)\mathbf{v} \in K. \tag{A.92}$$

Geométricamente, la expresión anterior nos dice que si dos elementos pertenecen a K, todo elemento sobre *el segmento de recta* definido por $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ también pertenece a K. Para completar la definición, el conjunto vacío es considerado convexo.

El lector puede observar que los espacios vectoriales, los subespacios y las variedades lineales son convexos. A su vez, si K y G son conjuntos convexos del espacio vectorial V se verifica

$$\alpha K = \{\mathbf{x};\, \mathbf{x} = \alpha\mathbf{v},\, \mathbf{v} \in K\}, \tag{A.93}$$

es también convexo para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y además que $K + G$ es convexo.

Sea C una colección arbitraria de conjuntos convexos (que puede ser infinita), luego $\bigcap_{K \in C} K$ es convexo.

El conjunto C del espacio vectorial V se dice que es un *cono con vértice en el origen* si

$$\mathbf{v} \in C \quad \Rightarrow \quad \alpha\mathbf{v} \in C \quad \forall \alpha \geq 0. \tag{A.94}$$

Observe que el elemento nulo de V pertenece al cono C. Con esta definición podemos introducir los siguientes conceptos. El conjunto C que es simultáneamente convexo y cono se denomina *cono convexo*. Por otro lado, sea C_0 un cono y sea $\mathbf{v}_0$ un elemento del espacio vectorial V, entonces el conjunto $C = \mathbf{v}_0 + C_0 = \{\mathbf{v} \in C;\, \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \alpha\mathbf{x},\, \mathbf{x} \in C_0,\, \alpha \geq 0\}$ se define como la *traslación* $\mathbf{v}_0$ *del cono* C_0. En particular, el elemento $\mathbf{v}_0$ es el vértice del cono. Por este motivo C_0 es también llamado de cono con vértice en el origen.

El lector podrá observar que el concepto de cono es una generalización del de subespacio y el de variedad lineal ya que ambos son conos y, en particular, convexos.

A.13 Suma Directa de Subespacios

Sean X e Y dos subespacios del espacio vectorial V. Diremos que V es la *suma directa* de X e Y si y sólo si

$$V = X + Y, \tag{A.95}$$

$$X \cap Y = \mathbf{0}, \tag{A.96}$$

donde $\mathbf{0} \in \mathbf{V}$ es el elemento nulo. La suma directa es representada por $V = X \oplus Y$.

Teorema A.13 *$V = X \oplus Y$ si y sólo si $\mathbf{v} \in V$ tiene una única representación $\mathbf{v} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ con $\mathbf{x} \in X$ e $\mathbf{y} \in Y$.*

A.14 Transformaciones Lineales

Sean V y W dos espacios vectoriales, la función $\mathbf{T} : V \to W$ es una *transformación lineal de V en W* si las propiedades siguientes son satisfechas

1. $\mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{v}), \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,
2. $\mathbf{T}(a\mathbf{u}) = a\mathbf{T}(\mathbf{u}), \forall \mathbf{u} \in V$ y $\forall a \in \mathbb{R}$.

En otras palabras, $\mathbf{T}$ preserva la adición y multiplicación por escalar. Lo anterior nos dice, también, que toda transformación lineal es un morfismo. Las dos propiedades de las transformaciones lineales pueden condensarse en una única expresión que es la siguiente

$$\mathbf{T}(a\mathbf{u} + b\mathbf{v}) = a\mathbf{T}(\mathbf{u}) + b\mathbf{T}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \tag{A.97}$$

Observación A.9 *Observe que la transformación identidad, $\mathbf{I}$: $V \to V$ donde $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ es una transformación lineal. La multiplicación por un número real fijo a, $\mathbf{T} : V \to V$, donde $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = a\mathbf{v}$ para todo $\mathbf{v} \in V$ también lo es. Sea V el espacio vectorial de todas las funciones continuas en $[a,b]$, luego $\mathbf{T} : V \to V$ definido como $\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \int_a^x \mathbf{v}(t)dt$, $a \leq x \leq b$, es una transformación lineal.*

Teorema A.14 *Sea $\mathbf{T} : V \to W$ una transformación lineal, el conjunto $\mathbf{T}(V)$ (es decir el $\mathscr{R}(\mathbf{T})$ es un subespacio de W. Además T transforma el vector nulo de V en el vector nulo de W.*

Demostración. Para mostrar que $\mathbf{T}(V)$ es un subespacio de W basta verificar que $\mathbf{T}(V)$ es cerrado respecto a la adición y multiplicación por escalar. Tomemos dos elementos arbitrarios de $\mathbf{T}(V)$, sean $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ y $\mathbf{T}(\mathbf{v})$ estos elementos, haciendo la adición de estos dos vectores y como $\mathbf{T}$ es una transformación lineal tenemos

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{v}) \in \mathbf{T}(V). \tag{A.98}$$

A su vez, sea a un número real arbitrario y sea $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ un elemento arbitrario de $\mathbf{T}(V)$. Haciendo el producto de dicho elemento por el escalar a y recordando que $\mathbf{T}$ es una transformación lineal, resulta

$$a\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(a\mathbf{u}) \quad \Rightarrow \quad a\mathbf{T}(\mathbf{u}) \in \mathbf{T}(V). \tag{A.99}$$

Por lo tanto, $\mathbf{T}(V)$ es un subespacio de W. Por otro lado si en la última expresión hacemos $a = 0$, resulta

$$\mathbf{0} = 0\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(0\mathbf{u}) = \mathbf{T}(\mathbf{0}). \tag{A.100}$$

■

El conjunto de todos los elementos de V tales que $\mathbf{T}$ los transforma en el elemento nulo de W es llamado *espacio nulo* de $\mathbf{T}$ o *kernel* de $\mathbf{T}$. Este espacio será designado con $\mathscr{N}(\mathbf{T})$. Luego

$$\mathscr{N}(\mathbf{T}) = \{\mathbf{v} \in V; \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}. \tag{A.101}$$

Teorema A.15 *Sea $\mathbf{T} : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W. Luego, $\mathscr{N}(\mathbf{T})$ es un subespacio de V.*

Demostración. Nuevamente bastará mostrar que $\mathscr{N}(\mathbf{T})$ es cerrado respecto a la adición y multiplicación por escalar. Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathscr{N}(\mathbf{T})$ y $a \in \mathbb{R}$, arbitrarios. Luego

$$\mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{T}(\mathbf{u}) + \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \tag{A.102}$$

$$\mathbf{T}(a\mathbf{u}) = a\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}. \tag{A.103}$$

■

Teorema A.16 *Sea $\mathbf{T} : V \to W$ una transformación lineal entre dos espacios vectoriales V y W, donde V es de dimensión finita. Luego, $\mathbf{T}(V)$ (es decir $\mathscr{R}(\mathbf{T})$) es también de dimensión finita y tal que*

$$\dim \mathscr{N}(\mathbf{T}) + \dim \mathbf{T}(V) = \dim V. \tag{A.104}$$

Por otra parte, si V es de dimensión infinita, al menos uno de los espacios $\mathscr{N}(\mathbf{T})$ o $\mathbf{T}(V)$ es de dimensión infinita.

Demostración. Para mostrar la primera parte del teorema consideremos $n = \dim V$ y sea $\{\mathbf{e}_k\}_{k \le n}$ una base de $\mathscr{N}(\mathbf{T})$. Como $\mathscr{N}(\mathbf{T})$ es un subespacio de V (ver Teorema A.15) se sigue que $k \le n$. Del Teorema A.11, el conjunto $\{\mathbf{e}_k\}_{k \le n}$ es un subconjunto de alguna base de V. Sea dicha base

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_{k+r}, \tag{A.105}$$

donde

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_{k+1}), \mathbf{T}(\mathbf{e}_{k+2}), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_{k+r}), \tag{A.106}$$

forman una base de $\mathbf{T}(V)$. Con esto mostraríamos que $\dim \mathbf{T}(V) = r$ con lo que probaríamos el teorema. Para ello, probaremos primero que (A.106) genera $\mathbf{T}(V)$. Sea $\mathbf{w}$ un elementos arbitrario de $\mathbf{T}(V)$. Luego, existe $\mathbf{v} \in V$ tal que $\mathbf{w} = \mathbf{T}(\mathbf{v})$. Como (A.105) es una base de V, tenemos

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}(v^i \mathbf{e}_i) = v^i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{k} v^i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} v^i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=k+1}^{k+r} v^i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i), \qquad \text{(A.107)}$$

ya que $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = \mathbf{T}(\mathbf{e}_2), \ldots, \mathbf{T}(\mathbf{e}_k) = \mathbf{0}$ por ser una base de $\mathscr{N}(\mathbf{T})$. La expresión (A.107) nos muestra que (A.106) genera $\mathbf{T}(V)$.

Vamos a probar ahora que estos elementos forman un conjunto l.i., es decir son una base de $\mathbf{T}(V)$. Para ello supongamos existen escalares no todos nulos $c^{k+1}, \ldots, c^{k+r}$ tales que

$$\sum_{i=k+1}^{k+r} c^i \mathbf{T}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}, \qquad \text{(A.108)}$$

es decir, estamos suponiendo que (A.106) es un conjunto l.d.. La expresión (A.108), por ser $\mathbf{T}$ una transformación lineal, implica en

$$\mathbf{T}\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} c^i \mathbf{e}_i \right) = \mathbf{0}, \qquad \text{(A.109)}$$

luego

$$\mathbf{c} = \sum_{i=k+1}^{k+r} c^i \mathbf{e}_i \in \mathscr{N}(\mathbf{T}), \qquad \text{(A.110)}$$

De la expresión anterior, vemos que $\mathbf{c}$ también podrá ser escrito como una combinación lineal de los elementos que forman la base del $\mathscr{N}(\mathbf{T})$. Es decir

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{k} c^i \mathbf{e}_i \in \mathscr{N}(\mathbf{T}). \qquad \text{(A.111)}$$

Substrayendo (A.110) de (A.111), resulta

$$\sum_{i=1}^{k} c^i \mathbf{e}_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} c^i \mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \qquad \text{(A.112)}$$

La expresión anterior nos dice que el conjunto $\{\mathbf{e}_i\}_{i \leq k+r}$ es l.d., lo que es una contradicción ya que hemos supuesto que este conjunto es una base de V. Por lo tanto (A.106) es l.i.. Con esto queda demostrada la primera parte del teorema.

Para demostrar la segunda parte bastará probar que uno de los espacios, $\mathscr{N}(\mathbf{T})$ o $\mathbf{T}(V)$, es de dimensión infinita. En particular, si $\dim \mathscr{N}(\mathbf{T})$ es infinita, entonces no hay nada que probar. Supongamos que $\dim \mathscr{N}(\mathbf{T}) = k$, con k finito, y probemos que $\dim \mathbf{T}(V)$ es infinita. Para ello, bastará mostrar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ existe en $\mathbf{T}(V)$ un conjunto de n-elementos l.i.. Para ello, sea $\{\mathbf{e}_i\}_{i \leq k}$ una base de $\mathscr{N}(\mathbf{T}) \subset V$.

Como V es de dimensión infinita, cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, podemos construir

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_{k+n}\}, \tag{A.113}$$

donde $S \subset V$ y S es l.i. Por ser $\mathbf{T}$ una transformación lineal y $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq k}$ una base del $\mathscr{N}(\mathbf{T})$, se sigue que el conjunto $\{\mathbf{T}\mathbf{e}_i\}_{k+1\leq i\leq k+n}$ es un conjunto l.i. de n vectores en $\mathbf{T}(V)$ (si fuera l.d., S resultaría l.d.). Como n es arbitrario queda probado que $\dim \mathbf{T}(V)$ es infinita. ■

De acuerdo a lo ya visto cuando presentamos el concepto de morfismo, la transformación lineal $\mathbf{T} : U \to V$ es un *isomorfismo* si es biyectiva. Si tal transformación existe diremos que U y V son *isomorfos*.

Teorema A.17 *Dos espacios vectoriales U y V de dimensión finita son isomorfos si y sólo si son de la misma dimensión.*

Demostración. Supongamos U y V isomorfos, luego existe $\mathbf{T} : U \to V$ biyectiva. Sea $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ una base de U. Vamos a mostrar que los elementos $\{\mathbf{T}\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ forman una base de V y por lo tanto $\dim U = \dim V$. Para ello, supongamos que el conjunto $\{\mathbf{T}\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ sea l.d.. Luego existen escalares $a_i \in \mathbb{R}$ no todos nulos tal que

$$a_i \mathbf{T}\mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \tag{A.114}$$

Como $\mathbf{T}$ es lineal

$$\mathbf{T}(a_i\mathbf{e}_i) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad a_i\mathbf{e}_i = \mathbf{0}. \tag{A.115}$$

Lo anterior nos dice que $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ es l.d., lo que es una contradicción ya que es una base de U. Por lo tanto, todos los a_i son nulos. De lo anterior y de (A.114) se sigue que el conjunto $\{\mathbf{T}\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ es l.i.. Como $\mathbf{T}$ es biyectiva, para $\mathbf{v} \in V$ arbitrario, existe un único $\mathbf{u} \in U$ tal que

$$\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}(u^i\mathbf{e}_i) = u^i\mathbf{T}(\mathbf{e}_i). \tag{A.116}$$

Es decir, todo elemento $\mathbf{v} \in V$ puede ser escrito en forma única como una combinación lineal de los elementos del conjunto $\{\mathbf{T}\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$. Luego $\text{span}(\{\mathbf{T}\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}) = V$ y $\dim U = \dim V$.

Para finalizar la demostración, suponemos ahora que los dos espacios tienen la misma dimensión, $\dim U = \dim V$. Designemos con $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ y $\{\mathbf{d}_i\}_{i\leq n}$ las bases de U y V, respectivamente. Como dichas bases tienen el mismo número de elementos, podemos construir una transformación lineal biyectiva $\hat{f}$ tal que

$$\hat{f} : \{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n} \mapsto \{\mathbf{d}_i\}_{i\leq n}. \tag{A.117}$$

Sea $\mathbf{u} \in U$ arbitrario, luego la transformación $\mathbf{T}$ definida por

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = u^i\mathbf{T}(\mathbf{e}_i), \tag{A.118}$$

donde u^i, $i \leq n$, son las componentes de $\mathbf{u}$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$, es claramente lineal, inyectiva y $\mathscr{R}(\mathbf{T}) = V$. Luego, $\mathbf{T}$ es biyectiva. Por lo tanto U y V son isomor-

fos. ■

Corolario A.3 *Todo espacio vectorial n-dimensional es isomorfo con el espacio cartesiano* $\mathbb{R}^n$.

Teorema A.18 *Sean U y V dos espacios vectoriales isomorfos luego* $\mathbf{T} : U \to V$ *es un isomorfismo si y sólo si las tres condiciones siguientes son satisfechas*

(1) $\mathscr{N}(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$,
(2) $\mathscr{R}(\mathbf{T}) = V$,
(3) $\mathbf{T}$ *aplica las bases de U sobre las bases de V*.

Supongamos ahora dos espacios vectoriales no necesariamente de la misma dimensión. El conjunto de todas las transformaciones lineales de U en V lo designaremos con $\mathscr{L}(U;V)$

$$\mathscr{L}(U;V) = \{\mathbf{T};\, \mathbf{T} : U \to V, \mathbf{T} \text{ es lineal}\}. \tag{A.119}$$

Si en $\mathscr{L}(U;V)$ introducimos las operaciones de adición y multiplicación por escalar, definidas de la siguiente manera

$$(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2)(\mathbf{u}) = \mathbf{T}_1(\mathbf{u}) + \mathbf{T}_2(\mathbf{u}), \qquad \forall \mathbf{u} \in U, \tag{A.120}$$

$$(a\mathbf{T})(\mathbf{u}) = a\mathbf{T}(\mathbf{u}), \qquad \forall \mathbf{u} \in U, \forall a \in \mathbb{R}, \tag{A.121}$$

tendremos que el conjunto $\mathscr{L}(U;V)$ es en un espacio vectorial. El elemento nulo de $\mathscr{L}(U;V)$ será representado con el símbolo $\mathbf{O}$.

Teorema A.19 $\dim \mathscr{L}(U;V) = \dim U \dim V$.

Demostración. Sean $\{\mathbf{f}_i\}_{i\leq m}$ $\{\mathbf{e}_i\}_{i\leq n}$ bases de U y V, respectivamente. Definamos la transformación lineal

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha) : U \to V, \tag{A.122}$$

de la siguiente manera

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)(\mathbf{f}_\beta) = \delta^\alpha_\beta \mathbf{e}_i, \tag{A.123}$$

donde $i = 1,\ldots,n$ y $\alpha,\beta = 1,\ldots,m$. En este punto debemos notar que $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)$ debe interpretarse como un símbolo para indicar la transformación definida en (A.123). Las operaciones $\otimes$ y $\mathbf{f}^\alpha$ serán definidas más adelante.

Vamos a mostrar que el conjunto $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha), i = 1,\ldots,n,\, \alpha = 1,\ldots,m\}$ forman una base de $\mathscr{L}(U;V)$. Para ello mostraremos primero que el conjunto es l.i.. Supongamos así que el conjunto es l.d., luego existen escalares $a^i_{\cdot\alpha}$ $i = 1,\ldots,n$, $\alpha = 1,\ldots m$, no todos nulos tales que

$$a^i_{\cdot\alpha}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha) = \mathbf{O}. \tag{A.124}$$

Por la definición de adición y multiplicación por escalar se sigue

$$a^i_{\cdot\alpha}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)(\mathbf{u}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{u} \in U. \tag{A.125}$$

En particular, para $\mathbf{u} = \mathbf{f}_\beta$, $\beta = 1,\ldots,m$, tenemos

$$a^i_{.\alpha}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)(\mathbf{f}_\beta) = \mathbf{0} \quad \beta = 1,\ldots,m. \tag{A.126}$$

De (A.123) tenemos

$$a^i_{.\alpha}\delta^\alpha_\beta \mathbf{e}_i = a^i_\beta \mathbf{e}_i = \mathbf{0}, \quad \beta = 1,\ldots,m. \tag{A.127}$$

Dado que $\{\mathbf{e}_i, i = 1,\ldots,m\}$ es una base de V, (A.127) es equivalente a

$$a^i_{.\beta} = 0 \quad i = 1,\ldots,n,\ \beta = 1,\ldots,m. \tag{A.128}$$

Luego, resulta que el conjunto $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha), i = 1,\ldots,n,\ \alpha = 1,\ldots,m\}$ es l.i.. Ahora probaremos que este conjunto es generador de $\mathscr{L}(U;V)$. Sea $\mathbf{T}$ un elemento arbitrario de $\mathscr{L}(U;V)$. Luego, $\mathbf{T}(\mathbf{f}_\beta)$ es un vector de V y por lo tanto podemos expresarlo como combinación lineal de su base, es decir

$$\mathbf{T}(\mathbf{f}_\beta) = T^i_{.\beta}\mathbf{e}_i. \tag{A.129}$$

De esta expresión y de (A.123) obtenemos

$$\mathbf{T}(\mathbf{f}_\beta) = T^i_{.\alpha}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)(\mathbf{f}_\beta), \tag{A.130}$$

de donde

$$\mathbf{T} = T^i_{.\alpha}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha). \tag{A.131}$$

A su vez, como ya vimos que $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)\}$ es l.i. se concluye que dicho conjunto es una base de $\mathscr{L}(U;V)$. ■

La base $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)\}$ de $\mathscr{L}(U;V)$ asi descripta es llamada *base producto respecto a las bases* $\{\mathbf{e}_i\}$ *y* $\{\mathbf{f}^\alpha\}$. Las componentes $T^i_{.\alpha}$ de $\mathbf{T}$ relativas a $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)\}$ son llamadas *componentes de* $\mathbf{T}$ *respecto a la base producto*. La expresión (A.129) caracteriza estas componentes. En particular, si tomamos un vector $\mathbf{u} \in U$ arbitrario, de componentes u^α respecto a la base $\{\mathbf{f}_\alpha\}$ de U, la imagen $\mathbf{T}(\mathbf{u})$ de $\mathbf{u}$ bajo $\mathbf{T}$ tiene la siguiente forma en función de sus componentes respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V:

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) == T^i_{.\alpha}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)u^\alpha \mathbf{f}_\alpha = T^i_{.\alpha}u^\alpha \mathbf{e}_i. \tag{A.132}$$

Como una consecuencia de (A.122) y (A.123), la base $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)\}$ de $\mathscr{L}(U;V)$ conduce a un isomorfismo entre $\mathscr{L}(U;V)$ y $\mathbb{R}^{n\times m}$

$$K : \mathscr{L}(U;V) \to \mathbb{R}^{n\times m}, \tag{A.133}$$

definido por

$$K(\mathbf{T}) = [T^i_{.\alpha}], \tag{A.134}$$

donde $[T^i_{.\alpha}]$ representa una matriz cuyo coeficiente ubicado en la i-ésima fila α-ésima columna es $T^i_{.\alpha}$. En particular $K(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}^\alpha)$ es una matriz con todos los coeficientes nulos excepto el ubicado en la fila i columna α, que vale 1.

Supongamos ahora un cambio de bases, sean $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ y $\{\overline{\mathbf{f}_\alpha}\}$ las nuevas bases de V y U, respectivamente. Las componentes de $\mathbf{T}$ satisfacen la siguiente regla de transformación (transformación de bases)

$$T^i_{.\alpha} = \bar{e}^i_k \overline{T}^k_{.\beta} f^\beta_\alpha, \tag{A.135}$$

donde $\bar{e}^i_j$ está definido en $(A.83)_2$ y f^β_α está definido por una expresión similar a $(A.83)_1$. Para demostrar (A.135) consideremos $\mathbf{T}(\mathbf{f}_\alpha)$, de (A.129) y (A.83) resulta

$$T^i_{.\alpha}\mathbf{e}_i = \mathbf{T}(\mathbf{f}_\alpha) = \mathbf{T}(f^\beta_\alpha \bar{\mathbf{f}}_\beta) = f^\beta_\alpha \overline{T}^k_{.\beta} \bar{\mathbf{e}}_k = f^\beta_\alpha \overline{T}^k_{.\beta} \bar{e}^i_k \mathbf{e}_i. \tag{A.136}$$

A continuación vamos a considerar algunos ejemplos del espacio $\mathscr{L}(U;V)$ que surgen al adoptar espacios particulares para U y V.

A.15 Isomorfismo Canónico

Sea $U = \mathbb{R}$. En este caso el espacio vectorial $\mathscr{L}(\mathbb{R};V)$ es una copia de V. En efecto, sea $\mathbf{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R};V)$ y construyamos la siguiente aplicación

$$\mathbf{I} : \mathscr{L}(\mathbb{R};V) \to V, \tag{A.137}$$

definida por

$$\mathbf{I}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}(1), \tag{A.138}$$

que, como vemos, es un isomorfismo. Como este isomorfismo puede establecerse sin recurrir a ninguna base, recibe el nombre de *isomorfismo canónico*. Lo anterior lo expresaremos por

$$\mathscr{L}(\mathbb{R};V) \simeq V. \tag{A.139}$$

Dos espacios vectoriales entre los cuales existe un isomorfismo canónico se dicen *canónicamente isomorfos*.

A.16 Espacio Dual Algebraico

Consideremos el espacio $\mathscr{L}(V;\mathbb{R})$, que recibe el nombre de *espacio dual algebraico de* V. Este espacio será representado por V^*. Los elementos de V^* son funcionales lineales de valor real definidos en V. Si $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base de V luego, la base producto de V^* será

$$(1 \otimes \mathbf{e}^i), \tag{A.140}$$

donde 1 es la base normal de $\mathbb{R}$. En este caso simplificaremos la notación del operador (A.140) eliminando el 1 y el símbolo $\otimes$. De esta manera $\{\mathbf{e}^i\}$ será llamada *base dual de* $\{\mathbf{e}_i\}$. De (A.123), las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\mathbf{e}^i\}$ están relacionadas a través de

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \delta^i_j. \tag{A.141}$$

Para distinguir los elementos de V y V^* los llamaremos, respectivamente, *vectores* y *covectores*. A su vez, si las componentes de los vectores son tomadas respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$, las de los covectores serán tomadas con respecto a su base dual, es decir la base $\{\mathbf{e}^i\}$.

Sean ahora $\{\mathbf{e}_i\}$ y $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$ dos bases de V relacionadas a través de (A.83), luego las correspondientes bases duales $\{\mathbf{e}^i\}$, $\{\bar{\mathbf{e}}^i\}$ están relacionadas de la siguiente forma

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_i) = \bar{\mathbf{e}}^k(\bar{\mathbf{e}}_k) = \bar{\mathbf{e}}^k(\bar{e}^i_k\mathbf{e}_i) = (\bar{e}^i_k\bar{\mathbf{e}}^k)(\mathbf{e}_i), \tag{A.142}$$

$$\bar{\mathbf{e}}^i(\bar{\mathbf{e}}_i) = \mathbf{e}^k(\mathbf{e}_k) = \mathbf{e}^k(e^i_k\bar{\mathbf{e}}_i) = (e^i_k\mathbf{e}^k)(\bar{\mathbf{e}}_i), \tag{A.143}$$

de donde

$$\mathbf{e}^i = \bar{e}^i_k\bar{\mathbf{e}}^k \quad \bar{\mathbf{e}}^i = e^i_k\mathbf{e}^k. \tag{A.144}$$

A su vez, las leyes de transformación para las componentes del covector $u^* = u_i\mathbf{e}^i = \bar{u}_i\bar{\mathbf{e}}^i$ serán

$$u_i = e^k_i\bar{u}_k \quad \bar{u}_i = \bar{e}^k_i u_k, \tag{A.145}$$

que se deducen fácilmente.

Consideremos ahora el espacio dual de V^*, es decir $\mathscr{L}(V^*;\mathbb{R})$, que designaremos V^{**}. Vamos a mostrar que V^{**} es canónicamente isomorfo con V. Para ello consideremos $\mathbf{u} \in V$ arbitrario pero fijo, definamos la función de valor real, $\mathbf{u}^{**}$ en V^* dada por

$$\mathbf{u}^{**}(\mathbf{w}) = \mathbf{w}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{w} \in V^*. \tag{A.146}$$

Luego, la transformación

$$(\cdot)^{**} : \mathscr{L}(V^*;\mathbb{R}) \to V, \tag{A.147}$$

es un isomorfismo canónico. Debido a este resultado, diremos que la relación entre V y V^* es *reflexiva* como ciertamente ya es sugerida por la palabra *dual*.

La expresión (A.146) puede expresarse a través de una notación más simétrica. Sea $\mathbf{u} \in V$ y $\mathbf{w} \in V^*$, designemos (A.146) de la siguiente manera:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle \mathbf{w}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^{**}(\mathbf{w}). \tag{A.148}$$

La aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V^* \to \mathbb{R}, \tag{A.149}$$

tiene las siguientes propiedades

(1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es *bilineal*, es decir que es lineal respecto a cada uno de sus argumentos;
(2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es *definida*, es decir que si $\mathbf{u} \in V$ es escogido y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{w} \in V^*$ entonces se tiene $\mathbf{u} = \mathbf{0}$; recíprocamente si $\mathbf{w} \in V^*$ es escogido y $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{u} \in V$ entonces se tiene $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Esta definición nos permite extender el concepto de *ortogonalidad*. Así, si $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = 0$, entonces se dice que el vector $\mathbf{u}$ es *ortogonal* al covector $\mathbf{w}$, y viceversa.

A.16.1 Complemento Ortogonal

Sea X un subespacio del espacio vectorial V y sea V^* el espacio dual (algebraico) de V. El conjunto de todos los funcionales lineales $\mathbf{f} \in \mathbf{V}^*$ tales que

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in X, \tag{A.150}$$

es llamado *complemento ortogonal* de X y será representado por $X^\perp$. Como podemos observar, $X^\perp$ es un subespacio vectorial del espacio dual V^* ($X^\perp \subset V^*$).

Teorema A.20 *Sea X un subespacio de dimensión finita del espacio vectorial V. Luego se verifica*

$$(X^\perp)^\perp = X^{\perp\perp} = X. \tag{A.151}$$

Demostración. Una representación implícita del subespacio X está dada por

$$X = \{\mathbf{x} \in V;\, \langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = 0 \; \forall \mathbf{f} \in \mathbf{X}^\perp\}. \tag{A.152}$$

Luego si $\mathbf{x} \in X^{\perp\perp}$ entonces $\langle \mathbf{f}, \mathbf{x} \rangle = 0 \; \forall \mathbf{f} \in \mathbf{X}^\perp$ lo que implica que $\mathbf{x} \in X$ y por lo tanto $X^{\perp\perp} \subset X$. La demostración de que $X \subset X^{\perp\perp}$ es trivial y el resultado queda demostrado. ■

Teorema A.21 *Sean X e Y dos subespacios de dimensión finita de V. Luego*

$$(X \cap Y)^\perp = X^\perp + Y^\perp. \tag{A.153}$$

Demostración. Sea $\mathbf{w} \in (X^\perp + Y^\perp)^\perp$ luego

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{X}^\perp \qquad \Rightarrow \mathbf{w} \in X^{\perp\perp}, \tag{A.154}$$

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{g} \in \mathbf{Y}^\perp \qquad \Rightarrow \mathbf{w} \in Y^{\perp\perp}, \tag{A.155}$$

luego,

$$\mathbf{w} \in (X^\perp + Y^\perp)^\perp \Rightarrow \mathbf{w} \in X^{\perp\perp} \cap Y^{\perp\perp} = X \cap Y, \tag{A.156}$$

por lo que resulta

$$(X^\perp + Y^\perp)^\perp \subset X \cap Y, \tag{A.157}$$

y tomando el complemento ortogonal tenemos

$$(X \cap Y)^\perp \subset (X^\perp + Y^\perp). \tag{A.158}$$

Recíprocamente, si $\mathbf{w} \in X \cap Y$ tenemos

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{f} \in \mathbf{X}^{\perp}, \tag{A.159}$$

$$\langle \mathbf{g}, \mathbf{w} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{g} \in \mathbf{Y}^{\perp}, \tag{A.160}$$

luego tenemos que $\mathbf{w} \in (X^{\perp} + Y^{\perp})^{\perp}$, implicando que $X \cap Y \subset (X^{\perp} + Y^{\perp})^{\perp}$, y tomando el complemento ortogonal

$$X^{\perp} + Y^{\perp} \subset (X \cap Y)^{\perp}, \tag{A.161}$$

con lo que finalizamos la demostración del teorema. ■

El lector puede observar que los dos teoremas anteriores parten de la hipótesis de que los subespacios son de dimensión finita. Sólo en estos casos, y haciendo uso sólamente de la estructura algebraica del espacio vectorial, fue posible demostrar los dos teoremas anteriores. Para dimensión infinita los resultados anteriores en general no se verifican. Para que esto ocurra será necesario imponer restricciones ahora asociadas a la estructura *topológica* del espacio V.

A.16.2 Conos Conjugados Positivos y Negativos

El *cono conjugado positivo* del conjunto S del espacio vectorial V es el subconjunto S^{+} de V^{*} definido por

$$S^{+} = \{\mathbf{f} \in V^{*};\, \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \geq 0 \; \forall \mathbf{v} \in S\}. \tag{A.162}$$

De la misma manera, el *cono conjugado negativo* del conjunto S del espacio vectorial V es el subconjunto S^{-} de V^{*} definido por

$$S^{-} = \{\mathbf{f} \in V^{*};\, \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \leq 0 \; \forall \mathbf{v} \in S\}. \tag{A.163}$$

Observe que S^{+} y S^{-} son conos convexos no vacíos, ya que siempre contienen el funcional nulo. Además, si S es un subespacio de V resulta

$$S^{+} = S^{-} = S^{\perp}, \tag{A.164}$$

por lo que el concepto de cono conjugado puede ser visto como una generalización del concepto de complemento ortogonal. La Figura A.1 nos presenta una representación gráfica de S^{+} y S^{-} en el caso de V ser un espacio bidimensional.

Igualmente, los teoremas a continuación son una generalización de los teoremas presentados en la sección anterior.

Teorema A.22 *Sea C un cono convexo de vértice en el origen y suponga existe un número finito de elementos $\mathbf{f}_{\alpha} \in \mathbf{V}^{*}$, $\alpha \in J = \{1, \ldots, n\}$ tal que*

$$C = \{\mathbf{v} \in V;\, \langle \mathbf{f}_{\alpha}; \mathbf{v} \rangle \geq 0 \; \forall \alpha \in J\}, \tag{A.165}$$

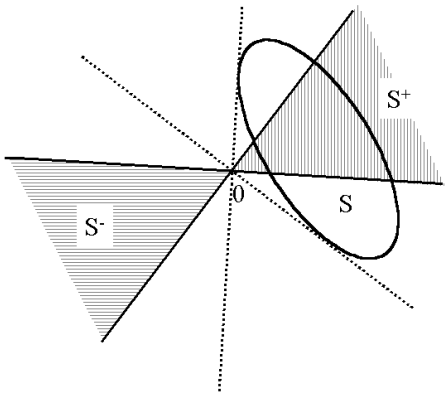


Fig. A.1 Conos conjugados positivos y negativos de un conjunto.

luego se verifica

$$(C^+)^+ = C, \tag{A.166}$$

$$(C^-)^- = C. \tag{A.167}$$

Teorema A.23 *Sean C_1 y C_2 dos conos convexos definidos como en el Teorema A.22, luego*

$$(C_1 \cap C_2)^+ = C_1^+ + C_2^+; \;\; (C_1 \cap C_2)^- = C_1^- + C_2^-. \tag{A.168}$$

La demostración de estos dos teoremas es enteramente similar a la de los teoremas respectivos (Teorema A.20 y Teorema A.21) de la sección anterior.

A.17 Álgebra de V

El espacio vectorial $\mathscr{L}(V;V)$ consiste de todas las transformaciones lineales de V en sí mismo. Estas transformaciones serán llamadas *tensores*[1]. Si $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base de V, la base producto de $\mathscr{L}(V;V)$ será $\{(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j, i, j = 1, \ldots, n\}$ definidas (A.123) substituyendo $\mathbf{f}^\alpha$ por $\mathbf{e}^j$. De esta manera, las componentes de un tensor $\mathbf{T} \in \mathscr{L}(V;V)$ respecto a esta base serán

$$\mathbf{T} = T^i_{\cdot j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j). \tag{A.169}$$

Cuando trabajamos con tensores, es decir con transformaciones (lineales) que pertenecen a $\mathscr{L}(V;V)$, es común eliminar los paréntesis alrededor del vector argumento. De esta manera, de ahora en adelante usaremos la notación

[1] De forma más precisa cabería decir *tensores de segundo orden*, pero simplificaremos la denominación en este contexto.

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{T}\mathbf{u}. \tag{A.170}$$

Adoptada la notación anterior, las componentes de $\mathbf{T}$ quedan definidas por (A.129), es decir

$$\mathbf{T}\mathbf{e}_i = T^j_{.i}\mathbf{e}_j \quad i = 1,\ldots,n. \tag{A.171}$$

De (A.171), si $\mathbf{v} \in V$ y $\mathbf{v} = v^i\mathbf{e}_i$, se tiene

$$\mathbf{T}\mathbf{v} = v^j T^i_{.j}\mathbf{e}_i. \tag{A.172}$$

En otras palabras las componentes de la imagen de $\mathbf{v}$ bajo la transformación (tensor) $\mathbf{T}$ respecto a la base de V están dadas por

$$T^i_{.j}v^j \quad i = 1,\ldots,n. \tag{A.173}$$

De (A.171) se concluye también que la transformación identidad $\mathbf{I}$ tiene, con respecto a cualquier base de V, las componentes δ^i_j.

En $\mathscr{L}(V;V)$ podemos definir la composición entre sus elementos de una manera natural. Para ello, dados $\mathbf{T}$ y $\mathbf{L} \in \mathscr{L}(V;V)$ definimos la *multiplicación* $\mathbf{TL}$ como la composición de los tensores $\mathbf{T}$ y $\mathbf{L}$, es decir

$$\mathbf{TL}\mathbf{v} = (\mathbf{T}\circ\mathbf{L})\mathbf{v} = \mathbf{T}(\mathbf{L}\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \tag{A.174}$$

Como ya vimos al estudiar composición de funciones, la multiplicación es asociativa, distributiva pero, en general, no es conmutativa. Un espacio vectorial en el que la operación anterior (multiplicación) está definida es llamado *álgebra*. De las definiciones anteriores, podemos observar existe un isomorfismo entre el álgebra $\mathscr{L}(V;V)$ y el álgebra matricial $\mathbb{R}^{n\times n}$. En efecto, recordando (A.133), el tensor $\mathbf{T}$ está en correspondencia con la matriz de coeficientes $[T^i_{.j}]$ respecto a cualquier base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V. De (A.174) podemos mostrar fácilmente que la multiplicación de tensores corresponderá al producto matricial de sus respectivas matrices. En efecto, las componentes de $\mathbf{TL}$ quedan definidas a través de (A.129)

$$\mathbf{TL}\mathbf{e}_j = (\mathbf{TL})^i_{.j}\mathbf{e}_i, \tag{A.175}$$

a su vez, de (A.174) resulta

$$\mathbf{TL}\mathbf{e}_j = \mathbf{T}(\mathbf{L}\mathbf{e}_j) = \mathbf{T}(L^k_{.j}\mathbf{e}_k) = L^k_{.j}\mathbf{T}\mathbf{e}_k = L^k_{.j}T^i_{.k}\mathbf{e}_i. \tag{A.176}$$

De ambas expresiones obtenemos finalmente

$$(\mathbf{TL})^i_{.j} = T^i_{.k}L^k_{.j}. \tag{A.177}$$

La expresión anterior nos dice que la matriz $[(\mathbf{TL})^i_{.j}]$, es el producto matricial entre las matrices $[T^i_{.j}]$ y $[L^i_{.j}]$.

Supongamos ahora un cambio de base de $\{\mathbf{e}_i\}$ para $\{\bar{\mathbf{e}}_i\}$. Luego, las componentes del tensor $\mathbf{T} \in \mathscr{L}(V;V)$ satisfacen la siguiente regla de transformación

$$T^i_{.j} = \overline{e}^i_r \overline{T}^r_{.k} e^k_j, \tag{A.178}$$

donde $\overline{e}^i_j$ y e^i_j están definidas en (A.83).

De acuerdo a la regla de transformación anterior se sigue que es posible definir las siguientes funciones

$$\operatorname{tr}\mathbf{T} = T^i{}_i = \overline{T}^i_{.i}, \tag{A.179}$$

$$\det\mathbf{T} = \det[T^i_{.j}] = \det[\overline{T}^i_{.j}], \tag{A.180}$$

llamadas *trazo* y *determinante* del tensor $\mathbf{T}$, respectivamente. Las funciones trazo y determinante están bien definidas en el sentido de que a cada tensor le corresponde un único trazo y un único determinante. En otras palabras, estas funciones admiten una representación independiente de la representación dada a través de sus componentes. Podemos observar también que

(i) el trazo es una función lineal, la función determinante no, excepto si $\dim V = 1$;

(ii) se verifica que

$$\operatorname{tr}(\mathbf{TL}) = \operatorname{tr}(\mathbf{LT}), \tag{A.181}$$

en efecto

$$\operatorname{tr}(\mathbf{TL}) = (\mathbf{TL})^i_{.i} = T^i_{.k} L^k_{.i} = L^k_{.i} T^i_{.k} = (\mathbf{LT})^k_{.k} = \operatorname{tr}(\mathbf{LT}), \tag{A.182}$$

(iii) y también se verifica

$$\det(\mathbf{TL}) = (\det\mathbf{T})(\det\mathbf{L}) = \det(\mathbf{LT}), \tag{A.183}$$

donde para demostrar lo anterior, basta recordar

$$\det[T^i_{.j}] = \frac{1}{n!} \delta^{i_1 \cdots i_n}_{j_1 \cdots j_n} T^{j_1}_{.i_1} T^{j_n}_{.i_n}, \tag{A.184}$$

donde

$$\delta^{i_1 \cdots i_n}_{j_1 \cdots j_n} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i_1 \cdots i_n) \text{ es una permutación par de } (j_1 \cdots j_n), \\ -1 & \text{si } (i_1 \cdots i_n) \text{ es una permutación impar de } (j_1 \cdots j_n), \\ 0 & \text{en los demás casos } \neq j, \end{cases} \tag{A.185}$$

luego, de (A.180)

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{TL}) = \det[(TL)^i_{.j}] = \\ \left(\frac{1}{n!} \delta^{k_1 \cdots k_n}_{j_1 \cdots j_n} (T^{j_1}_{.k_1} \cdots T^{j_n}_{.k_n})\right) \left(\frac{1}{n!} \delta^{i_1 \cdots i_n}_{k_1 \cdots k_n} (L^{k_1}_{.i_1} \cdots L^{k_n}_{.i_n}\right) = \\ (\det\mathbf{T})(\det\mathbf{L}) = (\det\mathbf{L})(\det\mathbf{T}) = \det(\mathbf{LT}). \end{aligned} \tag{A.186}$$

La transformación $\mathbf{L}$ es *no singular* si es un isomorfismo de V, caso contrario diremos que es *singular*. Si $\mathbf{L}$ es no singular está definida su inversa $\mathbf{L}^{-1}$. Dado el isomorfismo entre el álgebra $\mathscr{L}(V;V)$ y el álgebra matricial $\mathbb{R}^{n\times n}$ se sigue que $\mathbf{L}$ es invertible, o no singular, si y sólo si $\det\mathbf{L}\neq 0$. No resulta difícil mostrar la siguiente relación

$$\det\mathbf{L}^{-1}=(\det\mathbf{L})^{-1}\quad \text{para todo } \mathbf{L} \text{ no singular.} \tag{A.187}$$

A su vez, el conjunto de todas las transformacionaes lineales no singulares de V forman un grupo con respecto a la multiplicación en $\mathscr{L}(V;V)$. Representaremos este grupo con la notación $\mathscr{GLG}(V)$ y lo llamaremos *grupo lineal general de* V. El conjunto de las transformaciones para las cuales el determinante es ± 1, es un subgrupo de $\mathscr{GLG}(V)$ que será llamado *grupo unimodular* y será representado por $\mathscr{GU}(V)$. Si consideramos sólo las transformaciones lineales con determinante igual a 1 tendremos otro subgrupo que llamaremos *grupo lineal especial* y será representado por $\mathscr{GLE}(V)$. La relación existente entre $\mathscr{L}(V;V)$ y estos grupos la podemos ver en el siguiente diagrama

$$\underbrace{\mathscr{L}(V;V)\supset\mathscr{GLG}(V)\supset\mathscr{GU}(V)\supset\mathscr{GLE}(V)}_{\substack{\Downarrow \det\\ \mathbb{R}\supset\mathbb{R}\setminus\{0\}\supset 1,-1\supset 1}}. \tag{A.188}$$

A.18 Operadores Adjuntos

El espacio de todas las transformaciones lineales de V^* en sí mismo, $\mathscr{L}(V^*;V^*)$, es isomorfo al espacio $\mathscr{L}(V;V)$. El isomorfismo está determinado a través de la transformación

$$\begin{aligned}(\cdot)^A:\mathscr{L}(V;V)&\to\mathscr{L}(V^*;V^*),\\ \mathbf{L}&\mapsto(\mathbf{L})^A=\mathbf{L}^*,\end{aligned} \tag{A.189}$$

caracterizada por

$$\langle\mathbf{w}^*,\mathbf{Lv}\rangle=\langle\mathbf{L}^*\mathbf{w}^*,\mathbf{v}\rangle\quad \mathbf{v}\in V,\mathbf{w}^*\in V^*. \tag{A.190}$$

El operador $\mathbf{L}^*$ se llama *operador adjunto de* $\mathbf{L}$. A su vez, de la definición se sigue que $\mathbf{L}^*\mathbf{w}^*(\mathbf{v})=\mathbf{w}^*(\mathbf{Lv})$.

Este concepto lo podemos extender. En efecto, sean X e Y dos espacios vectoriales, y designemos con X^* y Y^* sus respectivos espacios duales (algebraicos). En otras palabras, si $\mathbf{x}^*\in X^*$ tenemos $\mathbf{x}^*\in\mathscr{L}(X,\mathbb{R})$ y la operación de dualidad será representada por

$$\mathbf{x}^*(\mathbf{x})=\langle\mathbf{x}^*,\mathbf{x}\rangle_{X^*\times X}\in\mathbb{R}. \tag{A.191}$$

De la misma manera para $\mathbf{y}^*\in Y^*$ tenemos $\mathbf{y}^*\in\mathscr{L}(Y,\mathbb{R})$ representada por

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{y})=\langle\mathbf{y}^*,\mathbf{y}\rangle_{Y^*\times Y}\in\mathbb{R}. \tag{A.192}$$

Luego, podemos establecer la siguiente correspondencia

$$\begin{aligned}(\cdot)^A : \mathscr{L}(X;Y) &\to \mathscr{L}(Y^*;X^*),\\ \mathbf{L} &\mapsto (\mathbf{L})^A = \mathbf{L}^*,\end{aligned} \tag{A.193}$$

caracterizada por

$$\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{L}\mathbf{x}\rangle_{Y^*\times Y} = \langle \mathbf{L}^*\mathbf{y}^*, \mathbf{x}\rangle_{X^*\times X} \quad \mathbf{x}\in X, \mathbf{y}^*\in Y^*. \tag{A.194}$$

Como antes, el operador $\mathbf{L}^*$ se llama *operador adjunto de* $\mathbf{L}$, y de la definición se sigue que $\mathbf{L}^*\mathbf{y}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*(\mathbf{L}\mathbf{x})$.

Finalmente, el lector puede verificar que el operador adjunto es único.

Ahora bien, si los espacios X e Y son de dimensión finita podemos verificar las siguientes relaciones entre el operador y su operador adjunto.

Teorema A.24 *Sean X e Y de dimensión finita, luego son satisfechas las siguientes relaciones*

i) $\mathscr{N}(\mathbf{T}) = \mathscr{R}(\mathbf{T}^*)^\perp$,
ii) $\mathscr{R}(\mathbf{T}) = \mathscr{N}(\mathbf{T}^*)^\perp$,
iii) $\mathscr{N}(\mathbf{T}^*) = \mathscr{R}(\mathbf{T})^\perp$,
iv) $\mathscr{R}(\mathbf{T}^*) = \mathscr{N}(\mathbf{T})^\perp$.

Demostración. Veamos las primeras dos afirmaciones.

i) $\forall \mathbf{x}\in\mathscr{N}(\mathbf{T})$ se tiene $\mathbf{T}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ y por lo tanto $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x}\rangle_{Y^*\times Y} = 0$, $\forall \mathbf{y}^*\in Y^*$, o sea que $\langle \mathbf{T}^*\mathbf{y}^*, \mathbf{x}\rangle_{X^*\times X} = 0$, $\forall \mathbf{y}^*\in Y^*$ que es equivalente a decir que $\mathbf{x}\in\mathscr{R}(\mathbf{T}^*)^\perp$.

ii) $\forall \mathbf{y}^*\in\mathscr{N}(\mathbf{T}^*)$ se verifica $\mathbf{T}^*\mathbf{y}^* = \mathbf{0}$, y en consecuencia $\langle \mathbf{T}^*\mathbf{y}^*, \mathbf{x}\rangle_{X^*\times X} = 0$, $\forall \mathbf{x}\in X$ lo que implica que $\langle \mathbf{y}^*, \mathbf{T}\mathbf{x}\rangle_{Y^*\times Y} = 0$, $\forall \mathbf{x}\in X$ y por lo tanto $\mathbf{y}^*\in\mathscr{R}(\mathbf{T})^\perp$. Luego $\mathscr{N}(\mathbf{T}^*) = \mathscr{R}(\mathbf{T})^\perp$. Tomando ahora el complemento ortogonal en ambos miembros de la expresión anterior queda demostrado el resultado.

Las otras dos afirmaciones se demuestran fácilmente intercambiando el papel de $\mathbf{T}$ por el de $\mathbf{T}^*$. ■

A.19 Transposición y Funciones Bilineales

Consideremos el espacio $\mathscr{L}(V;V^*)$. Respecto a la base $\{\mathbf{e}^i\}$ de V^*, todo elemento de $\mathscr{L}(V;V^*)$ puede ser escrito, en función de sus componentes, de la siguiente forma

$$\mathbf{A} = A_{ij}(\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}^j), \tag{A.195}$$

donde las componentes A_{ij} están definidas a través de

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_j = A_{ij}\mathbf{e}^i \tag{A.196}$$

La notación $(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)$ no es otra cosa que un caso particular de la notación general adoptada en (A.122)-(A.123). En efecto, si $\mathbf{v} \in V$ y v^i es la i-ésima componente de $\mathbf{v}$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V, de (A.196) se sigue

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = A_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)v^k\mathbf{e}_k = A_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j)v^k\delta^j_k = A_{ij}v^j\delta^j_k\mathbf{e}^i. \tag{A.197}$$

La expresión anterior nos dice que el covector $\mathbf{w} = \mathbf{A}\mathbf{v} \in V^*$ (vector imagen de $\mathbf{v}$ bajo la transformación lineal $\mathbf{A}$) tiene por componentes respecto a la base $\mathbf{e}^i$ de V^* los escalares $A_{ij}v^j$. La regla de transformación de las componentes de $\mathbf{A}$ para un cambio de base de $\{\mathbf{e}^i\}$ para $\{\overline{\mathbf{e}}^i\}$ es la siguiente

$$A_{ij} = e^r_i\overline{A}_{rk}e^k_j. \tag{A.198}$$

En efecto, de (A.196), (A.83) y (A.144), resulta

$$A_{ij}\mathbf{e}^i = \mathbf{A}\mathbf{e}_j = \mathbf{A}(e^k_j\overline{\mathbf{e}}_k) = e^k_j\mathbf{A}\overline{\mathbf{e}}_k = e^k_j\overline{A}_{rk}\overline{\mathbf{e}}^r = e^k_j\overline{A}_{rk}e^r_i\mathbf{e}^i = e^r_i\overline{A}_{rk}e^k_j\mathbf{e}^i. \tag{A.199}$$

El espacio $\mathscr{L}(V;V^*)$ es isomorfo a sí mismo a través de la operación llamada *transposición* que es definida de la siguiente manera

$$(\cdot)^T : \mathscr{L}(V;V^*) \to \mathscr{L}(V;V^*), \tag{A.200}$$

tal que

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{A}^T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \quad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V, \mathbf{A} \in \mathscr{L}(V;V^*). \tag{A.201}$$

Respecto a cualquier base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V, la matriz de las componentes de $\mathbf{A}^T$ es la transpuesta de la correspondiente a $\mathbf{A}$

$$A^T_{ji} = A_{ij} \quad i,j = 1,\ldots,n. \tag{A.202}$$

Para demostrar lo anterior, resulta suficiente recordar (A.139), (A.148) y (A.196). En efecto

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{e}_i, A_{rj}\mathbf{e}^r\rangle = A_{rj}\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^r\rangle = A_{rj}\mathbf{e}^r(\mathbf{e}_i) = A_{rj}\delta^r_i = A_{ij}, \tag{A.203}$$

y por otro lado

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{A}^T\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\rangle = \langle A^T_{ri}\mathbf{e}^r, \mathbf{e}_j\rangle = A^T_{ri}\mathbf{e}^r(\mathbf{e}_j) = A^T_{ri}\delta^r_j = A^T_{ji}. \tag{A.204}$$

Diremos que $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(V;V^*)$ es *simétrico*, si es igual a su transpuesto, es decir si $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. De la definición de transposición (A.200) se sigue que $\mathbf{A}$ es simétrico si y sólo si

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{A}^T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \tag{A.205}$$

Diremos que $\mathbf{A} \in \mathscr{L}(V;V^*)$ es *antisimétrico* si es igual al negativo de su transpuesto, o sea que $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, es decir

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{A}^T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle -\mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = -\langle \mathbf{A}\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \tag{A.206}$$

La función (forma o funcional) dada por

$$f : V \times V \to \mathbb{R}, \tag{A.207}$$

se dice *bilineal* si es lineal con respecto a cada uno de sus argumentos. El conjunto $\mathscr{L}(V \times V; \mathbb{R})$ de todas la formas bilineales en $V \times V$ forma un espacio vectorial. En particular $\mathscr{L}(V \times V; \mathbb{R})$ es canónicamente isomorfo con $\mathscr{L}(V; V^*)$ y el isomorfismo canónico

$$\begin{aligned} \hat{(\cdot)} : \mathscr{L}(V; V^*) &\to \mathscr{L}(V \times V; \mathbb{R}), \\ \mathbf{A} &\mapsto \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \end{aligned} \tag{A.208}$$

está definido por

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle \quad \mathbf{A} \in L(V; V^*), \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{A.209}$$

En función de las componentes respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V, la expresión anterior está dada por

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{A}\mathbf{v} \rangle = \langle u^i \mathbf{e}_i, \mathbf{A} v^j \mathbf{e}_j \rangle = u^i v^j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{A}\mathbf{e}_j \rangle = \\ u^i v^j A_{ij} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^i \rangle = u^i v^j A_{ij}. \end{aligned} \tag{A.210}$$

Definición A.1 *La función bilineal* $\hat{\mathbf{A}}$ *se dice*

(1) positiva definida*, si*

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq 0, \tag{A.211}$$

y en este caso decimos también que el operador asociado $\mathbf{A}$ *es positivo definido;*

(2) positiva semidefinida*, si*

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq 0, \tag{A.212}$$

y en este caso decimos también que el operador asociado $\mathbf{A}$ *es positivo semidefinido;*

(3) simétrica*, si el operador asociado* $\mathbf{A}$ *es simétrico;*

(4) $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ *es llamada* forma cuadrática asociada al operador $\mathbf{A}$*, ver* (A.210)*.*

Los espacios vistos anteriormente son canónicamente isomorfos con otros espacios que pasamos a estudiar. Sea U y V dos espacios vectoriales arbitrarios y sean, por ejemplo, $\{\mathbf{f}_\alpha, \alpha = 1, \ldots, m\}$ y $\{\mathbf{e}_i, i = 1, \cdots, n\}$ sus respectivas bases.

Definición A.2 *El espacio dual del espacio de todas las transformaciones bilineales en* $U \times V$ *será llamado* espacio producto tensorial *y lo representaremo por* $U \otimes V$*, luego*

$$U \otimes V = (\mathscr{L}(U \times V, \mathbb{R}))^*. \tag{A.213}$$

Definición A.3 *Llamaremos* producto tensorial *a la función lineal* $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\in(\mathscr{L}(U\times V;\mathbb{R}))^*$ *definida por el par ordenado* $\mathbf{u}\in U$ *y* $\mathbf{v}\in V$ *tal que*

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})(\hat{\mathbf{A}})=\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v})\quad \hat{\mathbf{A}}\in\mathscr{L}(U\times V;\mathbb{R}). \tag{A.214}$$

En particular, $(\mathbf{f}_\alpha\otimes\mathbf{e}_i)$ es el producto tensorial de los elementos de la base de U y V. En forma similar a la demostración del Teorema A.19, podemos probar que $\{(\mathbf{f}_\alpha\otimes\mathbf{e}_i),\,\alpha=1,\ldots,m,\,i=1,\ldots,n\}$ forma una base de $U\otimes V$.

Es más, podemos definir un isomorfismo canónico entre $V\otimes U^*$ y $\mathscr{L}(U,V)$ de manera que a cada elemento de $V\otimes U^*$, $(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})$, le hace corresponder la transformación lineal de U en V definida de la siguiente manera

$$(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\mathbf{u}=\langle\mathbf{w},\mathbf{u}\rangle\mathbf{v}\quad\forall\mathbf{u}\in U. \tag{A.215}$$

Este isomorfismo permite reinterpretar la notación $(\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{f}^\alpha)$, introducida por primera vez en (A.122), como el producto tensorial de $\mathbf{e}_i$ con $\mathbf{f}^\alpha$.

Podemos ahora generalizar (A.213) a productos tensoriales que involucran más de dos espacios vectoriales $U,V,\ldots,W$. El espacio de todas las transformaciones *multilineales* en $U\times V\times\cdots\times W$ lo designaremos con $\mathscr{L}(U\times V\times\cdots\times W,\mathbb{R})$ y el espacio producto tensorial será

$$U\otimes V\otimes\cdots\otimes W=(\mathscr{L}(U\times V\times\cdots\times W,\mathbb{R}))^*. \tag{A.216}$$

Igualmente, si $\mathbf{u}\in U$, $\mathbf{v}\in V$, …, $\mathbf{w}\in W$, definiremos el producto tensorial $\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\cdots\otimes\mathbf{w}$ come sigue

$$[\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\cdots\otimes\mathbf{w}](\Psi)\equiv\Psi(\mathbf{u},\mathbf{v},\ldots,\mathbf{w})\quad\forall\Psi\in\mathscr{L}(U\times V\times\cdots\times W,\mathbb{R}). \tag{A.217}$$

Habiendo introducido el producto tensorial general, introduciremos el *espacio tensorial* τ^r_s *de orden* (r,s) *sobre* V de la siguiente manera

$$\tau^r_s=\underbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{ veces}}\otimes\underbrace{V\otimes V\otimes\cdots\otimes V}_{s\text{ veces}} \tag{A.218}$$

En función de sus componentes respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V, un tensor $\Psi\in\tau^r_s$ puede ser escrito como

$$\Psi=\Psi^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\mathbf{e}_{i_1}\otimes\mathbf{e}_{i_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}_{i_r}\otimes\mathbf{e}^{j_1}\otimes\mathbf{e}^{j_2}\otimes\cdots\otimes\mathbf{e}^{j_s}, \tag{A.219}$$

y donde para un cambio de base de $\{\mathbf{e}_i\}$ para $\{\overline{\mathbf{e}}_i\}$ las componentes satisfacen la siguiente ley de transformación:

$$\overline{\Psi}^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}=\overline{\mathbf{e}}^{i_1}_{k_1}\cdots\overline{\mathbf{e}}^{i_r}_{k_r}\overline{\mathbf{e}}^{t_1}_{j_1}\cdots\overline{\mathbf{e}}^{t_s}_{j_s}\Psi^{k_1\cdots k_r}_{t_1\cdots t_s}. \tag{A.220}$$

En (A.219) y (A.220) los números r y s son, respectivamente, los *órdenes contravariantes y covariantes* del tensor en cuestión. Si uno de estos números es nulo en ese caso será omitido. Así, el vector $\mathbf{v}$ en la expresión (A.86) es un tensor con-

travariante de orden 1 (vea la expresión (A.86), y el covector $\mathbf{u}$ en (A.145) es un tensor covariante de orden 1 (vea la expresión $(A.145)_1$).

Por otra parte, podemos definir varios tipos de *contracciones*. En particular podemos construir la siguiente operación

$$\mathbf{C}_1^1 \colon \tau_s^r \to \tau_{s-1}^{r-1}, \tag{A.221}$$

caracterizada por

$$\mathbf{C}_1^1(\mathbf{v}_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \mathbf{u}^1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}^s) = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{u}^1 \rangle (\mathbf{v}_2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{v}_r \otimes \mathbf{u}^2 \otimes \cdots \otimes \mathbf{u}^s), \tag{A.222}$$

que en función de las componentes resulta

$$[\mathbf{C}_1^1 \Psi]^{i_2 \cdots i_r}_{j_2 \cdots j_s} = \Psi^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} \delta^{j_1}_{i_1}. \tag{A.223}$$

A.20 Espacios con Producto Interno

En la sección anterior vimos que los espacios V y su dual V^* son isomorfos, pero no son canónicamente isomorfos. Sin embargo, podemos identificar V con V^* a través de una aplicación lineal particular

$$\mathbf{G} : V \to V^* \tag{A.224}$$

y, de esta manera, no tendremos necesidad de distinguir entre vectores y covectores. Como fue explicado en la Sección A.19, $\mathbf{G}$ corresponde a una única función bilineal $\hat{\mathbf{G}}$ definida en $V \times V$

$$\hat{\mathbf{G}} \in \mathscr{L}(V \times V, \mathbb{R}), \tag{A.225}$$

y a efecto de distinguir esta función la llamaremos *producto bilineal en* V. Ahora bien, una función bilineal es un producto bilineal si y sólo si satisface

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{u} \qquad \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}, \tag{A.226}$$

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \qquad \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{0}. \tag{A.227}$$

Por lo tanto, al construir $\mathbf{G}$ debemos llevar en cuenta las condiciones anteriores.

A su vez, la inversa de $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}^{-1}$, será un isomorfismo entre V y V^*, y corresponderá a una función bilineal única $\hat{\mathbf{G}}^*$, dual de $\hat{\mathbf{G}}$, definida en $V^* \times V^*$

$$\hat{\mathbf{G}}^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R} \quad \mathbf{G}^{-1} : V^* \to V. \tag{A.228}$$

Las operaciones $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}^{-1}$ reciben el nombre de operaciones que permiten pasar los vectores a covectores y viceversa. Es decir, en última instancia, permiten modificar la posición de los índices. En efecto, de (A.196) se sigue que las componentes de $\mathbf{G}$ con respecto a la base $\{\mathbf{e}^i\}$ están definidas por

$$\mathbf{G}\mathbf{e}_i = g_{ji}\mathbf{e}^j, \tag{A.229}$$

y las de $\mathbf{G}^{-1}$ respecto a la base $\{\mathbf{e}_i\}$ están definidas por

$$\mathbf{G}^{-1}\mathbf{e}^i = g^{ji}\mathbf{e}_j. \tag{A.230}$$

De estas dos últimas expresiones obtenemos

$$\mathbf{v}^* = v_j\mathbf{e}^j = \mathbf{G}\mathbf{v} = v^i\mathbf{G}\mathbf{e}_i = v^i g_{ji}\mathbf{e}^j \qquad \Rightarrow v_j = g_{ji}v^i, \tag{A.231}$$

$$\mathbf{v} = v^j\mathbf{e}_j = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{v}^* = v_i\mathbf{G}^{-1}\mathbf{e}^i = v_i g^{ji}\mathbf{e}_j \qquad \Rightarrow v^j = g^{ji}v_i, \tag{A.232}$$

donde v^i y v_i son las componentes i-ésima de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{v}^* = \mathbf{G}\mathbf{v}$ con respecto a las bases $\{\mathbf{e}_i\}$ de V y $\{\mathbf{e}^i\}$ del dual de V, respectivamente.

A su vez, diremos que el covector $\mathbf{G}\mathbf{v}$ está asociado con $\mathbf{v}$ a través de $\mathbf{G}$. Una vez establecido $\mathbf{G}$ y mantenido fijo, podemos ver $\mathbf{v}$ y $\mathbf{G}\mathbf{v}$ como un mismo objeto ya que uno determina el otro de manera única. Podemos así, substituir sistemáticamente todos los conceptos y operaciones que en general involucran al espacio dual V^* por las correspondientes operaciones en el espacio original V. En otras palabras

- las contracciones resultan funciones de elementos en $V \times V$,
- los tensores sobre V^* pueden ser reemplazados por sus correspondientes en V,
- etc.

A través de estas operaciones con $\mathbf{G}$ y $\mathbf{G}^{-1}$ podemos, dado un tensor $\mathbf{A}$, definir otros tensores asociados con él. En efecto, supongamos que $\mathbf{A}$ tenga las componentes $A_{ij}{}^{l}$ luego

$$A_{ij}{}^{l} = g_{jk}A_i{}^{kl} \quad A^{i}{}_{j}{}^{k} = g^{ir}g_{js}A_r{}^{sk}. \tag{A.233}$$

Como vemos, debido a estas operaciones la posición relativa de los índices pasa a ser importante.

Ahora bien, un producto bilineal es llamado *producto interno* si es simétrico positivo definido. En otras palabras, una función bilineal $\hat{\mathbf{A}}$ para ser producto interno debe satisfacer

(1) $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{v},\mathbf{u})$, es decir, el operador $\mathbf{A}$ asociado con $\hat{\mathbf{A}}$ debe ser simétrico ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$).
(2) $\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{u},\mathbf{u}) > 0$, $\forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0} \in V$.

Por otro lado, un espacio en el cual se ha definido un cierto producto interno es llamado *espacio con producto interno* o, también, *espacio euclidiano*.

Para definir este producto interno, sea $\{\mathbf{e}_i\}$ una base del espacio vectorial, luego podemos adoptar la siguiente aplicación lineal $\mathbf{G}$

$$\mathbf{G} = \delta_{ij}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j) = (\mathbf{e}^1 \otimes \mathbf{e}^1)\cdots(\mathbf{e}^n \otimes \mathbf{e}^n). \tag{A.234}$$

Vamos a mostrar que $\mathbf{G}$ definido en la expresión anterior es simétrico positivo definido. La simetría resulta obvia, a su vez

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{u},\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{G}\mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{u}, u^i\delta_{ji}\mathbf{e}^j\rangle = \delta_{ji}u^k u^i\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}^j\rangle = \delta_{ji}\delta_{kj}u^k u^i = u^i u^i, \tag{A.235}$$

luego

$$\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{u},\mathbf{u}) > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \tag{A.236}$$

En particular, la base $\{\mathbf{e}_i\}$ de V satisfaciendo la propiedad $\hat{\mathbf{G}}(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ recibe el nombre de *base ortonormal*. La razón de este nombre radica en que

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\mathbf{e}_i\rangle = \delta_{ji}\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{e}^j\rangle = \delta_{ji}\delta_k{}^j = \delta_{ki} \quad \Rightarrow \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\mathbf{e}_i\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = i, \\ 0 & \text{si } k \neq i. \end{cases} \tag{A.237}$$

Tenemos así los siguientes resultados.

Teorema A.25 *Dada una base arbitraria* $\{\mathbf{f}_i\}$*, existe una base ortonormal* $\{\mathbf{e}_i\}$ *tal que*

$$\text{span}\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_n\} = \text{span}\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n\}, \tag{A.238}$$

donde $n = \dim(\text{span}\{\mathbf{f}_i\})$.

Demostración. La construcción de esta base la haremos por inducción. Para iniciar el proceso hagamos

$$\mathbf{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{G}\mathbf{f}_1\rangle}}\mathbf{f}_1, \tag{A.239}$$

este vector $\mathbf{e}_1$ es unitario respecto al producto interno (A.234). Supongamos que hemos construído $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r\}$ tal que satisfaga (A.237) para $k = 1,\ldots,r$ (es decir son ortonormales en el sentido del producto interno). Vamos a construir $\mathbf{e}_{r+1}$. Para esto considere

$$\tilde{\mathbf{e}}_{r+1} = \mathbf{f}_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} a_i \mathbf{e}_i, \tag{A.240}$$

donde los escalares a_i van a ser definidos de manera que (A.237) sea satisfecha. Luego, el producto interno de $\tilde{\mathbf{e}}_{r+1}$ con $\mathbf{e}_j$ es

$$\langle \tilde{\mathbf{e}}_{r+1}, \mathbf{G}\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{f}_{r+1}, \mathbf{G}\mathbf{e}_j\rangle - \sum_{i=1}^{r} a_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{G}\mathbf{e}_j\rangle = \langle \mathbf{f}_{r+1}, \mathbf{G}\mathbf{e}_j\rangle - a_j, \quad j = 1,\ldots,r, \tag{A.241}$$

dado que, por construcción, los $\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r\}$ son ortonormales. Luego, como queremos que $\mathbf{e}_{r+1}$ sea ortogonal a $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r$, anulando la expresión anterior resulta

$$a_j = \langle \mathbf{f}_{r+1}, \mathbf{G}\mathbf{e}_j\rangle \quad j = 1,\ldots,r. \tag{A.242}$$

Luego

$$\mathbf{e}_{r+1} = \frac{1}{\sqrt{\langle \tilde{\mathbf{e}}_{r+1}, \mathbf{G}\tilde{\mathbf{e}}_{r+1}\rangle}}\tilde{\mathbf{e}}_{r+1}. \tag{A.243}$$

Con esto hemos probado que es posible construir un conjunto ortonormal. Falta demostrar que (A.238) es correcta. Dado que para $k = r$ se suponía válido el teorema, se tendrá que $\text{span}\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_r\} = \text{span}\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r\}$, luego

$$\text{span}\{\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_r\} \subset \text{span}\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{r+1}\}. \tag{A.244}$$

De (A.240) y (A.243) se sigue que

$$\mathbf{e}_{r+1} \in \text{span}\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{r+1}\}, \tag{A.245}$$

luego

$$\text{span}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r+1}\} \subset \text{span}\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{r+1}\}. \tag{A.246}$$

Recíprocamente, las mismas expresiones nos muestran que

$$\mathbf{f}_{r+1} \in \text{span}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r+1}\}, \tag{A.247}$$

luego

$$\text{span}\{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_{r+1}\} \subset \text{span}\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{r+1}\}. \tag{A.248}$$

con lo que queda demostrado el teorema. ■

Teorema A.26 *La base* $\{\mathbf{e}_i\}$ *es ortonormal si y sólo si*

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{G}\mathbf{e}_i. \tag{A.249}$$

Demostración. Si la base es ortonormal resulta de (A.249) y (A.234)

$$\mathbf{G}\mathbf{e}_i = \delta_{ji}\mathbf{e}^j = \mathbf{e}^i. \tag{A.250}$$

Si se verifica (A.249) resulta

$$\mathbf{G}\mathbf{e}_i = \delta_{ji}\mathbf{e}^j, \tag{A.251}$$

luego

$$\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{e}_k, \delta_{ji}\mathbf{e}^j \rangle = \delta_{ji}\delta^j_k = \delta_{ki}. \tag{A.252}$$

■

Es interesante observar que, dado que las componentes de $\mathbf{G}$ respecto a una base ortonormal $\{\mathbf{e}_i\}$ son los escalares δ_{ij}, no resulta necesario distinguir la posición relativa de los índices. En efecto, de (A.233), tenemos que para una posición relativa arbitraria de los índices resulta

$$A_{ij}{}^{l} = \delta_{jk}A_i{}^{kl} = A_i{}^{jl}. \tag{A.253}$$

Cuando el producto interno definido por un $\mathbf{G}$ determinado es adoptado (fijo), no precisamos retener $\mathbf{G}$ en la notación del producto interno, recurriendo así a la notación clásica

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \hat{\mathbf{G}}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{G}\mathbf{v} \rangle. \tag{A.254}$$

Recordando que $\mathbf{G}$ respecto a cualquier base $\{\mathbf{e}_i\}$ es tal que

$$\mathbf{G}\mathbf{e}_i = g_{ji}\mathbf{e}^j, \tag{A.255}$$

y que

$$\mathbf{e}^i(\mathbf{e}_j) = \langle \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}, \tag{A.256}$$

tendremos que (A.254) puede escribirse en función de sus componentes como

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \langle u^i \mathbf{e}_i, v^j g_{kj}\mathbf{e}^k \rangle = g_{kj}u^i v^j \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k \rangle = g_{kj}u^i v^j \delta_{ik} = g_{ij}u^i v^j = u_j v^j = u^i v_i, \tag{A.257}$$

donde hicimos uso de (A.231) y (A.232). En particular, si $\{\mathbf{e}_i\}$ es una base ortonormal resulta

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = u^i v^i. \tag{A.258}$$

Definición A.4 *Una transformación lineal* $\mathbf{Q}$ *del espacio vectorial con producto interno* V*, se dice* ortogonal *si preserva el producto interno, es decir*

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{Q}\mathbf{u}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V. \tag{A.259}$$

Particularizando la expresión anterior para una base ortonormal tenemos

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \mathbf{Q}\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{Q}\mathbf{e}_j = Q_{ki}Q_{kj}, \tag{A.260}$$

La expresión anterior nos dice que la transformación es ortogonal si la matriz asociada $[Q_{ij}]$ es una matriz ortogonal.

El conjunto de todas las transformaciones ortogonales de V forman un grupo, $\mathscr{O}(V)$, que es un subgrupo de $\mathscr{GLG}(V)$ (ver Sección A.17). De (A.260) se sigue que todas las transformaciones ortogonales tienen determinante igual a ± 1. Por lo tanto, $\mathscr{O}(V)$ es un subgrupo del grupo unimodular $\mathscr{U}(V)$ (ver Sección A.17).

Definición A.5 *Una transformación ortogonal se dice* propia *si su determinante es* 1*. El conjunto de todas las transformaciones propias ortogonales forman un grupo* $\mathscr{PO}(V)$ *que es un subgrupo de* $\mathscr{GLE}(V)$ *(ver Sección A.17).*

Como fue presentado en la Sección A.18, para toda transformación lineal $\mathbf{L} \in \mathscr{L}(V,V)$ existe una transformación adjunta $\mathbf{L}^A \in \mathscr{L}(V^*,V^*)$. Cuando un producto interno $\hat{\mathbf{G}}$ ha sido establecido, podemos definir una nueva transformación, $\tilde{\mathbf{L}}^A \in \mathscr{L}(V,V)$, de la siguiente manera

$$\tilde{\mathbf{L}}^A = \mathbf{G}^{-1} \circ \mathbf{L}^A \circ \mathbf{G}, \tag{A.261}$$

como se deduce del diagrama siguiente:

$$\begin{array}{ccc} V^* & \xrightarrow{\mathbf{L}^A} & V^* \\ \mathbf{G}\uparrow & & \downarrow\ \mathbf{G}^{-1} \\ V & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{L}}^A} & V \end{array} \tag{A.262}$$

En función de las componentes tenemos

$$(\tilde{L}^A)^i{}_j = g^{ik}(L^A)_k{}^l g_{lj}, \tag{A.263}$$

pero como $\mathbf{L}^A$ es el operador adjunto de $\mathbf{L}$, tenemos

$$(L^A)_k^{\ l} = (L)^l_{\ k}, \tag{A.264}$$

se sigue por lo tanto que

$$(\tilde{L^A})^i_{\ j} = g^{ik}(L)^l_{\ k} g_{lj}. \tag{A.265}$$

A continuación vamos a mostrar la deducción de (A.263) y (A.264)

$$\mathbf{L}^A : V^* \to V^* \qquad \Rightarrow \mathbf{L}^A = (L^A)_i^{\ j}(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j), \tag{A.266}$$

$$\tilde{\mathbf{L}^A} : V \to V \qquad \Rightarrow \tilde{\mathbf{L}}^A = (\tilde{L^A})^i_{\ j}(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j), \tag{A.267}$$

a su vez

$$(\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}_j)\mathbf{e}^k = \delta_j^k \mathbf{e}^i, \tag{A.268}$$

$$(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j)\mathbf{e}_k = \delta_k^j \mathbf{e}_i, \tag{A.269}$$

y además

$$\tilde{\mathbf{L}}^A \mathbf{e}_j = (\tilde{L^A})^i_{\ j}\mathbf{e}_i, \tag{A.270}$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{L}}^A \mathbf{e}_j &= \mathbf{G}^{-1} \circ \mathbf{L}^A(\mathbf{G}\mathbf{e}_j) = g_{lj}\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{L}^A\mathbf{e}^l) = \\ &= g_{lj}(L^A)_k^{\ l}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{e}^k = g_{lj}(L^A)_k^{\ l} g^{ik} e_i.\end{aligned} \tag{A.271}$$

De (A.270) y (A.271) se concluye (A.263).

Para demostrar (A.264) recordemos la definición (A.189)-(A.190)

$$\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{L}\mathbf{e}_j \rangle = \langle \mathbf{L}^A \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle. \tag{A.272}$$

Luego, el primer miembro resulta

$$\langle \mathbf{e}^i, \mathbf{L}\mathbf{e}_j \rangle = L^i_{\ j}, \tag{A.273}$$

el segundo miembro a su vez resulta

$$\langle \mathbf{L}^A \mathbf{e}^i, \mathbf{e}_j \rangle = (L^A)_j^{\ i}. \tag{A.274}$$

De (A.263) podemos observar que, si las bases son ortonormales, la matriz de las componentes de $\tilde{\mathbf{L}}^A$ es igual a la matriz de las componentes de $\mathbf{L}^A$ y, por lo tanto, es la transpuesta de la matriz asociada a las componentes de $\mathbf{L}$. A su vez, la función bilineal correspondiente a $\tilde{\mathbf{L}}^A$ es la transpuesta de la correspondiente a $\mathbf{L}$ (ver ecuación (A.254)). Como la observación anterior lo sugiere, podemos también caracterizar el operador $\tilde{\mathbf{L}}^A$ a partir de la siguiente condición

$$\mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{L}}^A \mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \tag{A.275}$$

Por todo lo anterior el operador $\tilde{\mathbf{L}}^A \in \mathscr{L}(V,V)$ es también llamado de *operador transpuesto* del operador $\mathbf{L} \in \mathscr{L}(V,V)$ y, por eso, es representado simplemente por $\mathbf{L}^T$.

Comparando esta condición con (A.259) se sigue que el tensor $\mathbf{Q}$ es ortogonal si y sólo si

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \tag{A.276}$$

o su equivalente

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1}. \tag{A.277}$$

Como muestran la definiciones anteriores, en un espacio con producto interno el espacio dual no precisa ser usado y/o ni siquiera mencionado.

El producto interno $\mathscr{G}$ en V permite definir productos internos en los espacios tensoriales sobre V. Por ejemplo, podemos definir un producto interno en τ_2^1 por la condición

$$(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w})\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\otimes\mathbf{c}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{w}\cdot\mathbf{c}), \tag{A.278}$$

válida para todo tensor $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}) \in \tau_2^1$. En particular, para el espacio de transformaciones lineales en V, $\mathscr{L}(V;V)$, el producto interno está dado por

$$\mathbf{L}\cdot\mathbf{N} = \mathrm{tr}(\mathbf{L}^T\mathbf{N}), \tag{A.279}$$

consistente con la condición $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b})$ para todo tensor $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})\cdot(\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}) \in \tau_1^1 \simeq \mathscr{L}(V;V)$.

En forma similar a la ya analizada, si V es un espacio con producto interno, una transformación lineal en $\mathscr{L}(V;V)$ se dice *simétrica* si coincide con su transpuesta, es decir, $\mathbf{L} = \mathbf{L}^T$. Se dice *antisimétrica* si $\mathbf{L} = -\mathbf{L}^T$.

Una transformación lineal $\mathbf{L}$ se dice *positiva definida* si la función bilineal asociada es positiva definida si

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{L}\mathbf{u} > 0 \quad \forall\mathbf{u} \in V, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \tag{A.280}$$

La parte *simétrica* de $\mathbf{L}$, $\mathrm{sym}\,\mathbf{L}$, o también $\mathbf{L}^s$, está dada por

$$\mathbf{L}^s = \mathrm{sym}\,\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}+\mathbf{L}^T), \tag{A.281}$$

y la parte *antisimétrica* por

$$\mathbf{L}^a = \mathrm{skw}\,\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L}-\mathbf{L}^T). \tag{A.282}$$

De las definiciones anteriores se sigue que toda transformación lineal $\mathbf{L}$ puede ser expresada a través de $\mathbf{L} = \mathbf{L}^s + \mathbf{L}^a$. Por otra parte, se sigue que

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{L}^s\mathbf{u}, \tag{A.283}$$

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{L}^a\mathbf{u} = 0 \quad \forall\mathbf{u} \in V. \tag{A.284}$$

De lo anterior, concluimos que **L** es positivo definido si y sólo si su parte simétrica lo es.

Apéndice B
Elementos del Análisis Real y Funcional

B.1 Introducción

En el apéndice anterior hemos presentado una serie de conceptos y definiciones útiles para el Capítulo 3 y siguientes. En particular, las definiciones de translación de un subespacio, de un cono, espacio dual, complemento ortogonal, cono conjugado, entre otros, fueron útiles para la construcción del Principio de la Potencia Virtual, y del Principio de la Potencia Virtual Complementaria. Lo mismo ocurre con el concepto de operador adjunto que corresponde en nuestra definición mecánica al operador de equilibrio ($\mathscr{D}$ y $\mathscr{D}^*$).

Sin embargo, tanto en las secciones anteriores como en cierta manera en el Capítulo 3, hemos usado una visión puramente algebraica que, para el caso de espacios vectoriales de dimensión finita, era suficiente para analizar lo que hemos presentado. Lo anterior no es suficiente si estamos trabajando en espacios de dimensión infinita (como es el caso de los espacios usualmente utilizados en Mecánica) ya que, por ejemplo, si $\mathscr{M}$ es un subespacio vectorial de X, en general, $(\mathscr{M}^{\perp})^{\perp} \subset \mathscr{M}$. Resulta así, necesario introducir otros conceptos tales como el de conjuntos abiertos, cerrados, convergencia y continuidad, entre otros, asociados a la estructura topológica que se desea proporcionar a los espacios de trabajo.

Para ello, veamos resumidamente algunos conceptos del sistema de números reales donde introducimos de manera usual la operación de adición, multiplicación y ordenamiento (si $x \leq y$ luego $x+z \leq z+y$, $\forall z \in \mathbb{R}$; si $x \geq 0$ e $y \geq 0$ luego $xy \geq 0$ y, de esta manera, "$\leq$" es um ordenamiento completo!).

Si $x \in \mathbb{R}$, el valor absoluto de x, designado por $|x|$, está definido por

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x \leq 0. \end{cases} \tag{B.1}$$

Sean $x, y \in \mathbb{R}$, luego se verifica la llamada desigualdad del triángulo

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \tag{B.2}$$

Observe también que, para $x, y \in \mathbb{R}$, el valor absoluto satisface $|x-y| \geq 0$, $|x-y| = 0$ si y sólo si $x = y$ y $|x-y| = |y-x|$.

También se verifica la denominada diferencia de valores abolutos, que establece, para $x, y \in \mathbb{R}$, que

$$||x| - |y|| \leq |x-y|. \tag{B.3}$$

Sean números reales $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$, la desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right). \tag{B.4}$$

Sea $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathscr{A}$ se verifica que $x \leq a$ luego, a es un límite superior del subconjunto $\mathscr{A}$ y, en este caso, diremos que el subconjunto $\mathscr{A}$ es limitado superiormente.

Sea $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente, supongamos que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que

- a es un límite superior de $\mathscr{A}$,
- $a \leq b$ para todo límite superior b de $\mathscr{A}$,

luego, a es el menor límite superior o *supremo* de $\mathscr{A}$. De la misma manera podemos definir subconjuntos limitados inferiormente, límite inferior e ínfimo de un subconjunto.

Aquí es interesante observar que el ordenamiento completo simplemente establece que todo subconjunto limitado superiormente (inferiormente) tiene un supremo (ínfimo). Por otro lado, no resulta difícil probar que el supremo (ínfimo) es único.

Veamos ahora algunas propiedades de los conjuntos de puntos que pueden ser extendidos a otros sistemas matemáticos más generales. La topología del sistema de números reales se refiere a los conceptos de conjuntos abiertos, vecindad y cierta clasificación de puntos en los conjuntos.

Sea $a \in \mathbb{R}$, la *vecindad* $N_\delta(a)$ es el conjunto de puntos $x \in \mathbb{R}$ tales que $|x-a| < \delta$ donde δ es um número positivo dado.

Sea $\mathscr{A} \in \mathbb{R}$ no vacío. El punto $a \in \mathbb{R}$ es un *punto interior* si existe $\delta > 0$ tal que $N_\delta(a) \subset \mathscr{A}$, es decir, todos los puntos $x \in N_\delta(a) \in \mathscr{A}$.

El conjunto $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ es un *conjunto abierto* si todo $x \in \mathscr{A}$ es un punto interior. Veamos algunos ejemplos. Para ello sea $a < b$ luego

$$(a,b) = \{x; a < x < b, x \in \mathbb{R}\}, \tag{B.5}$$

$$[a,b) = \{x; a \leq x < b, x \in \mathbb{R}\}, \tag{B.6}$$

$$(a,b] = \{x; a < x \leq b, x \in \mathbb{R}\}, \tag{B.7}$$

$$(a,\infty), (-\infty,a), (-\infty,\infty) = \mathbb{R}, \emptyset, \tag{B.8}$$

son ejemplos de conjuntos abiertos.

Sea $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$. El punto a no necesariamente en $\mathscr{A}$, es un *punto de acumulación* de $\mathscr{A}$ si y sólo si *toda* vecindad $N_\delta(a)$ contiene al menos un punto de $\mathscr{A}$ distinto de a. Luego, $N_\delta(a)$ contiene infinitos puntos (vea el Teorema B.1).

Sea $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$, el *cierre* de este conjunto es el conjunto que contiene *todos* los puntos de $\mathscr{A}$ y todos sus puntos de acumulación. Luego, si $\widehat{\mathscr{A}}$ es el conjunto de puntos de acumulación, $\overline{\mathscr{A}} = \mathscr{A} \cup \widehat{\mathscr{A}}$ es el *cierre* de $\mathscr{A}$.

$\mathscr{A}$ es un *conjunto cerrado* si y sólo si $\mathscr{A} = \overline{\mathscr{A}}$. También lo anterior es equivalente a decir que $\mathscr{A}$ es cerrado si su complemento, $\mathbb{R} \setminus \mathscr{A}$, es abierto. Observe que $\mathbb{R}$ es cerrado ya que su complemento es el conjunto $\emptyset$ que es abierto.

Teorema B.1 *Sea a es un punto de acumulación de $\mathscr{A} \subseteq \mathbb{R}$, luego toda vecindad de a contiene infinitos puntos de $\mathscr{A}$ (demonstración via contradicción!).*

Este teorema nos dice que todo conjunto finito de puntos *no puede tener puntos de acumulación*. Que ocurre con los conjuntos infinitos?

Teorema B.2 (Teorema de Bolzano-Weierstrass) . *Sea $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ un conjunto infinito limitado, luego existe al menos un punto en $\mathbb{R}$ que es un punto de acumulación.*

Observación B.1 *$\mathscr{A} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ es un conjunto infinito donde todo elemento $a \in \mathscr{A}$ es tal que $0 < a \leq 1$, luego el número 0 es un punto de acumulación.*

El conjunto $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ es un *conjunto denso* en $\mathscr{B} \subset \mathbb{R}$ si $\mathscr{B} \subseteq \overline{\mathscr{A}}$. Si $\mathscr{B} = \overline{\mathscr{A}}$, diremos que $\mathscr{A}$ es *denso en toda parte de $\mathscr{B}$*.

Teorema B.3 (Teorema de Heine-Borel) . *El conjunto $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ es* compacto *si y solamente si $\mathscr{A}$ es cerrado y limitado. A su vez, si $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ es compacto, todo subconjunto infinito de $\mathscr{A}$ tiene un punto de acumulación en $\mathscr{A}$.*

B.2 Secuencias

Si para cada número entero positivo n le hacemos corresponder un punto $a_n \in \mathbb{R}$, el conjunto $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ forma una *secuencia* que representamos por $\{a_n\}$. Por ejemplo, si adoptamos las siguientes expresiones para a_n

$$a_n = \frac{1}{n} \quad a_n = \frac{1}{2^n} \quad a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n, \tag{B.9}$$

podemos describir las siguientes secuencias en $\mathbb{R}$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \tag{B.10}$$

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \tag{B.11}$$

$$\frac{3}{2}, \left(\frac{4}{3}\right)^2, \left(\frac{5}{4}\right)^3, \ldots. \tag{B.12}$$

Decimos que la secuencia $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ tiene un *límite* $a^* \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número entero N tal que $|a_n - a^*| < \varepsilon$ para todo $n > N$. Si una secuencia

tiene límite, diremos que *converge* o que es una *secuencia convergente*. Esto será representado de la siguiente manera

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a^*, \tag{B.13}$$

caso contrario, diremos que la secuencia *diverge*, o que es una *secuencia divergente*.

Decimos que una secuencia es monótona creciente si $a_{n+1} > a_n$ para todo n (decreciente si $a_{n+1} < a_n$). Diremos que es *limitada superiormente* si existe un número b tal que $a_n < b$, para todo n. Igualmente, es *limitada inferiormente* si existe b tal que $b < a_n$ para todo n.

Teorema B.4 *Toda secuencia monótona (creciente o decreciente) limitada converge.*

Observación B.2 *Secuencias limitadas no monótonas pueden convergir o no convergir. Por ejemplo, la secuencia*

$$\{1,-1,1,-1,\ldots,(-1)^{n+1},\ldots\}, \tag{B.14}$$

es limitada pero no es convergente.

Dada una secuencia $\{u_1,u_2,\ldots,u_n,\ldots\}$, entonces las secuencias $\{u_1,u_4,u_7,\ldots\}$ o $\{u_2,u_4,u_6,\ldots\}$, etc., se llaman *subsecuencias* de $\{u_n\}$. Veamos un teorema importante.

Teorema B.5 (Teorema de Bolzano-Weierstrass para secuencias) . *Toda secuencia limitada tiene una subsecuencia convergente.*

Observación B.3 *El conjunto $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ es compacto si y solamente si toda secuencia infinita de puntos de $\mathscr{A}$ tiene una subsecuencia convergente.*

Diremos que la secuencia $\{a_n\}$ es una *secuencia de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número entero N tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n,m > N. \tag{B.15}$$

Observe que, si la secuencia es convergente, luego ella es también una secuencia de Cauchy. En efecto, sea a^* su límite, luego

$$|a_n - a_m| = |a_n - a^* - (a_m - a^*)| \leq |a_n - a^*| + |a_m - a^*|, \tag{B.16}$$

como $\{a_n\}$ es convergente, siempre podemos escoger N tal que para $n,m > N$ resulte

$$|a_n - a^*| < \varepsilon_1 \quad |a_m - a^*| < \varepsilon_2 \quad \text{con } \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon, \tag{B.17}$$

luego se verifica (B.15).

El conjunto $\mathscr{A} \subset \mathbb{R}$ es *completo* si y sólo si toda secuencia de Cauchy de puntos de $\mathscr{A}$ converge para algún punto en $\mathscr{A}$.

Observación B.4 *Veamos algunos ejemplos.*

- *El conjunto de los números racionales no es completo ya que, por exemplo, la secuencia* $\{1, 1.4, 1.41, 1.412, \ldots\}$ *tiene por límite el número irracional* $\sqrt{2}$.
- $\mathbb{R}$ *es completo.*

B.3 Límite y Continuidade de Funciones

Sea la función

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x), \end{aligned} \tag{B.18}$$

decimos que esta función tiene el límite a en el punto x_0 si para *todo* $\varepsilon > 0$, existe un número $\delta > 0$ tal que toda vez que $0 < |x - x_0| < \delta$, resulta $|f(x_0) - a| < \varepsilon$. Esto será representado por

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a. \tag{B.19}$$

La función $f : \mathscr{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en el punto de acumulación $x_0 \in \mathscr{A}$ si y sólo si

(1) $f(x_0)$ existe,
(2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Esta definición es vía la definición de límite.

La función $f : \mathscr{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x_0 \in \mathscr{A}$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \text{ toda vez que } |x - x_0| < \delta. \tag{B.20}$$

Esta definición es denominada definición $\varepsilon - \delta$.

Observación B.5 *La noción de continuidad está mais próxima del concepto de conjuntos abiertos que el de límite o de la definición* $\varepsilon - \delta$. *De hecho, la definición* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ *define una vecindad* $N_\varepsilon(f(x_0))$ *en* $\mathscr{R}(f)$. *En particular*

$$N_\varepsilon(f(x_0)) = \{f(x); |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}, \tag{B.21}$$

define una vecindad abierta de radio ε *en* $f(x_0)$. *Si* f *es continua en* x_0, *entonces los puntos* x *llevados por* f *a ésta vecindad se encuentran en otra vecindad abierta de radio* δ *en* x_0. *En otras palabras, para cada* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que la imagen inversa de toda vecindad abierta en* $f(x_0)$ *está incluida en una vecindad abierta en* x_0.

La observación anterior conduce a la seguinte definición de continuidad introducida mediante el concepto de vecindad abierta. Sean dos conjuntos $\mathscr{A}, \mathscr{B} \subset \mathbb{R}$, la función

$$f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}, \tag{B.22}$$

es continua en $x_0 \in \mathscr{A}$ si y solamente si la imagen inversa de *toda* vecindad abierta de $f(x_0)$ en $\mathscr{B}$ está contenida en una vecindad abierta de x_0 en $\mathscr{A}$. Si la continuidad se verifica para todo $x_0 \in \mathscr{A}$ diremos que f es continua en $\mathscr{A}$.

Teorema B.6 (Teorema de Weierstrass para una función continua) . *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ luego, $f(x)$ asume todos los valores intermediarios entre $f(a)$ e $f(b)$.*

Finalmente, recordemos algunos conceptos que usamos en los diversos Capítulos de esta monografía.

Sea $f : \mathscr{A} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y sea x_0 un punto de acumulación de $\mathscr{A}$. Decimos que $f'(x_0)$ es la *derivada de f en x_0* si existe el límite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0). \tag{B.23}$$

Si $f'(x_0)$ existe, diremos también que f es diferenciable en x_0. Si f es diferenciable para todo $x_0 \in \mathscr{A}$ decimos que f es diferenciable en $\mathscr{A}$.

Sea la función $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$J(\varepsilon) = \int_{x_1(\varepsilon)}^{x_2(\varepsilon)} f(x, \varepsilon) dx, \tag{B.24}$$

luego

$$\frac{dJ}{d\varepsilon} = f(x_2, \varepsilon) \frac{dx_2}{d\varepsilon} - f(x_1, \varepsilon) \frac{dx_1}{d\varepsilon} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} dx, \tag{B.25}$$

es la denominada regla de Leibniz para calcular la derivada de una expresión integral.

Presentamos ahora la llamada *regla de integración por partes*, la cual es repetidamente utilizada a lo largo de esta monografía, y expresa lo siguiente

$$\int_{x_1}^{x_2} g \frac{df}{dx} dx = gf\Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dg}{dx} f dx. \tag{B.26}$$

B.4 Espacios Métricos

Vamos a generalizar primero el concepto de valor absoluto de números reales. Para ello, introduciremos el concepto de *métrica*.

Sea X un conjunto no vacío, la función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es llamada *métrica* si y sólo si las seguientes propiedades son satisfechas

1) $d(x,y) \geq 0$ para todo $x, y \in X$,
2) $d(x,y) = 0$ si y sólo si $x = y$ (estrictamente positiva),
3) $d(x,y) = d(y,x)$ para todo $x, y \in X$ (simetría),
4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ para todo $x, y, z \in X$ (desigualdad del triángulo).

Generalmente, en la literatura vemos que cuando en un conjunto se define una métrica, los elementos del conjunto son llamados *puntos* y $d(x,y)$ es la *distancia* entre estos puntos. Observe que las propriedades (1)-(4) son una generalización de las propiedades del valor absoluto y del concepto geométrico que tenemos de distancia entre puntos en el espacio Euclidiano.

Como siempre estamos limitando nuestra presentación a espacios vectoriales reales. Sea el espacio vectorial real X y definamos una métrica d, luego (X,d) es llamado *espacio métrico*.

Observación B.6 *Veamos algunos ejemplos de espacios métricos.*

- *El espacio métrico clásico es el espacio vectorial real $\mathbb{R}$ donde la métrica está dada por*
$$d(x,y) = |x-y|. \tag{B.27}$$
- *Sea $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y dados $x = (x_1,x_2)$ e $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}$ arbitrarios y la métrica definida por*
$$d(x,y) = \sqrt{|x_1-y_1|^2+|x_2-y_2|^2}, \tag{B.28}$$
luego (X,d) corresponde al espacio Euclidiano bidimensional.
- *Sea $X = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ y $d(x,y)$ dado por*
$$d_1(x,y) = |x_1-y_1|+|x_2-y_2|, \tag{B.29}$$
luego, se puede verificar que esta función satisface todas las propiedades de una métrica.

Vemos así que para un mismo conjunto podemos elegir diferentes métricas, dando lugar a espacios métricos *diferentes.*

Introducimos ahora la llamada *desigualdade de Hölder*, la cual expresa lo siguiente

$$\sum_{i=1}^{n}|x_iy_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad 1<p<\infty, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{B.30}$$

Esta propiedad permite demostrar la *desigualdade de Minkowski*, la cual establece que, siendo $1 \leq p < \infty$, se verifica

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i \pm y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.31}$$

Con estos elementos, se puede demostrar que (X,d_p) es un espacio métrico, donde

$$X = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ veces}}, \tag{B.32}$$

y la métrica $d_p : X \to \mathbb{R}$ está dada por

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.33}$$

Con este resultado tenemos las seguientes métricas en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|, \tag{B.34}$$

$$d_2(x,y) = (|x_1 - y_1|^2 + |x_2 - y_2|^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{B.35}$$

$$d_3(x,y) = (|x_1 - y_1|^3 + |x_2 - y_2|^3)^{\frac{1}{3}}, \tag{B.36}$$

$$\vdots$$

$$d_p(x,y) = (|x_1 - y_1|^p + |x_2 - y_2|^p)^{\frac{1}{p}}, \tag{B.37}$$

$$d_\infty(x,y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|. \tag{B.38}$$

Observación B.7 *Veamos otros ejemplos de espacios métricos de funciones.*

- *El espacio $C(a,b)$ de funciones de valor real continuas en el intervalo (a,b) donde podemos definir la* métrica de Chebyshev

$$d_\infty(f,g) = \max_{x \in (a,b)} |f(x) - g(x)|. \tag{B.39}$$

- *Los espacios $L_p(a,b)$, con $1 \le p < \infty$, donde las funciones (clases de equivalencia) son tales que (las medidas en el sentido de Lebesgue) satisfacen*

$$\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty, \tag{B.40}$$

se puede definir la métrica

$$d_p(f,g) = \left(\int_a^b |f - g|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{B.41}$$

donde la desigualdad del triángulo se obtiene de la desigualdad de Minkowski para integrales

$$\left(\int_a^b |f(x) \pm g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{B.42}$$

Haciendo uso de la métrica, los conceptos de *continuidad* y *convergencia* que vimos anteriormente para funciones y secuencias en $\mathbb{R}$ pueden ser extendidos para funciones y secuencias definidas en espacios métricos.

Sea $\mathscr{A} \subset X$ y (X,d) un espacio métrico, luego $\mathscr{A}$ es *denso* en toda parte de X si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ y todo $x \in X$ existe un elemento $x_A \in \mathscr{A}$ tal que

$$d(x,x_A) < \varepsilon. \tag{B.43}$$

El el espacio (X,d) se dice que es *separable* si existe un conjunto numerable de elementos de X denso en toda parte de X. En otras palabras, si existe $\{x_1,x_2,\ldots,x_n,\ldots\}$, $x_i \in X$, $\forall i$, tal que para cada $\varepsilon > 0$ y cada $x \in X$ existe un elemento x_n de este conjunto tal que

$$d(x,x_n) < \varepsilon. \tag{B.44}$$

Sea (X,d) un espacio métrico. La secuencia $\{x_n\}$ es una *secuencia de Cauchy* si

$$d(x_n,x_m) \to 0 \quad \text{para } n,m \to \infty. \tag{B.45}$$

Una secuencia $\{x_n\}$ de (X,d) es *convergente* si existe $x \in X$ tal que

$$d(x_n,x) \to 0 \quad \text{para } n \to \infty. \tag{B.46}$$

Podemos observar de esta definición que toda secuencia convergente es una secuencia de Cauchy. Sin embargo, una secuencia de Cauchy no es necesariamente convergente.

Observación B.8 *Sea la secuencia* $\{\frac{1}{n}\}$ *en* (X,d)*, donde*

$$X = (0,1] \quad d(x,y) = |x-y|. \tag{B.47}$$

Claramente

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \notin X. \tag{B.48}$$

*Si agregamos el elemento cero al conjunto X (*completamos el conjunto*), la secuencia* $\{\frac{1}{n}\}$ *resulta convergente.*

El espacio métrico (X,d) es *completo* si toda secuencia Cauchy en (X,d) es una secuencia convergente en (X,d).

Observación B.9 *Veamos los siguientes ejemplos.*

- *El espacio métrico* $(C(a,b),d_\infty)$ *es completo.*
- *El espacio métrico* $(L_p(a,b),d_p)$ *es completo.*

B.5 Espacios Normados

Sea V un espacio vectorial real, la función $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ es una *norma* en V si y sólo si las siguientes propiedades son satisfechas

(1) $\|u\| \geq 0$, $\forall u \in V$, y $\|u\| = 0$ si y sólo si $u = 0$,
(2) $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|$, $\forall u \in V$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
(3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Con esta defnición en manos, tenemos que $(V,\|\cdot\|)$, es un *espacio vectorial normado*.

Observación B.10 *Veamos algunos ejemplos de espacios normados.*

(1) $(C(a,b), \max_{x\in(a,b)}|f(x)|)$.
(2) $(C(a,b), (\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}})$.
(3) $(C(a,b), \int_a^b |f(x)|dx)$.

De las propiedades de la norma, podemos observar que la misma induce de manera natural la siguiente métrica

$$d(f,g) = |f-g|, \tag{B.49}$$

de donde concluimos que todo espacio normado es un espacio métrico. La recíproca no es satisfecha. De esta manera y de los ejemplos anteriores vemos que no obstante el espacio vectorial real $V = C(a,b)$ ser el mismo en todos los ejemplos, los espacios normados son diferentes. En particular, los ejemplor (2) y (3) no son completos con relación a la métrica (topología) inducida por la norma. Por otro lado, el espacio (1) es completo.

La secuencia $\{x_n\}$ es una *secuencia de Cauchy* en $(V, \|\cdot\|)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$\|u_n - u_m\| < \varepsilon \quad \forall n,m > N, \tag{B.50}$$

o lo que es equivalente

$$\|u_n - u_m\| \to 0 \quad \text{para } n,m \to \infty. \tag{B.51}$$

El espacio $(V, \|\cdot\|)$ es completo si toda secuencia de Cauchy converge a algún elemento del espacio. En este caso el espacio es llamado *espacio de Banach*. Espacios vectoriales normados donde toda secuencia de Cauchy es convergente (es decir, espacios de Banach) son de particular importancia en la Mecánica. De hecho, en los espacios $\mathscr{V}$ y $\mathscr{W}$ (espacio de acciones de movimientos posibles y espacio de acciones de deformación) son adoptadas normas adecuadas de manera a asegurar que estos espacios sean espacios de Banach. Esto tiene implicaciones cuando, en la etapa de análisis del problema, estamos demostrando existencia y unicidad de soluciones. También en la etapa de aproximación de la solución ya que, en general, construimos una secuencia de soluciones aproximadas que deseamos tengan propiedades de convergencia a la solución del problema.

Observación B.11 *Veamos algunos ejemplos de espacios de Banach.*

(1) El espacio Euclidiano n-dimensional $\mathbb{R}^n$. *Sea* $\{x_i\}$ *una secuencia de Cauchy, luego para todo* $\varepsilon > 0$ *existe N tal que*

$$\|x_m - x_n\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_m^{(i)} - x_n^{(i)})^2 < \varepsilon^2 \quad n,m > N. \tag{B.52}$$

Para cada componente i se verifica que $|x_m^{(i)} - x_n^{(i)}| < \varepsilon$, *para* $m,n > N$, *de donde* $\{x_m^{(i)}\}$ *es una secuencia de Cauchy de números reales, luego converge, por ejem-*

plo, para $x^{(i)} = \lim_{m\to\infty}\{x_m^{(i)}\}$. *Podemos construir* $x = \{x^{(i)},\ldots,x^{(n)}\}$, *luego resulta* $\|x_m - x\| \to 0$, *para* $m \to \infty$, *por lo que* $\mathbb{R}^n$ *es completo.*

(2) Todo espacio normado de dimensión finita es completo. Este es un resultado que hemos utilizado a lo largo de este texto.

(3) Varios espacios normados de dimensión infinita no son completos. Sea, por ejemplo, el espacio $C(0,1)$ *con la norma*

$$\|f\| = \left(\int_0^1 \|f(x)\|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{B.53}$$

no es completo. De hecho, la secuencia de funciones continuas

$$u_n(x) = \begin{cases} 2^n x^{n+1} & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 1 - 2^n(1-x)^{n+1} & \frac{1}{2} \le x \le 1, \end{cases} \tag{B.54}$$

es una secuencia de Cauchy con respecto a la norma definida anteriormente. No obstante, la secuencia converge para la función $u \notin C(0,1)$, *de hecho* $\|u_n - u\| \to 0$ *para* $n \to \infty$ *(ver Figura B.1) donde u es dada por*

$$u(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2} & x = \frac{1}{2}, \\ 1 & \frac{1}{2} < x \le 1. \end{cases} \tag{B.55}$$

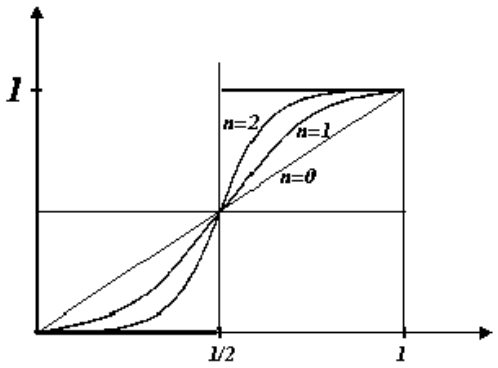


Fig. B.1 El espacio $C(0,1)$ con la norma definida en (B.53) no es completo.

(4) El espacio $C(0,1)$ *con la norma*

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx, \tag{B.56}$$

no es completo. En efecto, la secuencia de Cauchy de funciones continuas

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ nx - \frac{n}{2} + 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \frac{1}{2} \leq x < 1, \end{cases} \tag{B.57}$$

converge para la función discontinua indicada en la Figura B.2.

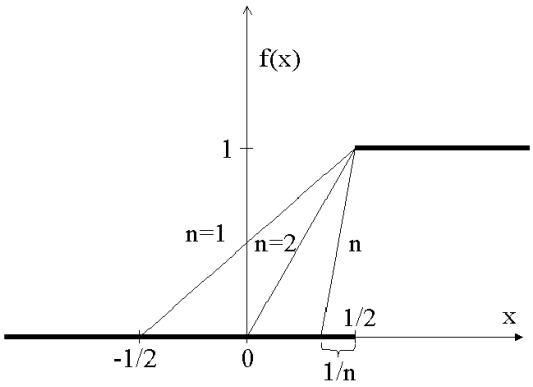


Fig. B.2 El espacio $C(0,1)$ con la norma definida en (B.56) no es completo.

(5) $C(0,1)$ *es completo con relación a la norma*

$$\|f\| = \sup_{x\in(0,1)} |f(x)|. \tag{B.58}$$

De hecho, para $x_0 \in (0,1)$ *arbitrario, la secuencia de Cauchy* $\{f_n(x)\}$ *conduce a una secuencia de Cauchy de número reales*

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \sup_{x\in(0,1)} |f_n(x) - f_m(x)| \to 0. \tag{B.59}$$

Luego, existe un número, $f(x_0)$*, para el cual* $f_n(x_0)$ *converge para cada* $x_0 \in (0,1)$*. De esta manera, la secuencia de Cauchy* $\{f_n(x)\}$ *converge uniformemente en* $(0,1)$ *para* $f(x)$*. Falta probar que* $f(x) \in C(0,1)$*. Para ello, sea* $\{x_m\}$ *una secuencia que converge para x en* $(0,1)$*. Luego*

$$|f(x) - f(x_m)| \leq |f(x) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f(x_m)|. \tag{B.60}$$

Como f_n *es continua* $f_n(x_m) \to f_n(x)$ *para* $m \to \infty$*. Por otro lado,* $f_n(x) \to f(x)$*. De la misma manera,* $f_n(x_m) \to f(x_m)$ *para* $n \to \infty$*. Luego, el segundo miembro puede hacerse tan pequeño cuanto se desee. Es decir*

$$|f(x) - f(x_m)| \to 0 \quad m \to 0. \tag{B.61}$$

En otras palabras

$$f(x_m) \to_{m\to\infty} f(x) \Rightarrow f, \tag{B.62}$$

es continua. Luego $(C(0,1), \sup_{x\in(0,1)}|f(x)|$ *es un espacio completo (Banach).*

(6) Volvamos al ejemplo donde $C(0,1)$ *era incompleto con relación a la norma*

$$\|f\| = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{B.63}$$

No obstante esto, podemos completar este espacio. Este espacio es el espacio $L_2(0,1)$ *de funciones, en verdad de* classes de equivalencias*, integrables en el sentido de Lebesgue. En otras palabras, en este espacio no distinguimos la diferencia entre funciones que difierem solamente en un conjunto de medida nula. En este caso, decimos que* f *y* g *son iguales en* casi toda parte *si*

$$\int_0^1 (f-g)^2 dx = 0. \tag{B.64}$$

B.6 Espacio Cociente

Otro concepto importante en Mecánica es el de *espacio cociente*. Para visualizarlo, consideremos el subespacio M del espacio vectorial X y generemos en X variedades lineales V por translaciones de M. Las variedades lineales así obtenidas pueden ser vistas como elementos de un nuevo espacio vectorial que llamaremos *espacio cociente de X de módulo M*, y lo representaremos por X/M. Por ejemplo, sea M un plano que pasa por el origen del espacio $\mathscr{V}$ asociado al espacio Euclideano puntual $\mathscr{E}$ tridimensional. Luego $\mathscr{V}/M$ consiste en el espacio vectorial cuyos elementos son todos los planos paralelos a M. Para formalizar esta idea procedemos de la siguiente forma.

Sea M un subespacio del espacio vectorial X. Dos elementos $x_1, x_2 \in X$ se dicen son *módulo M equivalentes* si $x_1 - x_2 \in M$. En particular, todos los elementos de X módulo M equivalentes con $x \in X$ los representaremos simplemente con $[x]$.

Esta relación de equivalencia permite particionar X en clases de equivalencia y, de esta manera, el espacio cociente X/M consiste de todas las clases de equivalencia así definidas, y donde la adición y multiplicación por escalar están definidas por

$$[x_1] + [x_2] = [x_1 + x_2], \tag{B.65}$$

$$\alpha[x] = [\alpha x]. \tag{B.66}$$

En numerosos problemas mecánicos la unicidad queda establecida excepto en un movimiento de cuerpo rígido. En particular, el conjunto de todos los movimientos de cuerpo rígido, dado por el núcleo del operador de tasa de deformación, $\mathscr{N}(\mathscr{D})$ (ver Capítulo 3), es un subespacio del espacio $\mathscr{V}$. Luego, trabajando con el espacio cociente $\mathscr{V}/\mathscr{N}(\mathscr{D})$ recuperaremos la unicidad. Finalmente, es interesante observar

que si X es un espacio de Banach y M es un subespacio cerrado, entonces X/M es también de Banach.

B.7 Transformaciones Lineales en Espacios Normados

Consideremos los espacios vectoriales normados U y V, y sea T la transformación (operador) lineal $T : U \to V$. Llamaremos

- *espacio nulo* a $\mathscr{N}(T) = \{u \in U; Tu = 0\}$;
- *contradominio* a $\mathscr{R}(T) = \{v \in V; \exists u \in U \text{ tal que } v = Tu\}$.

Observe que T es inyectiva si y sólo si $\mathscr{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Decimos que T es una transformación lineal *limitada* (o *limitada superiormente*) si y sólo si existe un número no negativo K tal que

$$\|Tu\|_V \leq K \|u\|_U \quad \forall u \in U, \tag{B.67}$$

donde $\|\cdot\|_V$ y $\|\cdot\|_U$ son, respectivamente, las normas en V y U.

De la definición anterior podemos siempre asociar con cada transformación lineal limitada la colección de números positivos K tal que $\|Tu\|_V \leq K\|u\|_U$. Si de este conjunto tomamos el menor de todos los K estaremos estableciendo una correspondencia entre la transformación lineal T y ese número que llamaremos *norma* de T

$$\|T\| = \inf\{K; \|Tu\|_V \leq K\|u\|_U, \forall u \in U\}. \tag{B.68}$$

Claramente, lo anterior es equivalente a

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in U \\ u \neq 0}} \frac{\|Tu\|_V}{\|u\|_U}, \tag{B.69}$$

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|_U \leq 1}} \|Tu\|_V, \tag{B.70}$$

$$\|T\| = \sup_{\substack{u \in U \\ \|u\|_U = 1}} \|Tu\|_V. \tag{B.71}$$

Observación B.12 *Veamos el siguiente ejemplo. Sea el operador*

$$\mathscr{D}u = \frac{du}{dx}, \tag{B.72}$$

definido en el conjunto de funciones diferenciables con norma dada por

$$\|u\| = \sup_{x \in (0,1)} |u(x)|. \tag{B.73}$$

Claramente $\mathscr{D} : C^1[0,1] \to C[0,1]$ *es lineal pero no limitado en la norma anterior. En efecto, sea*

$$u_n(x) = \sin(nx), \tag{B.74}$$

luego

$$|u_n| = \sup_{x\in(0,1)} |\sin(nx)| = 1 \quad \forall n, \tag{B.75}$$

por otro lado

$$\mathscr{D}u_n = n\cos(nx) \quad \Rightarrow \|\mathscr{D}u_n\| = n, \tag{B.76}$$

dado que $\|u_n\| = 1$ *y* $\|\mathscr{D}u_n\|$ *crece indefinidamente para* $n \to \infty$*, entonces no existe una constante K tal que*

$$\|\mathscr{D}u\| < K\|u\| \quad \forall u \in C^1(0,1). \tag{B.77}$$

Sin embargo, si introducimos la norma

$$\|u\| = \max\left\{ \sup_{x\in(0,1)} |u(x)|, \sup_{x\in(0,1)} |\mathscr{D}u| \right\}, \tag{B.78}$$

tenemos que $\mathscr{D}$ *pasa a ser un operador* lineal limitado*. Aquí es interesante observar que, en general, estos operadores diferenciales de orden m pueden ser considerados limitados toda vez que se seleccione una norma adecuada.*

En el caso de operadores no lineales $P : U \to V$, el concepto de limitado en $S \subset U$ toma la forma

$$\|P(u) - P(v)\|_V \leq K\|u - v\|_U \quad \forall u, v \in S \subset U, \tag{B.79}$$

y decimos que el operador satisface la *condición de Lipschitz en S*.

El concepto de continuidad de transformaciones P (lineales o no) en espacios normados estará ahora dado como sigue. Sea $P : U \to V$ una transformación donde U y V son espacios vectoriales normados, luego P es continuo en $u_0 \in U$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|P(u) - P(u_0)\|_V < \varepsilon, \tag{B.80}$$

toda vez que

$$\|u - u_0\|_U < \delta. \tag{B.81}$$

De manera equivalente, P es continuo en $u_0 \in U$ si para toda secuencia $\{u_n\} \in U$ que converge a u_0 (es decir $\lim_{n\to\infty}\|u - u_0\|_U = 0$), la secuencia $\{P(u_n)\}$ converge a $P(u_0)$ en la norma del espacio V.

Puede mostrarse que, en el caso de operadores lineales, existe una correspondencia entre limitación y continuidad. Tenemos así el siguiente teorema.

Teorema B.7 *La transformación lineal* $T : U \to V$ *es continua si y sólo si es limitada.*

Observe que si P es un operador no lineal que satisface la condición de Lipschitz, entonces el también será continuo.

Numerosas veces en Mecánica encontramos operadores que satisfacen una desigualdad opuesta a la anterior (limitados superiormente). Estos operadores son llamados *limitados inferiormente*. En particular, el operador lineal $T : U \to V$ es limitado inferiormente si y sólo si existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|Tu\|_V \geq C\|u\|_U \quad \forall u \in U. \tag{B.82}$$

Observación B.13 *Como ejemplo consideremos el operador* $\mathscr{D}u = \frac{du}{dx} : C^1(0,1) \to C(0,1)$ *que, como ya vimos, es no limitado para la norma* $\|u\| = \sup_{x\in(0,1)}|u(x)|$. *Este operador continúa siendo no limitado en el caso de adoptar como espacio V el espacio* $C_0[0,1]$, *donde con el índice "0" se indica que sus elementos son todas las funciones continuas en* $(0,1)$ *que se anulan en* $x = 0$ *y en* $x = 1$. *Ahora bien, si* $u \in C_0(0,1)$ *tenemos que*

$$u(x) = \int_0^x \frac{du}{dt}dt \leq \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{du}{dx}\right|, \tag{B.83}$$

luego

$$\|\mathscr{D}u\| \geq \sup_{x\in(0,1)} \left|\frac{du}{dx}\right| = \|u\|, \tag{B.84}$$

con lo que vemos que este operador es limitado inferiormente.

Un aspecto importante de este tipo de operadores recide en el hecho de que, si bien no son continuos, tienen siempre un operador inverso continuo definido en su contradominio. Tenemos así el siguiente teorema.

Teorema B.8 *Sea* $A : U \to V$ *un operador limitado inferiormente y U, V espacios vectoriales normados. Luego, A tiene un operador inverso continuo* $A^{-1} : \mathscr{R}(A) \to U$. *Recíprocamente, si A tiene un operador inverso luego es limitado inferiormente.*

B.8 Espacio Dual Topológico

En la Sección A.16 hemos definido el espacio dual algebraico V^* del espacio vectorial V como el espacio vectorial formado por todos los funcionales lineales (no necesariamente continuos) en V. Consideremos ahora el espacio formado por todos los funcionales lineales y continuos (por lo tanto limitados) en V. Este espacio recibe el nombre de *espacio dual topológico* de V, que lo representaremos por V'

$$V' = \mathscr{L}(V, \mathbb{R}). \tag{B.85}$$

De la propia definición se sigue que el espacio dual topológico es un espacio menor que el dual algebraico. A su vez, y como vimos en la sección anterior, este espacio

es un espacio normado donde la norma de un elemento $\ell \in V'$ está definida por

$$\|\ell\|_{V'} = \sup_{\substack{v \in V \\ v \neq 0}} \frac{|\langle \ell, v \rangle|}{\|v\|_V}, \tag{B.86}$$

luego

$$|\langle \ell, v \rangle| \leq \|\ell\|_{V'} \|v\|_V \quad \forall \ell \in V', v \in V. \tag{B.87}$$

Puede mostrarse que aún en el caso de V no ser un espacio de Banach, su dual topológico *siempre* lo es. Luego, podemos hablar del espacio formado por los funcionales lineales y continuos en V', llamado *espacio bidual*, que es un espacio completo, y que lo representamos por V''. En general V no puede identificarse con su bidual pero cuando esto es posible diremos que V es un espacio *reflexivo*.

Sea ahora M un subespacio del espacio vectorial normado U. Luego, dado un funcional lineal y continuo en M, puede ser extendido a todo U como lo establece el siguiente teorema.

Teorema B.9 (Teorema de Hahn-Banach) . *Sea M un subespacio del espacio vectorial normado separable U y sea ℓ un funcional lineal y continuo en M. Luego, existe un funcional lineal y continuo, $\tilde{\ell}$, definido en todo U tal que*

i) $\tilde{\ell}$ *es una extensión de* ℓ*, es decir* $\tilde{\ell}(u) = \ell(u)$*,* $\forall u \in M$*;*
ii) $\|\tilde{\ell}\|_{U'} = \|\ell\|_{M'}$.

Como corolario del teorema anterior tenemos que si $\alpha_0 \in \mathbb{R}^+$ y $u_0 \in U$ es un elemento arbitrario, luego, existe un funcional lineal $\ell \in U'$ tal que

$$\|\ell\|_{U'} = \alpha_0 \quad \ell(u_0) = \|\ell\|_{U'} \|u_0\|_U. \tag{B.88}$$

Estos dos conceptos permiten por su vez demostrar el teorema siguiente cuyo resultado fue empleado en el Capítulo 3.

Teorema B.10 *Sea M un subespacio cerrado del espacio vectorial normado U, luego*

$$(M^{\perp})^{\perp} = M. \tag{B.89}$$

Por último, los siguientes teoremas también fueron utilizados en el Capítulo 3.

Teorema B.11 *Sean U y V dos espacios vectoriales normados y $T : U \to V$ una transformación lineal y continua. Luego, $\mathscr{N}(T)$ es un subespacio cerrado de U (observe que, por el teorema anterior, tenemos $(\mathscr{N}(T)^{\perp})^{\perp} = \mathscr{N}(T)$).*

Teorema B.12 *Sean U y V dos espacios de Banach y $T : U \to V$ una transformación inyectiva lineal y continua. Luego, el contradominio $\mathscr{R}(T)$ de T es cerrado si y sólo si T es limitado inferiormente.*

B.9 Convergencia Fuerte y Débil

Sea U un espacio de Banach y U' su dual topológico. Luego, dada la secuencia $\{u_n\} \in U$ diremos que converge *fuertemente*, o que *converge en la norma de* U, al elemento $u_0 \in U$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe N tal que

$$\|u_n - u_0\|_U < \varepsilon \quad \forall n > N, \tag{B.90}$$

o su equivalente

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_0\|_U = 0. \tag{B.91}$$

Con la introducción del espacio dual podemos introducir un nuevo concepto de convergencia que es conocido como *convergencia débil*. Así, diremos que u_n *converge débilmente* a u_0 si se verifica

$$|\ell(u_n - u_0)| = |\langle \ell, u_n - u_0 \rangle| < \varepsilon \quad \forall n > N, \forall \ell \in U', \tag{B.92}$$

que equivale también a

$$\lim_{n\to\infty} |\ell(u_n - u_0)| = 0 \quad \forall \ell \in U'. \tag{B.93}$$

A su vez, como el espacio dual es también un espacio normado (y en particular de Banach) podemos pensar en convergencia fuerte y débil de funcionales lineales. Así, dada la secuencia $\{\ell_n\} \in U'$, decimos que la misma converge *fuertemente** a $\ell \in U'$ si

$$\lim_{n\to\infty} \|\ell_n - \ell\|_{U'} = 0. \tag{B.94}$$

Por otra parte, diremos que converge *debilmente** si

$$\lim_{n\to\infty} \langle \ell_n - \ell, u \rangle = 0 \quad \forall u \in U. \tag{B.95}$$

Apéndice C
Funcionales y Derivada de Gâteaux

C.1 Introducción

En este apéndice vamos a ver con más detalle alguno de los resultados que hemos utilizado en el Capítulo 4 al tratar los operadores de rigidez mecánicos, las derivadas en el sentido de Gâteaux de funcionales y las funciones convexas.

C.2 Propiedades del Operador $\mathscr{K}$

Sea $\mathscr{D}$ el operador tasa de deformación satisfaciendo las propiedades ya establecidas en el Capítulo 3 y sea $\mathscr{K} = \mathscr{D}^*\mathbb{D}\mathscr{D}$ el operador de rigidez correspondiente al material hiperelástico estudiado (recuerde que $\mathbb{D}$ es un tensor de cuarto orden simétrico positivo definido en el espacio de las deformaciones). A continuación vamos a demostrar los siguientes Lemas.

Lema C.1 *Se verifica que* $\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{K})$.

Demostración. Recordando que $\mathbb{D}$ es positivo definido, se sigue que $\mathscr{D}u = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$ y por lo tanto $\mathbb{D}\mathscr{D}u = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$. De esto se desprende que $\mathscr{D}^*\mathbb{D}\mathscr{D}u = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$, o sea $\mathscr{K}u = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$. De esta forma se tiene $\mathscr{N}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{N}(\mathscr{K})$.

De la misma manera tenemos que para $\mathscr{K}u = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{K})$, y por lo tanto $\langle \mathscr{K}u, u\rangle = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{K})$ o de forma equivalente $\langle \mathscr{K}u, u\rangle = (\mathbb{D}\mathscr{D}u, \mathscr{D}u) = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{K})$. De la positividad de $\mathbb{D}$ se sigue que $\mathscr{D}u = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{K})$, resultando así $\mathscr{N}(\mathscr{K}) \subset \mathscr{N}(\mathscr{D})$.

De los dos resultados anteriores se sigue que $\mathscr{N}(\mathscr{D}) \subset \mathscr{N}(\mathscr{K}) \subset \mathscr{N}(\mathscr{D})$, o sea $\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{K})$, con lo que demostramos el lema. ■

Lema C.2 *Se verifica que* $\mathscr{N}(\mathscr{K}) = \mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp}$.

Demostración. Por un lado sabemos que $\mathscr{K}u = 0$, $\forall u \in \mathscr{N}(\mathscr{K})$, se tiene $\langle \mathscr{K}u, w\rangle = 0$, $\forall w \in \mathscr{U}$, y entonces $\langle \mathscr{D}^*\mathbb{D}\mathscr{D}u, w\rangle = (\mathbb{D}\mathscr{D}u, \mathscr{D}w) = (\mathbb{D}\mathscr{D}w, \mathscr{D}u) = \langle \mathscr{D}^*\mathbb{D}\mathscr{D}w, u\rangle =$

$\langle \mathscr{K} w, u\rangle = 0$, $\forall w \in \mathscr{U}$, lo que implica que $u \in \mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp}$, es decir, $\mathscr{N}(\mathscr{K}) \subset \mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp}$.

Por otro lado, si $u \in \mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp}$ entonces $\langle \mathscr{K} w, u\rangle = 0$, $\forall w \in \mathscr{U}$, y en particular $\langle \mathscr{K} u, u\rangle = 0$, es decir $(\mathbb{D}\mathscr{D}u, \mathscr{D}u) = 0$ o sea $\mathscr{D}u = 0$, lo que significa que $u \in \mathscr{N}(\mathscr{D})$, y así $\mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp} \subset \mathscr{N}(\mathscr{D})$.

Ahora, del Lema C.1 tenemos $\mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp} \subset \mathscr{N}(\mathscr{K})$, entonces $\mathscr{N}(\mathscr{K}) \subset \mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp} \subset \mathscr{N}(\mathscr{K}) \Leftrightarrow \mathscr{N}(\mathscr{K}) = \mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp}$, con lo que queda demostrado el presente resultado. ■

Ahora bien, bajo ciertas hipótesis sobre el espacio $\mathscr{U}$, por ejemplo

- para un cuerpo tridimensional es suficiente pensar que $\mathscr{U} = [H^1(\mathscr{B})]^n$, donde $[H^1(\mathscr{B})]^n$ es el espacio de Sobolev (Hilbert) cuyos elementos u son campos de funciones vectoriales tales que, conjuntamente con sus derivadas primeras, son cuadrado integrables en el sentido de Lebesgue en la región $\mathscr{B}$ del espacio Euclidiano puntual de dimensión n;
- supuesto eliminado el movimiento de cuerpo rígido, es decir, estamos trabajando con el espacio cociente $\mathscr{U}/\mathscr{N}(\mathscr{D})$;
- bajo hipótesis de regularidad de la región $\mathscr{B}$;

es posible mostrar que el operador $\mathscr{K} : \mathscr{U} \to \mathscr{U}'$ es limitado inferiormente por lo que $\mathscr{R}(\mathscr{K})$ es un subespacio vectorial cerrado de $\mathscr{U}'$. Con esto, al tomar el complemento ortogonal de la expresión del Lema C.2, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario C.1 (Corolario del Lema C.2) *Se verifica que* $\mathscr{N}(\mathscr{K})^{\perp} = \mathscr{R}(\mathscr{K})$.

Lema C.3 *Con los resultados de los Lemas y Corolario anteriores, obtenemos*

$$\mathscr{N}(\mathscr{D}) = \mathscr{N}(\mathscr{K}) = \mathscr{R}(\mathscr{K})^{\perp}, \tag{C.1}$$

$$\mathscr{N}(\mathscr{D})^{\perp} = \mathscr{N}(\mathscr{K})^{\perp} = \mathscr{R}(\mathscr{K}). \tag{C.2}$$

Lema C.4 *Se verifica que* $\mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{K}) = \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)^{\perp}$.

Demostración. En efecto para $u \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{N}(\mathscr{K})$ se tiene $u \in \mathrm{Var}_u$ y $u \in \mathscr{N}(\mathscr{K})$, es decir $u \in \mathrm{Var}_u$ y $\langle \mathscr{K} u, w\rangle = 0$, $\forall w \in \mathrm{Var}_u$, o sea que $u \in \mathrm{Var}_u$ y $\langle \mathscr{K} w, u\rangle = 0$, $\forall w \in \mathrm{Var}_u$, lo que implica que $u \in \mathrm{Var}_u$ y $u \in \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)^{\perp}$. De esta forma $u \in \mathrm{Var}_u \cap \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)^{\perp}$ con lo que queda demostrado el lema. ■

Lema C.5 *Se verifica que* $[\mathrm{Var}_u \cap \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)^{\perp}]^{\perp} = \mathrm{Var}_u^{\perp} \oplus \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)$*, donde* $\oplus$ *indica la suma directa.*

Demostración. En efecto

$$[\mathrm{Var}_u \cap \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)^{\perp}]^{\perp} = \mathrm{Var}_u^{\perp} + [\mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)^{\perp}]^{\perp}, \tag{C.3}$$

y de las propiedades de $\mathscr{K}$ tenemos

$$[\mathrm{Var}_u \cap \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)^\perp]^\perp = \mathrm{Var}_u^\perp + \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u). \tag{C.4}$$

Nos falta probar ahora que la adición puede ser substituida por la suma directa. Para ello vamos a probar que $\mathrm{Var}_u^\perp \cap \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u) = 0$, el elemento nulo de $\mathscr{U}'$. En efecto, sea $f \in \mathrm{Var}_u^\perp \cap \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)$, luego $f \in \mathrm{Var}_u^\perp$ y $f \in \mathscr{K}(\mathrm{Var}_u)$, o sea que $f \in \mathrm{Var}_u^\perp$ y $\exists u \in \mathrm{Var}_u$ tal que $\mathscr{K}u = f$, lo que implica que $\langle \mathscr{K}u, w\rangle = 0, \forall w \in \mathrm{Var}_u$ y $f = \mathscr{K}u$, o equivalentemente $\langle \mathscr{K}u, u\rangle = 0$, $u \in \mathrm{Var}_u$ y $f = \mathscr{K}u$, es decir que $u \in \mathscr{N}(\mathscr{K})$ y $f = \mathscr{K}u$, implicando finalmente que $f = 0$. Es decir, el único elemento de la intersección es el elemento nulo. Con esto concluimos la demostración del resultado. ■

C.3 Funcionales Convexos

Sea X un espacio vectorial real. Decimos que el conjunto $\mathscr{C} \subset X$ es *convexo* si

$$\theta x + (1-\theta)y \in \mathscr{C} \quad \forall x, y \in \mathscr{C}, \theta \in (0,1). \tag{C.5}$$

El funcional $\mathscr{F} : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ es *convexo* si

$$\mathscr{F}(\theta x + (1-\theta)y) \leq \theta \mathscr{F}(x) + (1-\theta)\mathscr{F}(y) \quad \forall x, y \in \mathscr{C}, \theta \in (0,1). \tag{C.6}$$

El funcional $\mathscr{F}$ se dice *estrictamente convexo* si la desigualdad estricta es satisfecha en la expresión anterior.

Dado un funcional $\mathscr{F}$ definido en el convexo $\mathscr{C} \subset X$, siempre podemos definir el funcional $\tilde{\mathscr{F}}$ definido en *todo* X dado por

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathscr{F}} : X \to \mathbb{R}, \\ &\qquad x \mapsto \tilde{\mathscr{F}}(x) = \begin{cases} \mathscr{F}(x) & \text{si } x \in \mathscr{C} \\ +\infty & \text{si } x \notin \mathscr{C}. \end{cases} \end{aligned} \tag{C.7}$$

De lo anterior se concluye que $\mathscr{F}$ es convexo si y sólo si $\tilde{\mathscr{F}}$ es convexo.

C.4 Semicontinuidad

Sea V un espacio de Banach, el funcional $\mathscr{F} : V \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ es *semicontinuo* inferiormente si se verifican las condiciones equivalentes

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in V; \mathscr{F}(x) \leq \alpha\}$ es cerrado,
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in V; \mathscr{F}(x) > \alpha\}$ es abierto.

C.5 Diferencial en el Sentido de Gâteaux

Se dice que el funcional $\mathscr{F} : V \to \mathbb{R}$ es *Gâteaux-diferenciable en el punto* $v_0 \in V$ *según la dirección* $v \in V$ si el cociente

$$\frac{\mathscr{F}(v_0 + \varepsilon v) - \mathscr{F}(v_0)}{\varepsilon}, \tag{C.8}$$

posee un límite cuando $\varepsilon \to 0$ por valores positivos. En este caso, lo anterior lo representaremos con

$$\delta\mathscr{F}(v_0; v) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}[\mathscr{F}(v_0 + \varepsilon v) - \mathscr{F}(v_0)] = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\mathscr{F}(v_0 + \varepsilon v)\bigg|_{\varepsilon=0}. \tag{C.9}$$

En particular $\delta\mathscr{F}(v_0; v)$ es llamado *diferencial-Gâteaux del funcional* $\mathscr{F}$ *en el punto* v_0 *según la dirección* v. Este diferencial también es conocido como *primera variación de* $\mathscr{F}$ *en el punto* v_0 *según la dirección* v.

Si a su vez, existe $D\mathscr{F}(v_0) \in V'$ tal que

$$\delta\mathscr{F}(v_0; v) = \langle D\mathscr{F}(v_0), v\rangle, \tag{C.10}$$

diremos que $D\mathscr{F}(v_0)$ es la *derivada Gâteaux* del funcional $\mathscr{F}$ en el punto v_0.

Teorema C.1 *Sea* $\mathscr{F} : V \to \mathbb{R}$ *Gâteaux-diferenciable. Luego, el funcional* $\mathscr{F}$ *es convexo si y sólo si la aplicación de* v *en* V' *que a cada* $v \in V$ *le hace corresponder* $D\mathscr{F}(v) \in V'$ *es monótona, es decir si se satisface*

$$\langle D\mathscr{F}(v_2) - D\mathscr{F}(v_1), v_2 - v_1\rangle \geq 0 \quad \forall v_1, v_2 \in V. \tag{C.11}$$

C.6 Minimización de Funcionales Convexos

Consideremos el funcional $\mathscr{J} : V \to \mathbb{R}$ y sea $\mathscr{C} \subset V$ un conjunto de V, donde V es un espacio de Banach. Decimos que $\mathscr{J}(u_0)$ es un *mínimo relativo de* $\mathscr{J}$ *en* $\mathscr{C}$ si $u_0 \in \mathscr{C}$ y si existe una vecindad $\mathscr{N}_\delta(u_0)$ tal que

$$\mathscr{J}(u) \geq \mathscr{J}(u_0) \quad \forall u \in \mathscr{C} \cap \mathscr{N}_\delta(u_0). \tag{C.12}$$

A su vez, decimos que $\mathscr{J}(u_0)$ es un *mínimo absoluto de* $\mathscr{J}$ *en* $\mathscr{C}$ si $u_0 \in \mathscr{C}$ y si

$$\mathscr{J}(u) \geq \mathscr{J}(u_0) \quad \forall u \in \mathscr{C}. \tag{C.13}$$

Teorema C.2 *Sea* V *un espacio de Banach reflexivo, si* $\mathscr{J}$ *es semicontinuo inferiormente y si* $\mathscr{C}$ *es un subconjunto limitado y cerrado de* V*, entonces, existe al menos un mínimo absoluto en* $\mathscr{C}$

Debemos observar que en el caso de V ser un espacio de dimensión finita, el teorema anterior nos dice que toda función (de valor real) continua sobre un conjunto cerrado y limitado alcanza al menos una vez su mínimo.

Teorema C.3 *Si V es un espacio de Banach reflexivo y $\mathscr{J}$ es semicontinuo inferiormente y coercivo, es decir que $\mathscr{J}$ es tal que*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \mathscr{J}(u) = +\infty, \tag{C.14}$$

entonces, existe al menos un mínimo absoluto.

Teorema C.4 *Sea $\mathscr{C}$ un abierto de V, luego*

i) si $u_0 \in \mathscr{C}$ es un mínimo relativo de $\mathscr{J}$ en $\mathscr{C}$ y si $\mathscr{J}$ es Gâteaux-diferenciable, entonces

$$\delta \mathscr{J}(u_0; v) = 0 \quad \forall v \in V; \tag{C.15}$$

ii) si $\mathscr{J}$ es convexo y Gâteaux-diferenciable, entonces todo mínimo local es un mínimo absoluto y también

$$\mathscr{J}(u) \geq \mathscr{J}(u_0) \quad \forall u \in \mathscr{C}, \tag{C.16}$$

es equivalente a la siguiente expresión

$$\delta \mathscr{J}(u_0; u) = 0 \quad \forall u \in V, \tag{C.17}$$

iii) si $\mathscr{J}$ es estrictamente convexo, entonces u_0 es único.

Teorema C.5 *Si $\mathscr{J}$ es Gâteaux-diferencible en $\mathscr{C}$, y $\mathscr{C}$ es un subconjunto convexo del espacio de Banach reflexivo V, y si $u_0 \in \mathscr{C}$ es tal que*

$$\mathscr{J}(u) \geq \mathscr{J}(u_0) \quad \forall u \in \mathscr{C}, \tag{C.18}$$

luego

$$\delta \mathscr{J}(u_0; u - u_0) \geq 0 \quad \forall u \in \mathscr{C}. \tag{C.19}$$

Además, si $\mathscr{J}$ es convexo las dos expresiones anteriores son equivalentes.

Referencias

1. Akhiezer, N.I.: The Calculus of Variations. Blaisdell Pub. (1962)
2. Ames, W.F.: Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, vol. 1-2. Academic Press (1972)
3. Ames, W.F.: Numerical Methods for Partial Differential Equations. Academic Press (1977)
4. Andrade, E.N.: On the viscous flow in metals and allied phenomena. Proc. of the Royal Society **A84**(1) (1910)
5. Andrade, E.N.: The flow in metals under large constant stresses. Proc. of the Royal Society **A90**(329) (1914)
6. Argyris, J.H.: Energy theorems and structural analysis. Aircraft Eng. **26**, 347–356 (1954)
7. Argyris, J.H.: Energy theorems and structural analysis. Aircraft Eng. **27**, 42–58 (1955)
8. Argyris, J.H.: Matrix analysis of three dimensional elastic media, small and large deflections. AIAA J. **3**, 45–51 (1965)
9. Argyris, J.H.: Tethrahedron elements with linearly varying strain for the matrix displacement method. J. Roy. Aeron. Soc. **69**, 877–880 (1965)
10. Argyris, J.H.: Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method. J. Roy. Aeron. Soc. **69**, 711–713 (1965)
11. Argyris, J.H.: Matrix displacement analysis of plates and shells. Engr. Arch **35**, 102–142 (1966)
12. Argyris, J.H., Fried, I., Scharpf, D.W.: The tuba family of platesl elements for the matrix displacement method. Aeron. J. Roy. Aeron. Soc. **72**, 702–709 (1968)
13. Argyris, J.H., Kelsey, S.: Energy Theorems and Structural Analysis. Butterworth and Co., London (1960)
14. Argyris, J.H., Scharpf, D.W.: The sheba family of shell elements for the displacement method. Aeron. J. Roy. Aeron. Soc. **72**, 873–883 (1968)
15. Argyris, J.H., Scharpf, D.W.: Finite element in space and time. Nucl. Eng. Design **10**(4), 456–464 (1969)
16. Ashby, M.F.: A first report on deformation mechanism maps. Acta Metallurgical **20**, 887–898 (1972)
17. Ashwell, D.G., Gallagher, R.H.: Finite elements for thin shells and curved members. In: Conference on Finite Elements Applied to Thin Shells and Curved Members. John Willey, Cardiff, 1974 (1976)
18. Aubin, J.P.: Approximation of Elliptic Boundary Value Problems. John Willey (1972)
19. Bachman, G., Narici, L.: Functional Analysis. Acadenmic Press (1966)
20. Bailey, R.W.: Creep of steel under simple and coumpound stresses and the use of high initial temperature in steam power plants. In: Trans. World Power Conference (Vol. 3), Tokyo, p. 1089 (1929). Publicado también en Engineering, 129, 265, 1930
21. Bailey, R.W.: The utilization of creep test data in engineering design. Proc. of the Inst. of Mech. Engineers **131**, 260 (1936)
22. Barbosa, H.J.C., Feijóo, R.A.: Numerical algorithms for contact problems in linear elastostatic. In: Conference on Stress Analysis in Nuclear Power Plants. Porto Alegre, Brasil (1984)
23. Bartle, R.G.: The Elements of Real Analysis, 2nd edn. Wiley (1976)
24. Bazaraa, M.S., Shetty, C.M.: Nonlinear Programming: Theory and Algorithms. John Wiley (1979)
25. Belytschko, T., Loehnert, S., Song, J.H.: Multiscale aggregating discontinuities: A method for circumventing loss of material stability. Int. J. Num. Meth. Eng. **73**, 869–894 (2008)
26. Belytschko, T., Song, J.H.: Coarse-graining of multiscale crack propagation. Int. J. Num. Meth. Eng. **81**, 537–563 (2010)
27. Bensoussan, A., Lions, J., Papanicolaou, G.: Asymptotic analysis for periodic structures. Elsevier, North-Holland (1978)
28. Bernasconi, G., Piatti, G.: Creep of Engineering Materials and Structures. Applied Science Publishers (1979)

29. Besseling, J.F.: A theory of elastic, plastic and creep deformations of an initially isotropic material. J. Appl. Mech. **25** (1958)
30. Bevilacqua, L., Feijóo, R.A., Rojas, L.: Torsión de barras seccionalmente homogéneas. Publicación Técnica 22.73, Coppe/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (1973)
31. Bevilacqua, L., Feijóo, R.A., Rojas, L.: A variational principles for the laplace's operators with applications in the torsion of composite rods. Int. J. Solids and Structures **10** (19744)
32. Blanco, P., Clausse, A., Feijóo, R.: Homogenization of the Navier-Stokes equations by means of the Multi-scale Virtual Power Principle. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **XX**, XX–XX (2017)
33. Blanco, P., Giusti, S.: Thermomechanical multiscale constitutive modeling: accounting for microstructural thermal effects. J. Elast. **115**, 27–46 (2014)
34. Blanco, P., Sánchez, P., de Souza Neto, E., Feijóo, R.: Variational foundations and generalized unified theory of RVE-based multiscale models. Arch. Computat. Methods Eng. **23**, 191–253
35. Blanco, P., Sánchez, P., de Souza Neto, E., Feijóo, R.: The Method of Multiscale Virtual Power for the derivation of a second order mechanical model. Mech. Mater. **99**, 53–67 (2016)
36. Bliss, G.A.: Lectures of the Calculus of Variations. University of Chicago Press (1945)
37. Bolza, O.: Lectures of the Calculus of Variations. Dover Pub. (1961)
38. Boyle, J.T., Spence, J.: Generalized structural model in creep mechanics. In: A.R.S.P. y D. R. Hayhurst (ed.) Creep in Structures. Springer-Verlag (1981)
39. Boyle, J.T., Spence, J.: Stress Analysis for Creep. Butterworths (1983)
40. Bramble, J.H., Hilbert, S.R.: Bounds for a class of linear functionals with applications to hermite interpolation. Num. Math. **16**, 362–369 (1971)
41. Brebbia, C.A., Tottenham, H. (eds.): Variational Methods in Engineering. Southampton University Press (1973)
42. Brézis, P.H.: Problémes unilateraux. J. Math. Pures et Appl. **51**, 1–168 (1972)
43. Budiansky, B.: On the elastic moduli of some heterogeneous materials. J. Mech. Phys. Solids **13**, 223–227 (1965)
44. Calladine, C.R., Drucker, D.C.: Nesting surfaces of constant rate of energy dissipation in creep. Quarterly of Appl. Mathematics **20**(1), 79–84 (1962)
45. Carey, G.F., Oden, J.T.: Finite Elements: Fluid Mechanics, *The Texas Finite Element Series*, vol. 6. Prentice-Hall (1986)
46. Carnahan, B., Luther, H.A., Wilkes, J.: Applied Numerical Methods. John Wiley (1969)
47. Chadwic, P.: Continuum Mechanics. John Wiley (1976)
48. Cheney, E.W.: Introduction to Approximation Theory. McGraw Hill (1966)
49. Ciarlet, P.G.: Orders of Convergence in Finite Element Methods. Mathematics of Finite Elements and Applications. Academic Press (1973)
50. Ciarlet, P.G.: The Finite Element Method for Elliptic Problems, *Studies in Mathematics and its Applications*, vol. 4. North–Holland Publishing Company (1978)
51. Cohn, M.A., Maier, G.: Engineering Plasticity by Mathematical Programming. Pergamon Press (1979)
52. Collatz, L.: The Numerical Treatment of Differential Equations, 3rd. edn. Springer Verlag (1966)
53. Comite sobre Comportamento Inelástico de Materiais da ABCM: Influência dos parâmetros da lei de norton na determinação de tensões e deformações em materiais que experimentam fenômenos de creep. In: I SIBRAT. Salvador, Brasil (1980). Publicado como Relatorio T. C. 011/80 del LCC/CNPq
54. Comite sobre Comportamento Inelástico de Materiais da ABCM: Comparação entre as equações de norton e mukherjee na determinação de tensões e deformações em materiais que experimentan fenômenos de fluência. In: Inter-American Conf. on Materiais Technology, pp. 87–90. Mexico (1981)
55. Comite sobre Comportamento Inelástico de Materiais da ABCM: Modelagem mecânica do desempenho estrutural de um vaso de pressão submetido a fluência. In: II SIBRAT. Salvador, Brasil (1982). También publicado como Relatorio Técnico Científico 014/82 del LCC/CNPq

56. Connor, J.J., Brebbia, C.A.: Finite Element Techniques for Fluid Flows. Newnes–Butterworths (1977)
57. Cosserat, E., Cosserat, F.: Théorie des corps déformables. Hermann, Paris (1909)
58. Courant, B.: Variational methods for the solutions of problems of equilibrium and vibrations. Bull. American Math. Soc. **49**, 1–23 (1943)
59. Courant, B.: Differential and Integral Calculus, vol. 2. Wiley–Interscience Publishers (1968)
60. Courant, B., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, vol. 1-2. Interscience Publishers (1953)
61. Cuvelier, C., Segal, A., van Stenhoven, A.A.: Finite Element Methods and Navier–Stokes Equations. Mathematics and Its Applications. D. Reidel Publishing Company (1986)
62. Da Fonseca, Z.: Soluciones numéricas via métodos variacionales en problemas de termoelasticidad dinámica acoplada. Master's thesis, Prog. Eng. Mecânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (1977)
63. Dahlquist, G., Bjorck, A.: Numerical Methods. Prentice Hall (1974)
64. Davis, P.J.: Interpolation and Approximation. Dover Pub. (1963)
65. De Veubeke, F.: Bending and stretching of plates. In: Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics. Wright-Patterson Air Force, Ohio, USA (1965)
66. De Veubeke, F.: Displacements and equilibrium models. In: O.C.Z. y G. S. Holister (ed.) Stress Analysis, pp. 145–197. John Wiley (1965)
67. De Veubeke, F.: A confotming finite element for plate bending. Int. J. Solids Structures **4**, 95–108 (1968)
68. De Veubeke, F.: Variational principles and the patch test. Int. J. Num. Methods Engng **8**, 783–801 (1974)
69. Destuynder, P.: Introduction à la théorie des coques minces èlastiques. analyse numérique de problemes de coques minces - description des résultats et exemples. Tech. rep., INRIA Report (1981)
70. Detteman, J.W.: Mathematical Methods in Physics and Engineering. McGraw Hill (1962)
71. Dikmen, M.: Theory of thin elastic shells. Pitman Advanced Publ. Program (1982)
72. Dorfmann, L., Ogden, R.: Nonlinear Theory of Electroelastic and Magnetoelastic Interactions. Springer, New York (2014)
73. Dorn, J.E.: Progress in understanding high-temperature creep. In: H.W. Gilette Memorial Lecture. Am. Soc. for Testing and Mat., Philadelphia (1962)
74. Dorn, J.E.: Some fundamental experiments on high temperature creep. In: Proc. Conf. on Creep and Fracture of Metals at High Temperatures (1965)
75. Duvaut, G., Lions, J.L.: Les Inéquations en Méchanique et en Physiques. Dunod (1972)
76. Dym, C., Shames, I.H.: Solid Mechanics a Variational Approach. McGraw Hill (1973)
77. Ekeland, I., Temam, R.: Analyse Convex et Problèmes Variationneles. Dunod (1974)
78. Elsgoltz, L.: Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional. Editora Mir, Moscú (1969)
79. Eringen, A.: Microcontinuum Field Theories. I: Foundations and Solids. Springer-Verlag, New York (1999)
80. Eringen, A.: Microcontinuum Field Theories. II: Fluent Media. Springer-Verlag, New York (1999)
81. Faddeeva, F.: Computational Methods of Linear Algebra. Freeman, San Francisco (1963)
82. Feijóo, R.A.: Aplicación del método de ritz a funcionales relajados en mecánica de los sólidos. Tesis de m. sc., Prog. de Eng. Civil, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (1973)
83. Feijóo, R.A.: Introducción a Mecánica del Contínuo. I Escola de Matemática Aplicada. Laboratório Nacional de Computação Científica, Brasil (1978)
84. Feijóo, R.A.: Algunos aspectos de la matemática aplicada en mecánica del continuo. Boletim da Soc. Bras. Mat. Aplic. e Computacional **2**, 33–62 (1982)
85. Feijóo, R.A., Barbosa, H.J.C.: Static analysis of piping systems with unilateral supports. In: VII COBEM-Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, pp. D:635–638. Brasil (1983)
86. Feijóo, R.A., Bevilacqua, L.: Sequential interpolation fuctions. Int. J. Num. Methods Engng. **10**, 133–144 (1976)

87. Feijóo, R.A., Rojas, L., Bevilacqua, L.: Application of variational principles to extended functional in discontinuous fields for the beam problem. In: I Simpósio Brasileiro de Ciências Mecânicas. Rio de Janeiro, Brasil (1973)
88. Feijóo, R.A., Rojas, L., Bevilacqua, L.: Generalización del método de ritz vía funcionales relajados. In: XVI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural. Buenos Aires, Argentina (1974)
89. Feijóo, R.A., Rojas, L., Taroco, E., Bevilacqua, L.: Métodos variacionales en cáscaras axisimétricas sometidas a cargas arbitrarias. In: XVIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural. Salvador, Bahia, Brasil (1976)
90. Feijóo, R.A., Taroco, E.: Algoritmos numéricos en creep secundario. In: 2º Congreso Latinoamericano sobre Métodos Computacionales. Curitiba, Brasil (1980). También publicado como Relatorio Técnico Cientifico Nº 010/80 del LCC/CNPq
91. Feijóo, R.A., Taroco, E.: II Escola de Matemática Aplicada, vol. 2, chap. Introducción a Plasticidad y su Formulación Variacional, pp. 1–156. Laboratório de Cálculo, Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CNPq (1980)
92. Feijóo, R.A., Taroco, E.: Métodos Variacionais em Mecânica dos Sólidos, *II Escola de Matemática Aplicada*, vol. 2. Laboratório de Cálculo - CBPF (1980)
93. Feijóo, R.A., Taroco, E.: I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo 1, chap. Principios y Métodos Variacionales en Mecánica, pp. 117–195. Laboratório de Cálculo - LCC-CBPF/CNPq (1982)
94. Feijóo, R.A., Taroco, E.: I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo 2, chap. Principios Variacionales y el Método de los Elementos Finitos en la Teoria de Placas y Cáscaras, pp. 1–116. Laboratório de Cálculo - LCC/CNPq (1983)
95. Feijóo, R.A., Taroco, E., Guerreiro, J.N.C.: Análisis de tensiones y deformaciones en problemas de creep no estacionario. In: I SIBRAT. Salvador, Brasil (1980)
96. Feijóo, R.A., Taroco, E., Guerreiro, J.N.C.: I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo 2, chap. Introducción a Fluencia, pp. 251–298. Laboratório de Cálculo - LCC/CNPq (1983)
97. Feijóo, R.A., Taroco, E., Guerreiro, J.N.C.: Métodos numéricos en el análisis de tensiones. In: Anales del ACETE - Análise de Componentes Estruturais em Temperaturas Elevadas. LNCC/CNPq (1983)
98. Feijóo, R.A., Taroco, E., Zouain, N.: Nuevos resultado en el análisis limite via creep secundario modificado. In: Congreso Latinoamericano sobre Métodos Computacionales en Ingenieria (1982). También publicado en la Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Nº2, vol. IV, 25-34,1982. Publicado también como Relatorio Técnico Científico Nº004/82, LCC/CNPq, Brasil
99. Feijóo, R.A., Taroco, E., Zouain, N.: Princípios Variacionais em Mecânica, *II Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo I*, vol. 1. Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC (1984)
100. Feijóo, R.A., Zouain, N.: Análisis elastoplástica via optimización. Publicação Técnico Científica 004/83, Laboratório de Computação Cienífica -LCC/CNPq (1983)
101. Feyel, F., Chaboche, J.: Fe^2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **183**, 309–330 (2000)
102. Fichera, G.: Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints, *Handbuch der Physics*, vol. Band via/2, pp. 391–424. Springer Verlag (1972)
103. Fichera, G.: Existence Theorems in Elasticity, *Handbuch der Physics*, vol. Band via/2, pp. 347–389. Springer Verlag (1972)
104. Finlayson, B.A.: The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press (1972)
105. Flugge, W.: Tensor Analysis and Continuum Mechanics. Springer Verlag (1972)
106. Forsythe, G.E., Moler, C.: Computer Solutions of Linear Algebraic Systems. Prentice Hall (1967)
107. Forsythe, G.E., Wason, W.R.: Finite Difference Methods for Partial Differential Equations. John Wiley (1960)

108. Fremond, M.: Methodes Variationnelles en Calcule des Structures. École Nationale des Ponts et Chaussés (1980)
109. Frost, J.J., Ashby, M.F.: Deformation mechanism maps for pure iron two austenitic stainless steels and lowalloy ferritic steel. Tech. rep., Univ. Cambridge, Departmen of Engng. (1975)
110. Fung, Y.C.: Foundaions of Solid Mechanics. Prentice Hall (1965)
111. Gelfand, I.M., Fomin, S.V.: Calculus of Variations. Prentice Hall (1963)
112. Geradin, M.: On the variational method in the direct integration of the transient structural response. J. of Sound and Vibration **34**(4), 479–487 (1974)
113. Germain, P.: Sur l'application de la méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus. C. R. Acad. Sci., Série A **274**, 1051–1055 (1972)
114. Germain, P.: La méthode des poissances virtuelles en méchanique des milieux continus. première partie: Théorie du second gradiant. Journal de Méchanique **12**(2), 235–274 (1973)
115. Germain, P.: The method of virtual power in continuum mechanics. part 2: Microstructure. SIAM J. Appl. Math. **25**(3), 556–575 (1973)
116. Germain, P.: Course de Mechanique, vol. 1, 2. École Polytechnique (1980)
117. Germain, P.: I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo 1, chap. Four Lectures on the Foundation of Shell Theory. Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq (1982)
118. Germain, P., Nguyen, Q.S., Suquet, P.: Continuum thermodynamics. Comunicasión personal proporcionada por el primer autor
119. Girault, V., Raviart, P.: Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms. Springer-Verlag (1986)
120. Giusti, S., Blanco, P., de Souza Neto, E., Feijóo, R.: An assessment of the gurson yield criterion by a computational multi-scale approach. Engineering Computations: International Journal for Computer-Aided Engineering and Software **26(3)**, 281–301 (2009)
121. Glowinsky, R., Lions, J.L., Tremoliers, R.: Analyse Numerique des Inequations Variationnelles. Dunod (1976)
122. Gonzales Guirnaldes, C.: Métodos variacionales en termoelasticidad. Tesis de m. sc., Prog. de Eng. Mecânica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil (1977)
123. Green, A.: Micro-materials and multipolar continuum mechanics. International Journal of Engineering Science **3**(533–537) (1965)
124. Green, A., Rivlin, R.: Multipolar continuum mechanics: functional theory. Proc. Roy. Soc. Ser. A **284**(303–324) (1965)
125. Greenbaum, G.A., Rubinstein, M.F.: Creep analysis of a axisymmetric bodies using finite elements. Nuclear Engng. Design **7**, 379–397 (1968)
126. Greenberg, H.J.: Complementary minimum principles for an elastic-plastic material. Quarte. Appl. Math. **7**, 85 (1949)
127. Guerreiro, J.N.C.: I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo 2, vol. 2, chap. Análise de Casos Particulares- Fluência, pp. 415–448. LCC/CNPq, Brasil (1983)
128. Gurson, A.: Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth. part i: Yield criteria and flow rule for porous media. J. Engng. Mat. Techn. **99**, 2–15 (1949)
129. Gurtin, M.E.: The Linear Theory of Elasticity, 6th edn. Handbuch der Physik. Springer Verlag (1972)
130. Gurtin, M.E.: An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press (1981)
131. Gurtin, M.E.: Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics. Springer (1991)
132. Gurtin, M.E., Martins, L.C.: Cauchy's theory in classical physics. Arech. Rat. Mech. Anal. **60**, 305–324 (1976)
133. Halmos, P.R.: Finite-Dimensional Vector Spaces, 2nd edn. Van Nostrand-Reinhold (1958)
134. Halphen, B., Nguyen, Q.S.: Sur les matériaux standards généralisés. Journal de Mécanique **14**, 39–63 (1975)
135. Hashin, Z., Shtrikman, S.: A variational approach to the theory of elastic behaviour of multiphase materials. J. Mech. Phys. Solids **11**, 127–140 (1963)
136. Hault, P.: Some comments on thermomechanical constitutive equations for inelastic analysis of lmfor components. In: 4^{th} Int. Conf. Struct. Mech. Reactor Technology. San Francisco (1977)

137. Hildebrand, F.B., Reissner, E., Thomas, G.: Notes on the foundations of the theory of small displacements of orthotropic shells. NACA Technical Note 1833, NACA (1949)
138. Hill, R.: The Mathematical Theory of Plasticity. Oxford University Press (1950)
139. Hill, R.: Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles. J. Mech. Phys. Solids **11**, 357–372 (1963)
140. Hill, R.: Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. J. Mech. Phys. Solids **13**, 89–101 (1965)
141. Hill, R.: A self-consistent mechanics of composite materials. J. Mech. Phys. Solids **13**, 213–222 (1965)
142. Hill, R.: On constitutive macro-variables for heterogeneous solids at finite strain. Proc. R. Soc. Lond. **A 326**, 131–147 (1972)
143. Hodge, P.G.: Plastic Analysis of Structures. McGraw Hill (1959)
144. Hodge, P.G.: Limit Analysis of Rotarionally Symmetric Plates and Shells. Prentice-Hall (1963)
145. Hult, J.A.H.: Creep in Engineering Structures. Blaisdell Pub. Com. (1966)
146. Irving, J., Kirkwood, J.: The statistical mechanical theory of transport processes. iv. the equations of hydrodynamics. J. Chem. Phys. **18**, 817–829 (1950)
147. Isaacson, E., Keller, H.B.: Analysis of Numerical Methods. John Wiley and Sons (1966)
148. Johnson, C.: On finite element methods for plasticity problems. Numerische Mathematik **26**, 79–84 (1976)
149. Johnson, C.: Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method. Cambridge University Press (1987)
150. Kachanov, L.M.: The Theory of Creep. Lending Library (1967)
151. Kachanov, L.M.: Fundamentals of The Theory of Plasticity. MIR Publishers (1974)
152. Kirkwood, J.: The statistical mechanical theory of transport processes. i. general theory. J. Chem. Phys. **14**, 180–201 (1946)
153. Kirkwood, J.: The statistical mechanical theory of transport processes. ii. transport in gases. J. Chem. Phys. **15**, 72–76 (1947)
154. Kirkwood, J., Buff, F., Greenn, M.: The statistical mechanical theory of transport processes. iii. the coefficients of shear and bulk viscosity of liquids. J. Chem. Phys. **17**, 988–994 (1949)
155. Koiter, W.T.: A consistent first approximation in the general theory of thin elastic shells. In: IUTAM Symposium on the theory of thin elastic shells. North-Holland, Amsterdam, pages 12-32, 1960 (1959)
156. Koiter, W.T.: General theorems for elastic-plastic solids. In: I.N. Sneddon, R. Hill (eds.) Progress in Solid MMechanics. North-Holland Press (1960)
157. Kolmogorov, A.N., Fomin, S.V.: Elementos de la Teoría de Funciones y del Análisis Funcional. Editorial Mir–Moscú (1972)
158. Kouznetsova, V., Brekelmans, W., Baaijens, F.: An approach to micro-macro modeling of heterogeneous materials. Comp. Mech. **27**, 37–48 (2001)
159. Kouznetsova, V., Geers, M., Brekelmans, W.: Multiscale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. Int. J. Num. Meth. Eng. **54**, 1235–1260 (2002)
160. Kouznetsova, V., Geers, M., Brekelmans, W.: Multiscale second order computational homogenization of multi-phase materials: A nested finite element solution strategy. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **193**, 5525–5550 (2004)
161. Kraus, H.: Creep Analysis. John Wiley (1980)
162. Kreyszig, E.: Introductory Functional Analysis with Applications. John Wiley (1978)
163. Lanczos, C.: The Variational Principles of Mechanics, 4th. edn. University Toronto Press (1970)
164. Larsson, F., Runesson, K., Su, F.: Variationally consistent computational homogenization of transient heat flow. Int. J. Num. Meth. Eng. **81**, 1659–1686 (2010)
165. Larsson, R., Diebels, S.: A second-order homogenization procedure for multi-scale analysis based on micropolar kinematics. Int. J. Num. Meth. Eng. **69**, 2485–2512 (2007)
166. Larsson, R., Zhang, Y.: Homogenization of microsystem interconnects based on micropolar theory and discontinuous kinematics. J. Mech. Phys. Solids **55**, 819–841 (2007)

167. Lebedev, L., Cloud, M., Eremeyev, V.: Tensor Analysis with Applications in Mechanics. World Scientific, Singapore (2010)
168. Leipholz, H.: Direct Variational Methods and Eigenvalue Problems in Engineering. Noordhoff Int. Pub. (1975)
169. Liu, I.S.: Introduction to continuum mechanics. In: Textos de Métodos Matemáticos. Univ. Fed. de Rio de Janeiro, Brasil (1988)
170. Loehnert, S., Belytschko, T.: A multiscale projection method for macro/microcrack simulations. Int. J. Numer. Meth. Engng. **71**, 1466–1482 (2007)
171. Love, A.E.H.: A treatise on the mathematical theory of elasticity. Cambridge University Press, 2 Edition (1906)
172. Luenberger, D.G.: Optimization by Vector Space Methods. John Wiley (1969)
173. Maier, G.: Quadratic programming and theory of elastic perfectly plastic structures. Meccanica **3**, 265–273 (1968)
174. Maier, G.: Piecewise linearization of yield criteria in structural plasticity. S. M. Archives **213**, 139–281 (1976)
175. Maier, G., Munzo, J.: Mathematical programming applications to engineering plastic analysis. Applied Mechanics Reviews **35**, 1631–1643 (1982)
176. Malvern, L.E.: Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium. Series in Engineering of the Physical Sciences. Prentice–Hall (1969)
177. Mandel, J.: Plasticité Classique et Viscoplasticité. CISM Lecture Notes N^o97. Springer-Verlag (1971)
178. Marchuk, G.I.: Methods of Numerical Mathematics. Springer Verlag (1975)
179. Marin, J., Pao, Y.N.: An analitical theory of the creep deformation of materials. J. Appl. Mech. **20** (1953)
180. Martin, J.B.: Plasticity, Fundamentals and General Results. Mit Press (1975)
181. Maugin, G.: Material Inhomogeneities in Elasticity. Chapman & Hall (1993)
182. Maugin, G.A.: The method of virtual power in continuum mechanics: Application to coupled fields. Acta Mechanica **35**, 1–70 (1980)
183. McDowell, D.: A perspective on trends in multiscale plasticity. Int. J. Plasticity **26**, 1280–1309 (2010)
184. McVetty, P.: Creep of metals at elevated temperatures. The Hyperbolic-Sine relation between stress and creep rate. Transactions of the ASME **65**(761–767) (1943)
185. Meyer, H.D.: The numerical solution of nonlinear parabolic problems by variational methods. SIAM J. Num. Anal. **10**(4) (1973)
186. Michel, J., Moulinec, H., Suquet, P.: Effective properties of composite materials with periodic microstructure: A computational approach. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **172**, 109–143 (1999)
187. Miehe, C., Koch, A.: Computational micro-to-macro transition of discretized microstructures undergoing small strain. Arch. Appl. Mech. **72**, 300–317 (2002)
188. Miehe, C., Schotte, J., Lambrecht, J.: Homogenization of inelastic solid materials at finite strains based on incremental minimization principles. Application to the texture analysis of polycrystals. J. Mech. Phys. Solids **50**, 2123–2167 (2002)
189. Miehe, C., Schotte, J., Schröder, J.: Computational micro-macro transitions and overall moduli in the analysis of polycrystals at large strains. Computational Materials Science **6**, 372–382 (1999)
190. Miehe, C., Schroder, J., Becker, M.: Computational homogenization analysis in finite elasticity: material and structural instabilities on the micro- and macro-scales of periodics composites and their interaction. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **191**, 4971–5005 (2002)
191. Mikhlin, S.G.: Variational Methods in Mathematical Physics. Pergamon Press (1964)
192. Mikhlin, S.G.: The Problem of the Minimum of Quadratic Functionals. Holden Day (1965)
193. Mikhlin, S.G.: Mathematical Physics and Advanced Course. North Holland (1970)
194. Mikhlin, S.G.: The Numerical Performance of Variational Methods. Nordhoff Pub. (1971)
195. Mikhlin, S.G.: An Approximation on Rectangular Grid. Sijthoff-Noordhoff (1979)
196. Mikhlin, S.G., Smolitskiy, K.L.: Approximate Methods of Solution for Differential and Integral Equations. Elsevier (1967)

197. Morse, M.: Variational Analysis, Critical Extremals and Sturmian Extensions. John Wiley (1973)
198. Mukherjee, A.K., Bird, J.E., Dorn, J.E.: Experimental correlations for high temperature creep. Trans. ASME **1** (1969)
199. Nadai, A.: The Influence of Time upon Creep, The Hyperbolic Sine Low. S. Timoshenko Anniversary. Mac Millan (1938)
200. Naghdi, P.M.: On the theory of thin elastic shells. Quart. Appl. Math. **14**, 369–380 (1957)
201. Naghdi, P.M.: Foundations of elastic shell theory. Prog. Solid Mech. **4**, 1–90 (1963)
202. Naylor, A.W., Sell, G.R.: Linear Operator Theory in Engineering and Sciences. Hold, Rinehart, Winston (1971)
203. Necas, J.: Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques. Masson et Cia. Editeurs (1967)
204. Nemat-Nasser, S.: Averaging theorems in finite deformation plasticity. Mechanics of Materials **31**, 493–523 (1999)
205. Norton, F.H.: Creep of Steel at High Temperatures. MacGraw Hill (1929)
206. Novozhilov, V.V.: Thin shell theory. Wolters-Noordhoff, Groningem (1970)
207. Oden, J.T.: Calculation of stiffness matrices for finite elements thin shells of arbitrary shape. AIAA J. **6**(5) (1968)
208. Oden, J.T.: Finite element analysis of nonlinear problems in the dynamic theory of coupled thermoelasticity. Nuclear Engn. Design **10**, 485–475 (1969)
209. Oden, J.T.: Finite element formulation of problems of finite deformation and irreversible thermodynamics of nonlinear continua - a survey and extension of recent developments. In: Japan - U. S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design. Tokio, Japan (1969)
210. Oden, J.T.: Finite element applications in mathematical physics. In: Whiteman (ed.) The Mathematics of Finite Elements and Applications, pp. 239–282. England (1972)
211. Oden, J.T.: Finite Elements of Nonlinear Continua. McGraw Hill (1972)
212. Oden, J.T.: An imbedding technique for the generation of weak-weak finite approximation of linear and nonlinear operators. J. E. M. D. ASCE (1972)
213. Oden, J.T.: Applied Functional Analysis. Prentice Hall (1979)
214. Oden, J.T. (ed.): Computational Methods in Nonlinear Mechanics. North Holland, Texas (1980). Proceedings of the TTICOM 2nd Int. Conf.
215. Oden, J.T.: Exterior penalty methods for contact problems in elasticity. In: W. Wunderlich (ed.) Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics. Springer Verlag (1981)
216. Oden, J.T., Aguirre-Ramirez, G.: Formulation of general discrete models of thermomechanical bihavior of materials with memory. Int. J. Solids Structures **5**, 1077–1093 (1969)
217. Oden, J.T., Armstrong, W.H.: Analysis of nonlinear dynamic coupled thermoviscoelasticity problems by the finite element methods. Computers and Structures **1**, 603–621 (1971)
218. Oden, J.T., Carey, G.F.: Finite Elements: A Second Course, *The Texas Finite Element Series*, vol. 2. Prentice–Hall (1983)
219. Oden, J.T., Carey, G.F.: Finite Elements: Mathematical Aspects, *The Texas Finite Element Series*, vol. 4. Prentice–Hall (1983)
220. Oden, J.T., Carey, G.F., Becker, E.B.: Finite Elements: An Introduction, *The Texas Finite Element Series*, vol. 1. Prentice–Hall (1981)
221. Oden, J.T., Kelley, B.E.: Finite element formulation of general electrothermoelasticity problems. Int. J. Num. Meth Engng **3**, 161–179 (1971)
222. Oden, J.T., Reddy, J.N.: An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. John Wiley (1976)
223. Oden, J.T., Reddy, J.N.: Variational Methods in Theoretical Mechanics. Springer Verlag (1976)
224. Oden, J.T., Somogyi, D.: Finite element applications in fluid dynamics. J. Engng. Mech. Division ASCE **5**(EM3), 821–826 (1969)
225. Odqvist, F.K.: From stanford 1960 to gothenburg 1970. In: J. Hult (ed.) IUTAM Symposium on Creep in Structures. Springer Verlag (1972)

226. Odqvist, F.K.: Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. Clarendon Press, Oxford (1974)
227. Oikawa, H.: Three-dimensional presentation of deformation mechanism diagrams. Scripta Metallurgica **13**, 701–705 (1979)
228. Olszak, W., Sawczuk, A.: Inelastic Behaviour in Shell. Nordhoff (1967)
229. P. Kanouté D.P. Boso, J.C., Schrefler, B.: Multiscale methods for composites: A review. Arch. Comput. Methods Eng. **16**, 31–75 (2009)
230. Panagiotopoulos, P.D.: Inequality Problems in Mechanics and Applications. Birkhauser (1990)
231. Penny, R.K., Marriot, D.L.: Design for Creep. MacGraw Hill (1971)
232. Phillips, H.B.: Vector analysis. John Wiley & Sons (1933)
233. del Piero, G.: 2nd. Applied Mathematic Summer School, chap. Variational methods in Limit Analysis. R. A. Feijóo y E. Taroco (Eds.), Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil (1980)
234. del Piero, G., Podio-Guidugli, P.: 1a. Scuola Estiva di Fisica Matematica, chap. Seminario di Elasticitá Lineare. Ed. Tecnico Scientifica, Pisa, Italia (1978)
235. Podio-Guidugli, P.: An exact derivation of the thin plate equation. Journal of Elasticity **22**(2–3), 121–133 (1989)
236. Podio-Guidugli, P.: A virtual power format for thermomechanics. Continuunm Mech. Thermodyn. **20**, 479–487 (2009)
237. Polizzotto, C.: A gradient elasticity theory for second-grade materials and higher order inertia. Int. J. Solids Struct. **49**, 2121–2137 (2012)
238. Polizzotto, C.: A second strain gradient elasticity theory with second velocity gradient inertia – Part II: Dynamic behavior. Int. J. Solids Struct. **50**, 3766–3777 (2013)
239. Prager, W.: Strain hardening under combined stresses. J. Appl. Phy. **16** (1945)
240. Prager, W.: An Introduction to Plasticity. Wesley (1959)
241. Prenter, P.M.: Splines and Variational Methods. John Wiley (1975)
242. Prezemieniecki, J.S.: Theory of Matrix Structural Analysis. McGraw Hill (1968)
243. Rabotnov, Y.N.: Creep Problems in Structural Members. North Holland (1969)
244. Rektorys, K.: Variational Methods in Mathematical Sciences and Engineering. D. Reidel Publishing Company (1975)
245. Richtmyer, R.D., Morton, K.W.: Difference Methods for Initial–Value Problems, second edn. No. 4 in Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics. Interscience Publishers (1967)
246. Robinson, E.L.: 100.000 hours creep test. Mech.Engineering (1943)
247. Romano, G.: Variational inequalities and extremum principles in incremental elastoplasticity, parte i and ii. Tech. Rep. 307, Univ. Calabria, Cosenza, Italy (1975)
248. Romano, G.: A general variational theory of incremental elastic-plastic boundary value problems. Tech. Rep. 306, Univ. Napoli, Ist. di Scienza delle Costruzion, Italy (1979)
249. Romano, G.: Duality and variational principles in structural mechanics under bilateral and unilateral constrainsts. Tech. Rep. 13, Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil (1982)
250. Romano, G.: Principi e metodi variazionali nella meccanica delle struture e dei solidi, parte i: Principi. Tech. rep., Facoltà di Ingegneria dell'Università di Napoli, Italy (1984)
251. Romano, G., Alfano, G.: Variational principles and discrete formulations in plasticity. Personal communication
252. Romano, G., Romano, M.: On the foundation of variational principles in linear structural mechanics. Tech. Rep. 307, Univ. di Napoli, Ist. Scienza delle Costruzioni, Italia (1979)
253. Romano, G., Rosati, L., Marotti de Sciarra, F.: Variational formulations of non-linear and non-smooth structural problems. Int. J. Non-Linear Mechanics **28**(2), 195–208 (1993)
254. Romano, G., Rosati, L., Marotti de Sciarra, F.: Variational principles for a class of finite-step elasto-plastic problems with non-linear mixed hardening. Comp. Meth. Appli. Mech Engng. **109**, 293–314 (1993)
255. Romano, G., Rosati, L., Marotti de Sciarra, F.: A variational theory for finite-step elasto-plastic problems. Int. J. Solids Struct. **30**(17), 2317–2334 (1993)

256. Romano, G., Rosati, L., Marotti de Sciarra, F., Bisegna, P.: A potential theory for monotone multivalued operators. Quarterly of Applied Mathematics **LI**(4), 613–631 (1993)
257. Rozenblium, V.I.: Approximate equations of creep in thin shells. PMM **27**(1), 154–159 (1963)
258. Sagan, H.: Introduction to the Calculus of Variations. McGrawHill (1969)
259. Sagan, H.: Advances Calculus. Houghton Mifflin (1974)
260. Sánchez, P., Blanco, P., Huespe, A., Feijóo, R.: Failure-oriented multi-scale variational formulation for softening materials. Tech. Rep. P&D N°6, LNCC-MCTI Laboratório Nacional de Computação Científica (2011)
261. Sánchez, P., Blanco, P., Huespe, A., Feijóo, R.: Failure-oriented multi-scale variational formulation: micro-structures with nucleation and evolution of softening bands. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **257**, 221–247 (2013)
262. Sanchez-Palencia, E.: Non-Homogeneous Media and Vibration Theory, *Lecture Notes in Physics*, vol. 127. Springer-Verlag, Berlin (1980)
263. Sanchez-Palencia, E.: Homogenization method for the study of composite media. In: F. Verhulst (ed.) Asymptotic Analysis II. Surveys and New Trends. Lecture Notes in Mathematics, vol. 985, pp. 192–214. Springer Verlag (1981)
264. Sanders, J.L.: An improved first approximation theory for thin shells. Tech. Rep. R-24, NASA Technical Report (1959)
265. Save, M.A., Massonnet, C.E.: Plastic Analysis and Design of Beams and Frames. Blaisdell (1965)
266. Save, M.A., Massonnet, C.E.: Plastic Analysis and Design of Plates Shells and Disks. North-Holland (1972)
267. Song, J.H., Belytschko, T.: Multiscale aggregating discontinuities method for micro-macro failure of composites. Composites **Part B 40**, 417–426 (2009)
268. de Souza Neto, E., Blanco, P., Sánchez, P., Feijóo, R.: An RVE-based multiscale theory of solids with micro-scale inertia and body force effects. Mech. Mater. **80**, 136–144
269. de Souza Neto, E., Feijóo, R.: Variational foundations of multi-scale constitutive models of solids: small and large strain kinematical formulation. Tech. rep., LNCC, Laboratório Nacional de Computação Científica (2006)
270. de Souza Neto, E., Feijóo, R.: On the equivalence between spatial and material volume averaging of stress in large strain multi-scale constitutive models. Mech. of Materials **40**, 803–811 (2008)
271. de Souza Neto, E., Feijóo, R.: Variational foundations of large strain multiscale solid constitutive models: Kinematical formulation. In: M.V. Jr., E. de Souza Neto, P. Muñoz Rojas (eds.) Computational Materials Modelling: From Classical to Multi-Scale Techniques, pp. 341–378. Wiley, Chichester (2010)
272. Strang, G., Fix, G.: An Analysis of the Finite Element Method. Prentice Hall (1973)
273. Sunyk, R., Steinmann, P.: On higher gradients in continuum-atomistic modelling. Int. J. Solids Struc. **40**, 6877–6896 (2003)
274. Swan, C.: Techniques for stress- and strain-controlled homogenization of inelastic periodic composites. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **117**, 249–267 (1994)
275. Taroco, E., Feijóo, R.A.: Problema de creep en discos que giran a velocidad constante. In: Anales del V COBEM. Brasil (1979)
276. Taroco, E., Feijóo, R.A.: Segunda Escola de Matemática Aplicada, vol. 2, chap. Viscoplasticidad y su Formulación Variacional, pp. 157–331. Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CNPq, Rio de Janeiro, Brasil (1980)
277. Taroco, E., Feijóo, R.A.: Análisis limite via creep. In: VI COBEM (1981). También publicado como Relatorio Técnico Científico del LCC/CNPq, *N*º013/81
278. Taroco, E., Feijóo, R.A.: I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo 1, chap. Introducción a la Teoria de Cáscaras, pp. 197–248. Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil (1982)
279. Taroco, E., Feijóo, R.A.: I Curso de Mecânica Teórica e Aplicada, Módulo 2, chap. Teoria de Placas y Cáscaras, pp. 117–176. Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil (1983)

280. Taroco, E., Feijóo, R.A., Martins, L.C.: Forma incremental del teorema de los trabajos virtuales aplicados a grandes deformaciones. In: G. Marshal (ed.) Simposio sobre Métodos Numéricos en la Mecánica del Continuo, pp. 199–206. Editorial Universitaria de Buenos Aires (1978)
281. Tauchert, T.R.: Energy Principles in Structural Mechanics. McGraw Hill (1974)
282. Taylor, A.E.: Introduction to Functional Analysis. John Wiley (1958)
283. Temam, R.: Navier-Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis. North-Holland (1977)
284. Terada, K., Kikuchi, N.: A class of general algorithms for multi-scale analysis of heterogeneous media. Comput. Meth. App. Mech. Eng. **190**, 5427–5464 (2001)
285. Terada, K., Watanabe, I., Akiyama, M.: Effects of shape and size of crystal grains on the strengths of polycrystalline metals. Int. J. Multiscale Computational Engineering **4**, 445–460 (2006)
286. Thomas, J.M.: Sur l'analyse numérique des méthodes d'elements finis hybrides et mixes. Ph.D. thesis, Université Pierre et Marie Curie (1977)
287. Thomasset, F.: Implementation of Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. Springer Series in Computational Physics. Springer–Verlag (1989)
288. Timohenko, S., Goodier, J.N.: Teoria de la Elasticidad. Ediciones Urmo (1968)
289. Toro, S., Sánchez, P., Blanco, P., de Souza Neto, E., Huespe, A., Feijóo, R.: Multiscale formulation for material failure accounting for cohesive cracks at the macro and micro scales. Int. J. Plasticity **76**, 75–110 (2016)
290. Toro, S., Sánchez, P., Huespe, A., Giusti, S., Blanco, P., Feijóo, R.: A two-scale failure model for heterogeneous materials: numerical implementation based on the finite element method. Int. J. Num. Meth. Eng. **97**, 313–351 (2014)
291. Toro, S., Sánchez, P., Podestá, J., Blanco, P., Huespe, A., Feijóo, R.: Cohesive surface model for fracture based on a two-scale formulation: computational implementation aspects. Comput. Mech. **58**, 549–585 (2016)
292. Truesdell, C.: A First Course in Rational Continuum Mechanics, vol. 1. Academic Press (1981)
293. Truesdell, C., Toupin, R.A.: The Classical Field Theories, *Handbuch der Physik*, vol. 3. Springer Verlag (1960)
294. Vainberg, M.N.: Variational Methods for the Study of Nonlinear Operators. Holden-Day, San Francisco (1964). A. Feinstein (Ed.), Traducción de la edición Rusa de 1956
295. Vicat, L.T.: Note sur l'allongement du fil de fer soumis à diverses temperatures. Mem. et Doc. 7-40, Ponts et Chaussees, Paris, Francia (1934)
296. Washizu, K.: Variational Methods in Elasticity and Plasticity, 3rd. edn. Pergamon (1982)
297. Watanabe, I., Terada, K., de Souza Neto, E., Perić, D.: Characterization of macroscopic tensile strength of polycrystalline metals with two-scale finite element analysis. J. Mech. Phys. Solids **56**, 1105–1125 (2006)
298. Weinstock, R.: Calculus of Variations with Applications to Physics and Engineering. Dover Publications, Inc. (1974)
299. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: The Finite Element Method, vol. 1, fourth edn. McGraw Hill (1989)
300. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.: The Finite Element Method, vol. 2, fourth edn. McGraw Hill (1991)
301. Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z.: A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. International Journal for Numerical Methods in Engineering **24**, 337–357 (1987)
302. Zouain, N., Feijóo, R.A.: Análisis elasto-plástico vía optimización. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas **V**(3) (1983)
303. Zouain, N., Feijóo, R.A.: On kinematical minimum principles for rates increments in plasticity. Publicação Técnico-Científica 014/84, Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq (1984)

304. Zouain, N., Feijóo, R.A., Taroco, E.: Curso de Mecânica Teórica e Aplicada sobre Teoria das Cáscas e suas Aplicações na Engenharia, chap. Análise de Cascas Plásticas. Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq, Rio de Janeiro, Brasil (1983)
305. Zouain, N., Feijóo, R.A., Taroco, E.: Pressão limite de becais. Publicação Técnico-Científica 007/83, Laboratório de Computação Científica, LCC-CNPq (1983). También presentado en el II SIBRAT-Simp. Brasileiro de Tubulações e Vasos de Pressão, Brasil, 1982

MACC
MEDICINA ASSISTIDA POR
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
INSTITUTO NACIONAL DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Laboratório
Nacional de
Computação
Científica

inct
institutos nacionais
de ciência e tecnologia

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento
Científico e Tecnológico

CAPES

FAPERJ
Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo
à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro

Introducción a la Formulación Variacional de la Mecánica

Fundamentos y Aplicaciones

En esta monografía es mostrado como el proceso para modelar un problema de la mecánica dentro de un abordaje totalmente variacional está apoyado en tres pilares

- El primer pilar es el relacionado con la caracterización de la cinemática, definición de la deformación así como caracterización de las acciones de movimiento y tasas de deformación admisibles y sus generalizaciones asociadas al modelo en estudio.
- El segundo pilar es la dualidad existente entre las cantidades asociadas a tales acciones de movimiento y tasas de deformación generalizadas con los esfuerzos externos y tensiones internas generalizadas caracterizados, respectivamente, por funcionales lineales y continuos sobre estas acciones. Este es un aspecto que establece una clara diferencia entre el abordaje propuesto en esta monografía y el realizado en la mayoría de las publicaciones típicas de mecánica del continuo, donde las fuerzas y tensiones son entidades definidas a priori e independientes de la cinemática.
- El tercer pilar es el Principio de la Potencia Virtual (o su generalización el Principio de la Potencia Virtual Multi-escala adecuado al modelado de problemas involucrando más de una escala). Este principio permite establecer el concepto de equilibrio entre los esfuerzos externos e internos generalizados y, cuando es conocido el comportamiento del material, determinar el campo de desplazamientos generalizados que, a través del comportamiento constitutivo del material, proporciona el estado de tensiones generalizado que equilibra los esfuerzos externos.

Estos tres pilares definen lo que se conoce como Método de la Potencia Virtual (MPV) empleado en esta monografía en el modelado de problemas de mecánica de cuerpos deformables en regímenes de grandes deformaciones, elasticidad y plasticidad entre otros. Además, los mismos conceptos son aplicados en el modelado de componentes estructurales tales como vigas, placas, cáscaras y torsión de barras así como en el modelado de problemas tales como conducción estacionaria de calor, flujo incompresible de fluidos y medios continuos de alto orden. Finalmente, su generalización a través del Método de la Potencia Virtual Multi-escala (MPVM), extiende esta formulación variacional al caso de problemas de la mecánica comprendiendo más de una escala.
La lectura de esta monografía muestra, de esta forma, como la aplicación del MPV (o su generalización el MPVM) se presenta como la herramienta más simple, eficiente y segura, tanto del punto de vista conceptual como teórico/fundamental, para establecer, utilizando un mínimo conjunto de hipótesis, las ecuaciones que gobiernan un problema físico por más complejo que sea.

Agência Brasileira do ISBN
ISBN 978-85-99961-21-6
9 788599 961216