

Laboratório Nacional de Computação Científica  
Programa de Pós Graduação em Modelagem Computacional

**Reconstrução e Segmentação de Angiografias via  
Técnicas Variacionais e Métodos de *Level Set***

Por

**Carlos Alberto Bulant**

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL

ABRIL DE 2013

RECONSTRUÇÃO E SEGMENTAÇÃO DE ANGIOGRAFIAS VIA  
TÉCNICAS VARIACIONAIS E MÉTODOS DE *LEVEL SET*

Carlos Alberto Bulant

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO LABORATÓRIO  
NACIONAL DE COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA COMO PARTE DOS REQUISI-  
TOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
MODELAGEM COMPUTACIONAL

Aprovada por:

---

Prof. Pablo Javier Blanco, D.Sc.

(Presidente)

---

Prof. Jauvane C. de Oliveira, Ph.D

---

Prof. Nelson Albuquerque de Souza e Silva, Ph.D.

---

Prof. Ignacio Larrabide, D.Sc.

PETRÓPOLIS, RJ - BRASIL  
ABRIL DE 2013

Bulant, Carlos Alberto

B933r       Reconstrução e Segmentação de Angiografias via Técnicas Variacionais e Métodos de *Level Set* / Carlos Alberto Bulant. –Petropolis, RJ. : Laboratório Nacional de Computação Científica, 2013.

xxvi, 186 p. : il. (algumas color); 29 cm

Orientadores: Pablo Javier Blanco e Raúl Antonino Feijóo

Dissertação (M.Sc.) – Laboratório Nacional de Computação Científica, 2013.

1. Processamento de imagens 2. Sistema cardiovascular 3. Tomografia computadorizada 4. Angiografia rotacional 5. Aneurisma Cerebral 6. Transformada de Radon I. Blanco, Pablo Javier. III. MCT/LNCC. IV. Título.

CDD-621.367

*We can not solve our problems with the same  
thinking we used when we created them.*

*- Albert Einstein (1879 - 1955)*

**Para Lis**

# Agradecimentos

Esta dissertação em Modelagem Computacional representa a culminação de dois anos de trabalho e aprendizado no Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC).

Gostaria de agradecer a todas as pessoas que influenciaram de alguma forma este trabalho, para isto começarei reconhecendo as pessoas do ambiente acadêmico/profissional e finalizarei recordando àquelas pessoas do ambiente afetivo que me acompanharam durante estes dois anos.

Em primeiro lugar quero agradecer ao Prof. Alejandro Clausse, por mostrar e iniciar-me no laborioso caminho da pesquisa durante o fim de minha graduação como Engenheiro de Sistemas em Tandil. Foi ele quem apresentou a possibilidade de vir ao LNCC, e quem estabeleceu o relacionamento com meus segundos mentores, os Professores Pablo Blanco e Raúl Feijóo. Eles confiaram em mim, ensinaram e instruíram em diferentes cursos, reuniões e discussões. Mais importante ainda, alimentaram minha curiosidade com todo tipo de desafios, sempre guiando e apoiando, mas dando liberdade suficiente para crescer profissional e pessoalmente. Também quero agradecer ao Prof. Enzo Dari por ter-me ajudado com aspectos de implementação de PETSc.

Quero agradecer a todo o grupo de desenvolvimento do projeto HeMoLab, Paulo, Salgado, Eduardo e Carla, por sua ajuda em todo tipo de questões técnicas. Ao grupo de estudantes de pós-graduação relacionados ao projeto, Goga, Gonzalo, Rafael, Paulo, Sansuke e Daniel, por incontáveis reuniões durante o seguimento de nossos respectivos trabalhos, nas quais me ajudaram a desenvolver uma visão global de todos os aspectos relacionados com a modelagem do sistema cardiovascular

humano. A todos meus colegas e amigos no programa da pós-graduação em especial a Rafa, Hector, Gastão e Leandro.

Quero agradecer a meus “amigos de ferro”, Paul, Pablo e Leo, que apesar da distância, sempre levo presente. A meus amigos da faculdade, Cristian, Lomu, Lucho, Mati, Marco e Huguito, pelos incontáveis e-mails e videoconferências. À “colônia” de argentinos em Petrópolis, Goga, Gonzalo, Carla, Pablo, Maru, Daniel e Flavia pela companhia os bons momentos e ajudar-me a não esquecer o espanhol.

À família da Lis que também é minha, Raúl, Mirta, Fernando, Vanina e o pequeno Sven, por toda a força e o apoio.

Chegando ao final quero agradecer principalmente a meus pais, Dora e Miguel, por seu amor, carinho e apoio, vocês foram meus primeiros mestres na vida. A meu irmão Marcelo que tem a habilidade de dizer as coisas como são “sem anestesia”, seus conselhos sempre me ajudaram. Sempre os tenho presente em meu coração, e no Skype.

Por último, e mais importante quero agradecer a Lis, meu amor, companheira e melhor amiga, que se animou a compartilhar esta aventura comigo, alentou-me a continuar e nunca abaixar os braços, sempre com um sorriso, por todo o que significou para nós, quero dedicar-lhe este trabalho.

Resumo da Dissertação apresentada ao LNCC/MCT como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## RECONSTRUÇÃO E SEGMENTAÇÃO DE ANGIOGRAFIAS VIA TÉCNICAS VARIACIONAIS E MÉTODOS DE *LEVEL SET*

Carlos Alberto Bulant

Abril , 2013

**Orientador:** Pablo Javier Blanco, D.Sc.

**Co-orientador:** Raúl Antonino Feijóo, D.Sc.

Este trabalho foca-se nos problemas da reconstrução tomográfica e da segmentação de estruturas arteriais em três dimensões, entendendo ambos como blocos fundamentais na modelagem do sistema cardiovascular humano orientada a pacientes específicos. Dentro deste contexto, a possibilidade de melhorar a qualidade das informações contidas nas imagens médicas realizadas em estudos clínicos via métodos de reconstrução mais precisos torna-se atraente porque impacta diretamente na acurácia das técnicas de segmentação, e permite a construção de modelos geométricos mais próximos à realidade.

Especificamente, neste trabalho, o problema inverso de reconstrução a partir de projeções é estudado empregando o modelo simplificado clássico, via a transformada de Radon, para duas e três dimensões com diferentes geometrias de amostragem. Logo, os métodos de resolução estándares baseados na inversão analítica desta transformada em forma de *back-projection* foram estudados. Um método iterativo baseado em análise de sensibilidade, denominado aqui como método baseado no gradiente topológico, foi estudado e adaptado para funcionar com um esquema *matrix-free* em paralelo. Em seguida, um novo método com fundamentos na teoria de formulações variacionais é desenvolvido. Devido às características do método, o mesmo é implementado computacionalmente empregando paralelismo



e um formato *matrix-free*. Um estudo quantitativo sobre os parâmetros de cada método é fornecido, assim como também um estudo comparativo entre todos eles usando o amplamente difundido fantasma de Shepp-Logan. Por fim, estudos preliminares com projeções de estudos de angiografias rotacionais tridimensionais são apresentados.

No contexto da segmentação de imagens médicas, duas alternativas são apresentadas para segmentar estruturas arteriais a partir de imagens tridimensionais provenientes de estudos de angiografia rotacional e tomográfica. A primeira metodologia baseia-se num enfoque simples de crescimento de região, combinado com *thresholding* e suavizado anisotrópico. A segunda metodologia utiliza um enfoque de *Level Set*, inicializado por uma técnica denominada *colliding fronts*. Na atualidade diversas variantes do método de *Level Set* têm ganhado popularidade na segmentação de estruturas arteriais. Neste trabalho comparam-se qualitativamente ambas alternativas com um fantasma numérico, e na segmentação de estruturas arteriais presentes em imagens médicas localizadas em diversas regiões anatômicas. Por fim, recomendações sobre o método mais conveniente a ser utilizado em cada região junto com valores para os parâmetros são fornecidos.

Abstract of Dissertation presented to LNCC/MCT as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

**ANGIOGRAPHY IMAGE RECONSTRUCTION AND  
SEGMENTATION USING VARIATIONAL TECHNIQUES AND  
LEVEL SET METHODS**

Carlos Alberto Bulant

April, 2013

**Advisor:** Pablo Javier Blanco, D.Sc.

**Co-advisor:** Raúl Antonino Feijóo, D.Sc.

This work focuses on tomographic reconstruction and three-dimensional arterial structures segmentation problems, understanding both as fundamentals modules of patient specific-based cardiovascular modeling. Is in this context where the possibility of improving information quality contained in medical images, by means of more accurate reconstruction methods, is of interest because of its impact on segmentation algorithm precision, allowing the construction of more realistic vessel geometrical models.

Specifically, in this work, we study the reconstruction from projection inverse problem based on the classic simplified model for x-ray interaction, using the Radon transform, in two and three dimensions with different acquisition geometries. Then, we present the standard methods, which are based on analytic inversion of the Radon transform in the form of back-projection. An iterative reconstruction method based on sensitivity analysis, was studied and adapted to work in a parallel and matrix-free form. In addition, a novel reconstruction method, with foundations given by the theoretical framework of variational formulations, is developed. In view of the characteristics of the methodology, the computational implementation is carried out following a distributed computing paradigm on top

of a matrix-free form version of the method. We perform parameter sensitivity analysis for each method, and a quantitative comparative analysis among them, using the well known Shepp-Logan head phantom, is also presented. Some preliminary reconstruction studies with real data are presented.

In the context of medical image segmentation, we explore two alternatives for arterial structures segmentation from three dimension images acquired on three-Dimensional Rotational Angiography and Computed Tomography Angiography clinical studies. The first methodology is based on a simple seeded region growing algorithm, combined with thresholding and anisotropic diffusion techniques. The second pipeline uses a Level Set approach, initialized with the colliding fronts algorithm. Nowadays, Level Set methods variants are gaining popularity for vessel segmentation problems. In this work, we present a qualitative comparison by segmenting a numerical phantom, as well as segmenting arterial structures on different anatomical regions of the head and neck. At last, we present some recommendations for method and parameter choosing, as a function of the anatomical region.

# Sumário

<b>1</b>	Introdução	7
1.1	Motivação . . . . .	7
1.2	Escopo deste trabalho . . . . .	11
1.3	Estrutura do documento e conteúdos . . . . .	12
<b>2</b>	O problema da reconstrução	15
2.1	Revisão histórica . . . . .	16
2.2	Geometrias de amostragem . . . . .	18
2.3	Angiografia rotacional 3D . . . . .	19
<b>3</b>	Fundamentos matemáticos	22
3.1	Modelagem dos raios-X . . . . .	22
3.2	Transformada de Radon . . . . .	24
3.3	<i>Forward projection</i> (projeção direta) . . . . .	26
3.4	<i>Filtered back-projection</i> (retroprojeção filtrada) . . . . .	27
<b>4</b>	Algoritmos de reconstrução de volumes	30
4.1	Geometria <i>cone-beam</i> . . . . .	30
4.2	Algoritmo FDK . . . . .	32
4.3	Método de gradiente topológico . . . . .	33
4.4	Formulação variacional baseada na transformada de Radon . . . . .	39
<b>5</b>	Resultados	43

5.1	Erro de reconstrução . . . . .	44
5.2	Análise de parâmetros dos métodos FBP e FDK . . . . .	44
5.3	Análise de parâmetros do método do gradiente topológico . . . . .	50
5.3.1	Condição inicial par o método . . . . .	50
5.3.2	Campo de perturbações inicial . . . . .	54
5.3.3	Coefficiente de perturbação . . . . .	58
5.3.4	Comportamento em presença de ruído nas projeções . . . . .	62
5.3.5	Aspectos de implementação . . . . .	66
5.4	Análise de parâmetros do método variacional . . . . .	68
5.4.1	Aspectos de implementação, tipos de resolvidores algébricos . . . . .	68
5.4.2	Uso de preconditionadores . . . . .	72
5.4.3	Impacto da condição inicial . . . . .	73
5.4.4	Sensibilidade a perturbações nas projeções . . . . .	78
5.5	Método variacional com penalização de salto . . . . .	82
5.6	Comparação dos métodos de reconstrução . . . . .	90
<b>6</b>	Um <i>pipeline</i> para a reconstrução de 3DRA . . . . .	100
6.1	Reconstrução 2D da fatia central . . . . .	101
6.2	Reconstrução de 3DRA . . . . .	107
<b>7</b>	Introdução à segmentação de imagens médicas . . . . .	112
7.1	Segmentação arterial em modalidades 3DRA e CTA . . . . .	113
7.2	Relevamento de metodologias de segmentação . . . . .	115
7.2.1	Segmentação interativa via métodos clássicos . . . . .	116
7.2.2	Segmentação automática de arvores arteriais via <i>geodesic active regions</i> . . . . .	117
7.2.3	Segmentação de aneurismas via <i>level set</i> . . . . .	117
7.2.4	Segmentação via <i>fluid charge-model</i> . . . . .	118
7.2.5	Segmentação automática de arvores arteriais via <i>level set</i> . . . . .	118
7.2.6	Segmentação via <i>colliding fronts</i> e <i>level set</i> . . . . .	119

7.2.7	Segmentação via <i>deformable models</i> . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Metodologia de segmentação</b>	<b>121</b>
8.1	Um <i>pipeline</i> de segmentação baseado em crescimento de região . . .	121
8.1.1	Extração do sub-volume de interesse . . . . .	122
8.1.2	Eliminação de estruturas não arteriais . . . . .	123
8.1.3	Suavizado com preservação de bordas . . . . .	124
8.1.4	Crescimento de região com semente . . . . .	126
8.1.5	Geração da triangulação inicial . . . . .	127
8.1.6	Segmentação de imagens de 3DRA . . . . .	128
8.1.7	Segmentação de imagens de CTA . . . . .	129
8.2	Um <i>pipeline</i> de segmentação baseado em <i>level set</i> . . . . .	130
8.2.1	Escolha do método deformável implícito . . . . .	131
8.2.2	Inicialização do <i>level set</i> . . . . .	132
8.2.3	Escolha da imagem característica . . . . .	134
8.2.4	Segmentação de imagens de 3DRA . . . . .	136
8.2.5	Segmentação de imagens de CTA . . . . .	137
8.3	Resultados . . . . .	139
8.3.1	Validação das metodologias de segmentação . . . . .	139
8.3.2	Segmentação de imagens 3DRA e CTA . . . . .	142
<b>9</b>	<b>Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>152</b>
9.1	Conclusões acerca do problema de reconstrução . . . . .	152
9.2	Conclusões relacionadas ao problema de segmentação . . . . .	155
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>158</b>
	<b>Apêndice</b>	
<b>A</b>	<b>Especificação de fantasmas matemáticos</b>	<b>166</b>

<b>B</b>	Conjunto de dados de teste	170
<b>C</b>	Modelo de ruído	174
C.1	Parâmetros na geração de ruído . . . . .	176
<b>D</b>	<i>Pipeline</i> de reconstrução de 3DRA	181
<b>E</b>	Definição do fantasma arterial	184
E.1	Especificações . . . . .	184

# Lista de Figuras

## Figura

2.1	Primeira (a), segunda (b), terceira (c), e quarta (d) gerações de escâneres CT. . . . .	18
2.2	Ilustração das diferentes geometrias de amostragem: (a) <i>parallel-beam</i> , (b) <i>fan-beam</i> , e (c) <i>cone-beam</i> . . . . .	19
2.3	Escâner Artes Zeego da Siemens. Imagem tomada de <a href="http://www.medical.siemens.com/">http://www.medical.siemens.com/</a> . . . . .	21
3.1	Espectro electromagnético completo. . . . .	24
3.2	Transformada de Radon em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	25
3.3	Geometria de amostragem tipo <i>fan-beam</i> com detector plano. . . . .	29
4.1	Geometria <i>cone-beam</i> , com detector plano. . . . .	31
5.1	Filtros clássicos no domínio da frequência, para uma frequência de corte $\Gamma = 0.8$ . No eixo- $x$ a frequência $\omega \in [-\pi, \pi]$ , no eixo- $y$ a amplitude $\in [0, 1]$ . . . . .	46
5.2	Comparação do desvio padrão na reconstrução. No eixo- $x$ a corrente ( $F$ ) usada na geração do ruído, no eixo- $y$ o $\sigma_e$ entre o fantasma e a reconstrução. . . . .	47
5.3	Comparação do erro de reconstrução relativo. No eixo- $x$ a corrente ( $F$ ) usada na geração do ruído, no eixo- $y$ o $\sigma_{Ref}$ entre as reconstruções, tomando como referencia a reconstrução com menor $\sigma_e$ . . . . .	48



5.4	Seção $y = 110$ do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma sem ruído. No eixo- $x$ os elementos $(x, 110)$ da imagens, no eixo- $y$ o coeficiente de atenuação $\mu$ . . . . .	48
5.5	Seção $y = 110$ do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma com ruído gerado com $F = 500$ . No eixo- $x$ os elementos $(x, 110)$ da imagens, no eixo- $y$ o coeficiente de atenuação $\mu$ . . . . .	49
5.6	Seção $y = 110$ do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma com ruído gerado com $F = 300$ . No eixo- $x$ os elementos $(x, 110)$ da imagens, no eixo- $y$ o coeficiente de atenuação $\mu$ . . . . .	49
5.7	Seção $y = 110$ do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma com ruído gerado com $F = 150$ . No eixo- $x$ os elementos $(x, 110)$ da imagens, no eixo- $y$ o coeficiente de atenuação $\mu$ . . . . .	50
5.8	Erro de convergência para distintas condições iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro $\Psi(\bar{\mu}^{t+1})$ em escala logarítmica. . . . .	52
5.9	Desvio padrão médio para distintas condições iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro entre o fantasma e a reconstrução $\sigma_e$ . . . . .	52
5.10	Reconstrução final para distintas condições iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_1^0$ , (c) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_8^0$ , (d) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_{64}^0$ , (e) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_{512}^0$ , (f) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_{RL}^0$ , (g) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_{SL}^0$ , (h) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_C^0$ , (i) reconstrução a partir de $\bar{\mu}_H^0$ . . . . .	53
5.11	Diferença absoluta entre a reconstrução final e o fantasma para distintas condições iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) $\bar{\mu}_1^0$ , (c) $\bar{\mu}_8^0$ , (d) $\bar{\mu}_{64}^0$ , (e) $\bar{\mu}_{512}^0$ , (f) $\bar{\mu}_{RL}^0$ , (g) $\bar{\mu}_{SL}^0$ , (h) $\bar{\mu}_C^0$ , (i) $\bar{\mu}_H^0$ . . . . .	54

5.12	Convergência para distintas perturbações iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ e erro $\Psi(\bar{\mu}^{t+1})$ em escala logarítmica. . . . .	56
5.13	Desvio padrão médio para distintas perturbações iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro entre o fantasma e a reconstrução $\sigma_e$ , em escala logarítmica. . . . .	56
5.14	Reconstrução final para distintas perturbações iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) reconstrução a partir de $\delta\mu_{0.01}$ , (c) reconstrução a partir de $\delta\mu_{0.05}$ , (d) reconstrução a partir de $\delta\mu_{0.25}$ , (e) reconstrução a partir de $\delta\mu_{0.5}$ , (f) reconstrução a partir de $\delta\mu_{0.75}$ , (g) reconstrução a partir de $\delta\mu_{0.95}$ , (h) reconstrução a partir de $\delta\mu_{0.99}$ . . . . .	57
5.15	Diferença absoluta entre a reconstrução final e o fantasma para distintas perturbações iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) $\delta\mu_{0.01}$ , (c) $\delta\mu_{0.05}$ , (d) $\delta\mu_{0.25}$ , (e) $\delta\mu_{0.5}$ , (f) $\delta\mu_{0.75}$ , (g) $\delta\mu_{0.95}$ , (h) $\delta\mu_{0.99}$ . . . . .	58
5.16	Convergência para distintos coeficientes de perturbação $k$ ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro $\Psi(\bar{\mu}^{t+1})$ em escala logarítmica. . . . .	59
5.17	Desvio padrão médio para distintos coeficientes de perturbação $k$ ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro entre o fantasma e a reconstrução $\sigma_e$ . . . . .	60
5.18	Reconstrução final para diferentes coeficientes de perturbação $k$ . (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) $k = 0.1$ , (c) $k = 0.25$ , (d) $k = 0.5$ , (e) $k = 0.75$ , (f) $k = 0.9$ . . . . .	61
5.19	Diferença absoluta entre as reconstrução final e o fantasma para distintos coeficientes de perturbação $k$ . (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) $k = 0.1$ , (c) $k = 0.25$ , (d) $k = 0.5$ , (e) $k = 0.75$ , (f) $k = 0.9$ . . . . .	62

5.20	Convergência para distintos níveis de ruído no sinograma ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro $\Psi(\bar{\mu}^{t+1})$ em escala logarítmica. . . . .	64
5.21	Desvio padrão médio para distintos níveis de ruído no sinograma ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro entre o fantasma e a reconstrução $\sigma_e$ . . . . .	64
5.22	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan, na primeira coluna a condição de corte foram 100 iterações, na segunda coluna 1000. Primeira fila correspondente ao sinograma S2D360-360-1 (sem ruído), segunda fila correspondente a S2D360-360-1-F500, terceira a S2D360-360-1-F300 e quarta fila a S2D360-360-1-F150. . . . .	65
5.23	Tempo consumido para calcular $\mathbf{g}\Psi$ com as implementações de matriz formato CF e MFTG. No eixo- $y$ o tempo em milissegundos, no eixo- $x$ a quantidade total de elementos da matriz $\mathbf{K}$ , correspondente às projeções S2D180-60-3, S2D180-90-2, S2D180-180-1 e S2D360-360-1. . . . .	67
5.24	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1. (a) Método direto, (b) CG ( <i>matrix-free</i> ) com condição inicial dada pelo <i>Filtered Back-Projection</i> , (c) CG ( <i>matrix-free</i> ) com condição inicial dada pelo Gradiente Topológico, (d) CG ( <i>matrix-free</i> ) com condição inicial nula. . . . .	74
5.25	Diferença absoluta entre as reconstruções e o fantasma. (a) Método direto, (b) CG ( <i>matrix-free</i> ) com condição inicial dada pelo <i>Filtered Back-Projection</i> , (c) CG ( <i>matrix-free</i> ) com condição inicial dada pelo Gradiente Topológico, (d) CG ( <i>matrix-free</i> ) com condição inicial nula. . . . .	74
5.26	Evolução do resíduo do método CG para diferentes condições iniciais.	75

5.27	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 usando CG ( <i>matrix-free</i> ) com diferentes tolerância absolutas como condição de corte, em comparação com os outros métodos. (a) Tol. Abs. $1 \times 10^{+05}$ , (b) Tol. Abs. $1 \times 10^{+04}$ , (c) Tol. Abs. $1 \times 10^{+03}$ , (d) Tol. Abs. $1 \times 10^{+02}$ , (e) Tol. Abs. $1 \times 10^{+01}$ , (f) Tol. Abs. $1 \times 10^{+00}$ , (g) Tol. Abs. $1 \times 10^{-01}$ , (h) Tol. Abs. $1 \times 10^{-02}$ , (i) FBP-RL, (j) TG. . . . .	77
5.28	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 usando CG <i>matrix-free</i> (primeira coluna), FBP (segunda coluna) e TG (terceira coluna) com diferentes espaçamentos na imagem reconstruída. Espaçamento de $0.55mm$ (primeira fila), $0.60mm$ (segunda fila), $0.65mm$ (terceira fila). . . . .	79
5.29	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1, para diferentes níveis de ruído. (a) Ideal, sem ruído, (b) ruído gerado com $F = 500mA$ , (c) ruído gerado com $F = 300mA$ , (d) ruído gerado com $F = 150mA$ . . . . .	81
5.30	Convergência para distintos valores do parâmetro $\lambda$ na presença de ruído ( $F = 500$ ) no sinograma. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o resíduo do método de GC em escala logarítmica. . . . .	86
5.31	Desvio padrão médio para distintos valores do parâmetro $\lambda$ na presença de ruído ( $F = 500$ ) no sinograma. No eixo- $x$ o número de iteração, no eixo- $y$ o erro entre o fantasma e a reconstrução $\sigma_e$ . . . . .	87
5.32	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 (primeira coluna) e S2D360-360-1-F500 (segunda e terceira coluna). Na primeira fila $\lambda = 0$ , na segunda $\lambda = 1$ , na terceira $\lambda = 10$ , na quarta $\lambda = 100$ e na quinta $\lambda = 1000$ . . . . .	88

5.33	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 usando: VM com penalização de salto (primeira coluna), FBP (segunda coluna) e TG (terceira coluna) com diferentes espaçamentos na imagem reconstruída. Espaçamento de $0.55mm$ (primeira fila), $0.60mm$ (segunda fila), $0.65mm$ (terceira fila). . . .	90
5.34	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S3D180-180-1 via o método de FDK. Window-Level: Window/Level: 1.25/0.3. . . . .	98
5.35	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S3D180-180-1 via o método variacional. Window-Level: Window/Level: 1.25/0.3. . . . .	98
5.36	Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S3D180-180-1 via o método do Gradiente Topológico. Window/Level: 1.25/0.3. . . . .	99
6.1	Primeira projeção do sinograma 3DRA de teste. O contraste apenas é visível nas proximidades do catéter, ainda não chegou a espalhar na árvore arterial. No lado esquerdo se pode apreciar uma faixa gris, correspondente ao segundo problema. . . . .	102
6.2	De esquerda a direita, reconstrução com borda, impondo valor na borda, e resta da primeira menos a segunda. Da cima para abaixo, FBP (filtro de Hamming com $\eta = 0.5$ ), TG (100 iterações, condição inicial homogênea igual a $\bar{\mu}_1^0$ , perturbação inicial homogênea igual a 0.6, coeficiente de variação $k = 0.9$ ), VM (10 iterações, $\lambda = 50$ e condição inicial nula) . . . . .	103

6.3	De esquerda a direita reconstrução com todas as projeções, com as últimas 100 projeções, e resta da primeira menos a segunda. Da cima para abaixo, FBP (filtro de Hamming com $\eta = 0.5$ ), TG (100 iterações, condição inicial homogênea igual a $\bar{\mu}_1^0$ , perturbação inicial homogênea igual a 0.6, coeficiente de variação $k = .9$ ), VM (10 iterações, $\lambda = 50$ e condição inicial nula). . . . .	104
6.4	Reconstruções do plano central com os diferentes métodos e as áreas onde se calculou o SNR. Reconstrução do aparelho (a), reconstrução com FBP (b), reconstrução com TG (c), e reconstrução com VM (d).	106
6.5	Reconstruções do plano central com os diferentes métodos, <i>zoom</i> em uma área com presença de artérias. Reconstrução do aparelho (a), reconstrução com FBP (b), reconstrução com TG (c), e reconstrução com VM (d). . . . .	107
6.6	Reconstruções tridimensional fornecida pelo fabricante do aparelho C-Arm. O Window-Level de visualização é 1500-4000. . . . .	110
6.7	Reconstruções tridimensional via FDK com filtragem de Hamming. O Window-Level de visualização é 1500-4000. . . . .	110
6.8	Reconstruções tridimensional via o método do Gradiente Topológico. O Window-Level de visualização é 1500-4000. . . . .	111
6.9	Reconstruções tridimensional via o Método Variacional. O Window-Level de visualização é 1500-4000. . . . .	111
7.1	Ilustração de dificuldades na segmentação de imagens 3DRA e CTA. Na esquerda um plano de um estudo 3DRA com ruído e artefatos característicos. Na direita, um plano de CTA com alto solapamento de intensidades entre estruturas arteriais e ósseas. . . . .	115

8.1	Ilustração do procedimento de <i>cropping</i> , na esquerda a imagem original onde se pode apreciar a região de interesse. Na direita, o sub-volume extraído, com uma visualização de iso-superfície que permite visualizar em 3D o aneurisma. . . . .	122
8.2	Ilustração do procedimento de <i>Thresholding</i> , na esquerda a imagem de entrada, na direita, o resultado da operação. A visualização da iso-superfície manteve-se inalterada. . . . .	124
8.3	Ilustração do procedimento de <i>smoothing</i> , na esquerda a imagem de entrada, na direita, o resultado da operação. A visualização da iso-superfície manteve-se inalterada. . . . .	126
8.4	Ilustração do procedimento de <i>region growing</i> , na esquerda a imagem de entrada, na direita, o resultado da operação. A visualização da iso-superfície foi trocada pela malha associada à segmentação. . . .	127
8.5	Malha inicial de triângulos associada à segmentação. . . . .	128
8.6	Ilustração do procedimento de inicialização com os métodos de <i>threshold</i> (esquerda) e <i>colliding fronts</i> (direita). Nas duas imagens visualiza-se a iso-superfície inicial. . . . .	134
8.7	Ilustração do procedimento de criação da imagem característica. Na esquerda a imagem original, na direita o módulo do gradiente. . . .	135
8.8	Na esquerda apresenta-se a função de <i>Level Set</i> $\phi$ , e na direita a iso-superfície de nível zero associada. . . . .	136
8.9	Reconstrução do fantasma arterial via o método de FDK com filtro de Hamming ( $\eta = 0.5$ ), com simulação de ruído para 126 projeções (esquerda) e 1080 projeções (direita). . . . .	141

8.10	Comparações de segmentações usando reconstrução a partir de 126 projeções (a), e 1080 projeções (b). Em ambas figuras, apresentam-se a iso-superfície do fantasma arterial em branco (esquerda acima), comparação entre fantasma e segmentação via crescimento de região em vermelho (direita acima), comparação entre fantasma e segmentação via <i>Level Set</i> em azul (esquerda abaixo), e uma comparação entre ambas segmentações (direita abaixo). . . . .	141
8.11	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). O segmento arterial corresponde à artéria carótida interna após a bifurcação carotídea até a região cavernosa da base do crânio. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de 3DRA. . . . .	143
8.12	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias carótidas. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA. . . . .	144
8.13	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias vertebrais. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA. . . . .	145
8.14	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). Os segmento arterial corresponde à artéria carótida interna dentro da região cavernosa da base do crânio e no círculo de Willis. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de 3DRA. . . . .	146



8.15	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias carótidas internas e vertebrais/basilar, na região da base do crânio. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA. . . .	147
8.16	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias carótidas internas e basilar, na região do círculo de Willis. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA. . . . .	148
8.17	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). Os segmentos arteriais encontram-se na região cerebral direita. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de 3DRA. . . . .	150
8.18	Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via <i>Level Set</i> (branco). Os segmentos arteriais encontram-se na região cerebral. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA. . .	151
A.1	Fantasma de Shepp-Logan em 2D, dimensão $1024 \times 1024$ . . . . .	167
A.2	Fantasma de Shepp-Logan em 3D de dimensão $256 \times 256 \times 256$ . Planos $z = 108$ (a), $z = 128$ (b), $z = 148$ (c), $z = 168$ (d). . . . .	168
B.1	Sinogramas gerados com o método de Siddon para o fantasma de Shepp-Logan em 2D, a partir dos parâmetros da Tabela B.1. No eixo- $x$ o ângulo de projeção $\theta$ (em graus), no eixo- $y$ o detector $t$ . (a) S2D180-60-3, (b) S2D180-90-2, (c) S2D180-180-1, (d) S2D360-180-2, (e) S2D360-360-1. . . . .	172

B.2	Sinogramas gerados com o método de Siddon para o fantasma de Shepp-Logan em 3D, a partir dos parâmetros da Tabela B.1. No eixo- $x$ o detector $s$ , no eixo- $y$ o detector $t$ . (a) $\theta = 0$ , (b) $\theta = 90$ , (c) $\theta = 180$ , (d) $\theta = 270$ . . . . .	173
C.1	Sinograma S2D180-60-3 modificado com distintos graus de ruído. No eixo- $x$ o ângulo de projeção $\theta$ (em graus), no eixo- $y$ o detector $t$ . (a) Sem ruído, (b) $F = 500mA$ , (c) $F = 300mA$ , (d) $F = 150mA$ . 179	179
C.2	Projeção $\theta = 0$ do sinograma S2D180-60-3. No eixo- $x$ o detector $t$ , no eixo- $y$ o coeficiente de atenuação equivalente medido nos detectores.179	179
E.1	Imagens do fantasma ASP nos planos axial, sagital e coronal, junto com a visualização de superfície em 3D. . . . .	186

# Lista de Tabelas

## Tabela

5.1	Filtros clássicos no domínio da frequência. Onde $\omega \in [-\pi, \pi]$ , $\Gamma$ é a frequência de corte, e $W_\Gamma$ é função janela (ver Seção 3.4). . . . .	45
5.2	Especificação do conjunto de condições iniciais $\bar{\mu}^0$ . . . . .	51
5.3	Especificação do conjunto de perturbações iniciais $\delta\mu$ . . . . .	55
5.4	Comparação entre resolvedores algébricos para sinogramas de diferentes tamanhos. Os testes foram realizados em um computador Intel <sup>®</sup> Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz $\times$ 8, com 56 GB de memória RAM. . . . .	71
5.5	Comparação entre GMRES e CG usando diferentes preconditionadores globais, e ILU(1) como sub-precondicionador. Os testes foram realizados em um computador Intel <sup>®</sup> Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz $\times$ 8, com 56 GB de memória RAM. . . . .	73
5.6	Comparação entre reconstruções usando CG para diferentes tolerâncias absolutas no resíduo. . . . .	76
5.7	Comparação entre reconstruções usando CG para diferentes tolerâncias absolutas no resíduo. . . . .	79
5.8	Comparação entre reconstruções a partir de sinogramas com diferentes níveis de ruído. . . . .	80
5.9	Comparação entre reconstruções para diferentes valores de $\lambda$ . . . . .	89

5.10	Comparação entre os métodos de reconstrução em 2D, para diferentes sinogramas e graus de ruído. Os testes foram realizados em um computador Intel <sup>®</sup> Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz × 8, com 56 GB de memória RAM. . . . .	94
5.11	Comparação entre os métodos de reconstrução em 3D, para diferentes sinogramas e graus de ruído. Os testes foram realizados em um computador Intel <sup>®</sup> Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz × 8, com 56 GB de memória RAM. . . . .	96
6.1	SNR para as diferentes reconstruções. . . . .	106
8.1	Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas vasculares em quatro estudos de 3DRA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU). MAX é o valor máximo de intensidade presente na imagem, que muda de uma imagem para outra. . . . .	129
8.2	Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas arteriais em três estudos de CTA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU). . . . .	130
8.3	Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas vasculares em quatro estudos de 3DRA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU). MIN e MAX correspondem-se com os valores de intensidade mínimo e máximo de cada imagem. . . . .	137
8.4	Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas arteriais em três estudos de CTA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU). . . . .	139
A.1	Parâmetros das elipses que compõem o fantasma matemático de Shepp-Logan em 2D. . . . .	167
A.2	Parâmetros dos elipsoides que compõem o fantasma matemático de Shepp-Logan em 3D. . . . .	168
B.1	Configuração do conjunto de sinogramas. . . . .	171

C.1 SNR dos sinogramas ruidosos gerados, no espaço dos coeficientes de atenuação. . . . . 178

# Tabela de Símbolos

---

## Capítulo 3

---

$I$	Intensidade detectada.
$I_0$	Intensidade da fonte de radiação.
$L$	Caminho percorrido por um feixe de radiação-X.
$\mathbf{x}$	Coordenada espacial Euclidiana.
$\mu(\cdot)$	Função de coeficientes de atenuação.
$f(\cdot)$	Função escalar genérica definida no plano.
$\mathcal{R}(\cdot)$	Transformada de Radon.
$\theta$	Ângulo de projeção.
$t$	Coordenada espacial da transformada de Radon, equivalente à primeira coordenada espacial do detector.
$\Delta t^v$	Espaçamento dos detetores virtuais.
$p(t, \theta)$	Transformada de Radon com ângulo $\theta$ e coordenada $t$ (Projeção).
$\delta(\cdot)$	Função delta de Dirac.
$u$	Coordenada espacial unidimensional sobre o feixe de radiação-X.
$\ell$	Denominação genérica para um raio-X.
$V_{ijk}$	<i>Voxel</i> de índices $ijk$ .
$l(ijk)$	Comprimento do raio $\ell$ que intersecta com o <i>voxel</i> $V_{ijk}$ .
$s$	Segunda coordenada espacial do detector, para projeções bidimensionais.
$\mathcal{B}(\cdot)$	Operador de retroprojeção ( <i>Back Projection</i> ).
$b(\cdot)$	Função espacial resultado de aplicar $\mathcal{B}$ .
$\mathcal{F}(\cdot)$	Transformada de Fourier.

$\mathcal{F}^{-1}(\cdot)$	Inversa da transformada de Fourier.
$\mathcal{F}_2(\cdot)$	Transformada de Fourier em $\mathbb{R}^2$ .
$\omega$	Frequência no espaço de Fourier.
$\Gamma$	Frequência de Nyquist.
$W_\Gamma(\cdot)$	Função janela de corte em $\Gamma$ , no espaço da frequência.
$R$	Raio da circunferência que descreve o movimento da fonte de radiação.
$f_{FBP}(\cdot)$	Reconstrução espacial da fórmula de <i>Filtered Back-Projection</i> .
$\tilde{p}(\cdot)$	Projeções ponderadas, usadas nos métodos baseados em <i>Back-Projection</i> .
$U(\cdot)$	Função da distância entre a fonte e a projeção do ponto reconstruído sobre o feixe central.

---

#### Capítulo 4

---

$f_{FDK}(\cdot)$	Reconstrução espacial da fórmula FDK.
$L_l^d$	Indexação do raio-x incidente no detector $l$ com ângulo de rotação $d$ .
$q$	Quantidade de detectores.
$D$	Quantidade de direções de projeção.
$\mu^h(\cdot)$	Elementos homogêneos discretos da função de coeficientes de atenuação $\mu$ .
$N$	Número de elementos discretos da função $\mu^h$ .
$\mathbf{K}$	Discretização da Transformada de Radon em forma de matriz.
$M$	Número total de projeções ( $q \times D$ ).
$\bar{\mu}(\cdot)$	Aproximação da função $\mu$ .
$\Psi(\cdot)$	Função objetivo do método Gradiente Topológico.
$\delta\boldsymbol{\mu}(\cdot)$	Campo de perturbações sobre a função de coeficiente de atenuação.
$\mathbf{g}\Psi(\cdot)$	Sensibilidade da função objetivo.
$k$	Coefficiente de perturbação do algoritmo do Gradiente Topológico.
$\bar{\mu}^0(\cdot)$	Aproximação inicial na resolução iterativa do Gradiente Topológico.

$\mathcal{U}$	Espaço de funções escalares onde mora a solução do problema variacional.
$\mu_0(\cdot)$	Solução do problema variacional.
$\mathcal{F}(\cdot)$	Funcional do Método Variacional.
$P(\cdot)$	Projeções, dado de entrada do Método Variacional.
$\delta \mathcal{F}(\cdot)$	Primeira variação de Gâteaux.
$\eta(\cdot)$	Variação admissível no problema variacional.
$\tau$	Magnitude da perturbação $\eta$ no problema variacional.
$\delta^2 \mathcal{F}(\cdot)$	Segunda variação de Gâteaux.
$\mathcal{U}_N$	Subespaço de dimensão finita para a busca da solução aproximada do problema variacional.
$\phi(\cdot)$	Função base de $\mathcal{U}_N$ .
$\mu_N^0(\cdot)$	Solução aproximada (discreta) do problema variacional.
$\eta_N(\cdot)$	Perturbação no espaço discreto, do problema variacional.
$\mathbf{M}$	Matriz do sistema de equações resultante do método variacional.
$\mathbf{b}$	Vector de carga do problema variacional.

---

### Capítulo 5

---

$A$	Atenuação equivalente.
$F$	Corrente da fonte.
$C$	Área do detector.
$K$	Constante de conversão a quanta.
$t$	Tempo de exposição.
$\sigma$	Desvio padrão da medição.
COV	Coefficiente de variação (ruído relativo).
SNR	<i>Signal to Noise Ratio</i> .
$I^r$	Medição de detector com ruído simulado.
$A^r$	Atenuação equivalente ruidosa.

---

### Capítulo 6

---

$\sigma_e(\cdot)$	Erro de reconstrução.
-------------------	-----------------------



$\sigma_{Ref}(\cdot)$	Erro de reconstrução relativo.
$H^{RL}(\cdot)$	Filtro Ram-Lak no espaço da frequência.
$H^{SL}(\cdot)$	Filtro Shepp-Logan no espaço da frequência.
$H^C(\cdot)$	Filtro Cosseno no espaço da frequência.
$H^H(\cdot)$	Filtro Hamming generalizado no espaço da frequência.
$\eta$	Parâmetro do filtro de Hamming generalizado.
$\tilde{p}(\cdot)$	Diferença entre a projeção de entrada e a projeção da aproximação.
$[[\cdot]]$	Operador de salto.
$E_\mu$	Esqueleto da função $\mu$ .
$\mathcal{F}_\lambda(\cdot)$	Funcional com penalização de salto.
$\lambda$	Parâmetro de penalização de salto.
$\Lambda$	Matriz de penalização associada ao problema variacional com regularização.

---

## Capítulo 9

---

$I$	Intensidade da imagem.
$I_{min}$	Intensidade mínima.
$I_{max}$	Intensidade máxima.
$T(\cdot)$	Operação de <i>Threshold</i> .
$I_{Ref}$	Intensidade de referência para a operação de <i>Threshold</i> .
$\frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$	Derivada parcial com relação ao tempo.
$\nabla(\cdot)$	Gradiente espacial com respeito a coordenada $\mathbf{x}$ .
$\text{div}(\cdot)$	Divergente espacial com respeito à coordenada espacial $\mathbf{x}$ .
$g(\cdot)$	Solução da equação de difusão usada no filtro anisotrópico.
$G(\cdot)$	Função gaussiana com desvio $\sigma$ , usada na filtragem anisotrópica.
$\sigma$	Parâmetro da função gaussiana de filtragem.
$t$	Tempo característico usado na filtragem anisotrópica.
$c(\cdot)$	Função de condutância na filtragem anisotrópica.
$K$	Parâmetro da função de condutância.
$S(\cdot)$	Superfície deformável.

$\phi(\cdot)$	Função escalar do método de <i>Level Set</i> .
$\phi_0(\cdot)$	Nível zero da função $\phi$ .
$w_p$	Constante de ponderação do termo de propagação do <i>Level Set</i> .
$w_k$	Constante de ponderação do termo de curvatura do <i>Level Set</i> .
$w_a$	Constante de ponderação do termo de propagação do <i>Level Set</i> .
$P(\cdot)$	Função de velocidade de propagação do <i>Level Set</i> .
$\kappa$	Curvatura média.
$K(\cdot)$	Função modificadora da curvatura.
$A(\cdot)$	Função modificadora da advecção.
$I_f$	<i>Featured image</i> .
$T(\cdot)$	Função <i>time crossing map</i> do método de <i>fast marching</i> .
$F^{-1}(\cdot)$	Velocidade de propagação do frente no método <i>fast marching</i> .

# Lista de Abreviações

3DRA	<i>Three-Dimensional Rotational Angiography.</i>
ART	<i>Algebraic Reconstruction Techniques.</i>
CBCT	<i>Cone-Beam Computed Tomography.</i>
CE-MRA	<i>Contrast Enhanced Magneted Resonance Imaging.</i>
CF	<i>Coordinate Format.</i>
CG	<i>Conjugate Gradient.</i>
CT	<i>Computed Tomography.</i>
CTA	<i>Computed Tomography Angiography.</i>
FBP	<i>Filtered Back Projection.</i>
FDK	Nome do algoritmo analítico de reconstrução para geometria <i>cone-beam</i> , introduzido por Feldkamp, Davis e Kress (FDK).
GMRES	<i>Generalize Minimum Residual.</i>
ITK	<i>Insight Toolkit.</i>
LNCC	Laboratório Nacional de Computação Científica.
MF	<i>Matrix Free.</i>
MFTG	<i>Matrix-Free Topological Gradient.</i>
MRA	<i>Magnetic Resonance Angiography.</i>
PDE	<i>Partial Differential Equation.</i>
SRG	<i>Seeded Region Growing.</i>
TGM	<i>Topological Gradient Method.</i>
VM	<i>Variational Method.</i>
VMTK	<i>Vascular Modeling Toolkit.</i>
VTK	<i>Visualization Toolkit.</i>

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo introdutório os aspectos gerais da dissertação são colocados, começando pela motivação e objetivos que deram origem a este trabalho, seguidos pela determinação do escopo do mesmo, finalizando o capítulo com uma descrição da estrutura e organização deste documento.

### 1.1 Motivação

Ao longo da história a medicina tem sido assistida e impulsionada pelos avanços tecnológicos, desde o desenho e construção de aparelhos e indumentária até a digitalização dos registros e histórias clínicas. Dentro deste vasto conjunto de contribuições, pode-se destacar o impacto das diversas modalidades de imagens médicas. Em particular o desenvolvimento da tomografia computadorizada (CT), na década de 1970, gerou uma revolução em termos de diagnóstico (Hsieh, 2009). Como em todo avanço tecnológico, existem limitações e aspectos negativos associados ao uso de estudos de CT, em particular as doses radiação às quais o paciente é submetido durante o processo de aquisição das imagens, levanta uma preocupação dentro da comunidade em relação ao uso acrítico deste tipo de estudos. Embora o problema da reconstrução tomográfica tenha sido amplamente estudado na literatura, nesta seção se apresentarão os motivos que nos levaram a estudar e desenvolver um trabalho nessa área.

Apesar de que o problema da tomografia computadorizada tem sido estu-

dado por mais de quatro décadas, durante as quais diversas gerações de escâneres têm sido manufacturados e utilizados diariamente nos hospitais de todo o mundo, o campo da tomografia computadorizada continua com vários desafios em aberto na atualidade (Wang et al., 2008). Entre os vários tópicos e linhas de pesquisa se encontram o desenvolvimento de novos métodos analíticos exatos, e sua formulação em forma de *Back-Projection*; o crescente interesse em métodos de reconstrução iterativos; a reconstrução de regiões interiores a partir de projeções de linhas que atravessam a região; tecnologias alternativas para detectores (*Flat Panel Detector*); e geometrias de amostragem multi-detector são alguns exemplos dos diversos campos dentro da tomografia computadorizada com pesquisa em andamento (Wang et al., 2008). Este trabalho foca-se no segundo tópico de pesquisa acima mencionada, isto é, no desenvolvimento de métodos de reconstrução que podemos classificar como iterativos.

Os estudos de angiografia por tomografia computadorizada (ou em inglês *Computed Tomography Angiography - CTA*) e de angiografia rotacional tridimensional (ou em inglês *Three-Dimensional Rotational Angiography - 3DRA*) têm-se tornado procedimentos padrão nos hospitais de todo o mundo para a detecção, diagnose, e acompanhamento de doenças cardiovasculares como estenoses e aneurismas, dentre outras (van Rooij et al., 2008). Em particular, uma das principais motivações que continua impulsionando esforços de pesquisa e desenvolvimento de métodos de reconstrução é a possibilidade de reduzir o nível de radiação recebido pelos pacientes durante o processo de aquisição (Wang et al., 2008). Isto pode ser realizado de duas formas, a primeira é utilizando uma menor quantidade de projeções, e a segunda é utilizando intensidades da fonte de raios-X menores (implicando em projeções com mais ruído). Os métodos padrão utilizados atualmente nas denominadas estações de trabalho (em inglês *workstation*) de reconstrução requerem do ordem das mil projeções com níveis de radiação relativamente altos para conseguir reconstruir imagens com boa precisão em estudos de CTA (Hsieh, 2009). Neste trabalho exploram-se dois métodos de reconstrução capazes de fornecer me-

lhores resultados que o método considerado padrão nas condições anteriormente mencionadas. Vale a pena comentar que as reconstruções atuais representam uma “media” das configurações espaciais das estruturas anatômicas, as quais variam ao longo do tempo, por exemplo de artérias em um ciclo cardíaco. Logo a exploração de novas técnicas de reconstrução permite também iniciar trabalhos de reconstrução espaço-temporal que permitam obter, por exemplo, a configuração (no espaço) de uma artéria em diferentes instantes de tempo ao longo do batimento cardíaco.

Por outro lado, nos últimos anos, surgiram diversos esforços de pesquisa ao longo do mundo com o objetivo de criar modelos matemáticos governados por leis físicas, capazes de simular condições fisiológicas em pacientes específicos com o fim de reproduzir e prever a resposta do organismo perante variados estímulos. A criação destes modelos é um passo natural na constante evolução da tecnologia aplicada à medicina para a consolidação, no futuro próximo, do que pode-se denominar a era da *medicina assistida por computação científica* (Blanco, 2008). Dentre estes modelos, a modelagem do sistema cardiovascular tem-se tornado o foco de pesquisa de diversos grupos em todo o mundo, a motivação de tal interesse é o alto impacto sócio-econômico causado pelas doenças cardiovasculares (Blanco, 2008). Dentre as principais vantagens destes modelos no curto prazo está a possibilidade de usá-los como ferramentas de ensino na formação de profissionais da área médica. Visando o futuro próximo, estes modelos têm a capacidade de se converter em plataformas de *software* de suporte auxiliar (ou complementar) na tomada de decisões no dia-a-dia da prática médica.

No marco da modelagem do sistema cardiovascular humano surgem dois grandes desafios, o primeiro é a medição dos diferentes parâmetros necessários para calibrar o modelo matemático, de forma a reproduzir as condições de funcionamento, e o segundo é a definição precisa de geometrias arteriais a partir de imagens médicas, que possam, dentre outras coisas, ser utilizadas para simular o ambiente hemodinâmico em locais específicos. A metodologia necessária para a construção destes modelos de vasos arteriais é simples, em primeiro lugar a ima-

gem volumétrica<sup>1</sup> é processada para separar o segmento arterial de interesse<sup>2</sup>; em segundo lugar, uma malha de triângulos é gerada; por último uma malha adequada para simulações numéricas é construída. Para estudos de CTA, esta metodologia pode ser aplicada diretamente, enquanto que para estudos de 3DRA nem sempre se tem a imagem volumétrica devido a que resulta suficiente analisar as projeções<sup>3</sup> correspondentes visando a diagnose. Nestes casos um pré-processamento para reconstruir a imagem volumétrica é necessário, se o que se deseja é dispor do modelo geométrico da estrutura anatômica de interesse. Esta problemática de índole prática levanta a necessidade de desenvolver métodos de reconstrução tomográfica.

Um dos objetivos mais ambiciosos da modelagem do sistema cardiovascular humano é a geração de respostas a problemas abertos da medicina. Um exemplo concreto e que faz parte das motivações deste trabalho, é a gênese, evolução e ruptura de aneurismas cerebrais. Embora se acredite que fatores hemodinâmicos estão fortemente relacionados com estas malformações vasculares, a determinação precisa do risco de ruptura destes aneurismas é um problema em aberto. Atualmente acredita-se que fatores fisiológicos como a idade, tabagismo e alcoolismo incrementam as probabilidades de padecer esta doença, e o risco de ruptura a partir de umas poucas relações geométricas dependentes do tamanho do aneurisma. Na atualidade existem numerosos índices geométricos e hemodinâmicos (Cebal et al., 2010; Piccinelli et al., 2012). Entretanto, a correlação entre tais índices e a ruptura exige de estudos estatísticos com uma grande quantidade de casos médicos, que permitam dar suporte aos resultados de tais pesquisas e torná-las robustas e aceitáveis para a comunidade médica. A aquisição destes grandes volumes de informações médicas é um dos primeiros problemas em projetos de pesquisa interdisciplinares deste tipo. Esta barreira pode ser superada estabelecendo trabalhos conjuntos com hospitais que permitam o intercâmbio de estudos clínicos. Logo, surge um segundo problema, o processamento de semelhante volume de dados requer certo nível de

---

<sup>1</sup> Conjunto de planos que conformam um volume.

<sup>2</sup> Processo de segmentação da imagem.

<sup>3</sup> Imagens “RAW” em formato de radiografias.

automatização para conseguir utilizar o maior número de estudos possíveis. Neste contexto, a base fundamental para estes estudos de geometria e hemodinâmica de aneurismas, é a metodologia de geração de malhas detalhadas de segmentos arteriais anteriormente mencionada. E dentro desta metodologia, o principal obstáculo se encontra na segmentação de imagens. Embora existam esforços de pesquisa na construção de estratégias de segmentação arterial automáticas e multimodais<sup>4</sup> (Manniesing et al., 2008; Bogunovic et al., 2011), nenhuma delas foi avaliada para um grande número de casos clínicos.

## 1.2 Escopo deste trabalho

Na seção anterior, um marco geral de tópicos de pesquisa e alguma de suas problemáticas e desafios na modelagem do sistema cardiovascular humano foi apresentado. Nesta seção definem-se os objetivos concretos e o escopo do presente trabalho.

Na área de reconstrução de imagens a partir de projeções procura-se o desenvolvimento dos algoritmos padrão<sup>5</sup>, de forma de conseguir reconstruir volumes faltantes a partir de estudos de 3DRA, com o objetivo prático de utilizar a maior quantidade de estudos médicos possíveis. Com o desenvolvimento de métodos de reconstrução alternativos, em particular o método do Gradiente Topológico e o método Variacional, pretende-se contar com algoritmos que possam prover reconstruções detalhadas, inclusive em condições de baixo número de projeções. Ou seja, o objetivo é desenvolver métodos que sejam mais robustos que os métodos padrão empregados atualmente no processo de reconstrução. Neste marco, e neste estágio inicial da pesquisa, não se impõem necessidades de eficiência e tempo de reconstrução em termos de custo computacional para estes dois novos métodos. Ganhando experiência no campo de reconstrução de imagens, pretende-se que estes novos métodos possam incorporar, no futuro, a dimensão temporal, para obter

---

<sup>4</sup> Que possam ser utilizados para diferentes modalidades de imagens, como CTA, 3DRA, angiografia por ressonância magnética (ou em inglês *Magnetic Resonance Angiography* - MRA).

<sup>5</sup> Utilizados atualmente nas estações de trabalho de hospitais de todo o mundo.



reconstruções de um segmento arterial em diferentes instantes de tempo.

Em relação à segmentação de imagens médicas, objetiva-se desenvolver um procedimento de segmentação (doravante denominando *pipeline*<sup>6</sup>), utilizando o conjunto de filtros existentes na plataforma de *software* ImageLab, desenvolvida pelo grupo de pesquisa HeMoLab do LNCC, com a finalidade de segmentar imagens médicas. Desta forma se pretende construir uma metodologia que possa ser utilizada na segmentação de estruturas arteriais provenientes de estudos de 3DRA e CTA, que embora não seja completamente automática, possa agilizar e homogeneizar o processo de segmentação.

### 1.3 Estrutura do documento e conteúdos

Esta dissertação foca-se no problema da reconstrução tomográfica, relegando o problema da segmentação como uma aplicação sobre os resultados. Esta decisão foi tomada tendo em consideração que o interesse atual está voltado para a resolução de problemas inversos, os quais tem muitos pontos de contato com o problema da reconstrução. Portanto o documento segue uma estrutura lineal, partindo da reconstrução de imagens e finalizando com a sua segmentação. A seguir menciona-se de forma resumida os conteúdos de cada capítulo.

- **Capítulo 2.** Neste capítulo coloca-se o problema da reconstrução tomográfica, apresenta-se uma revisão histórica da área, introduzem-se conceitos práticos e as diferentes geometrias de amostragem em aparelhos tomográficos e de angiografia rotacional 3D.
- **Capítulo 3.** Este capítulo introduz os fundamentos necessários para entender o modelo físico e matemático clássico dos raios-X, logo apresenta-se um modelo computacional pelo qual se simula a interação dos feixes de radiação com um objeto discretizado no espaço (*Forward Projection*), equivalente ao problema direto. O capítulo termina apresentando a forma

---

<sup>6</sup> Conjunto de filtros de realce de imagem e filtros de segmentação, que são utilizados em um ordem específico para conseguir a extração do objeto de interesse da imagem.

clássica e padrão de resolver o problema inverso de reconstrução em duas dimensões (*Filtered Back-Projection*).

- **Capítulo 4.** Aqui apresentam-se algoritmos de reconstrução de volumes que possam ser usados diretamente para reconstruir os estudos de 3DRA. O método usado atualmente nas estações de trabalho embarcadas, o método FDK, é apresentado, assim como também o método do Gradiente Topológico e um novo método desenvolvido neste trabalho com fundamentos baseados em equações variacionais.
- **Capítulo 5.** Este capítulo começa explicando a métrica usada para medir o erro de reconstrução, logo apresentam-se resultados numéricos e estudos sobre os diferentes parâmetros de cada método de reconstrução separadamente. O capítulo termina com uma comparação dos métodos em duas e três dimensões em relação à qualidade de reconstrução e custos computacionais perante diferentes condições de reconstrução, como serem a quantidade de projeções e os níveis de ruído.
- **Capítulo 6.** Este capítulo detalha as dificuldades e a metodologia adotada para reconstruir volumes a partir de estudos de 3DRA com os diferentes métodos apresentados.
- **Capítulo 7.** Neste capítulo coloca-se a problemática de segmentação de imagens e em particular de artérias em 3DRA e CTA. Apresenta-se uma revisão de trabalhos que propõem estratégias de segmentação, considerados como o estado-da-arte.
- **Capítulo 8.** Apresentam-se aqui duas estratégias de segmentação de estruturas arteriais, uma baseada em métodos clássicos, e um abordagem baseado em métodos deformáveis implícitos.
- **Capítulo 9.** O capítulo de conclusão sumariza os resultados obtidos e coloca novas problemáticas e trabalhos futuros que podem ser abordados

tomando como ponto de partida o presente trabalho.

# Capítulo 2

## O problema da reconstrução

Nesta primeira parte da dissertação se abordará a problemática da reconstrução de imagens a partir de projeções. Neste capítulo se introduz o problema da tomografia junto com uma revisão histórica da área, e um resumo das diferentes modalidades de obtenção de imagens. Embora seja um problema estudado por mais de quatro décadas, com soluções conhecidas e bem documentadas, e ainda com uma clara tendência no tocante à transferência para a área tecnológica, segundo Wang et al. (2008), o campo da tomografia computadorizada continuará atraindo grupos de pesquisa e desenvolvimento nos próximos anos. Entre os vários tópicos e linhas de pesquisa sugeridos pelo autor se encontra o desenvolvimento de novos métodos de reconstrução robustos, em geral de caráter iterativo. Como mencionado na introdução, o foco deste trabalho é o desenvolvimento de tais métodos, em particular uma nova técnica baseada em conceitos de cálculo variacional é apresentada na Seção 4.4.

A palavra tomografia deriva dos termos gregos *tomos*, que significa “corte” e *grafein* que significa “escrever” ou “registrar”. É um procedimento de geração de imagens 3D das características óticas de um dado objeto submetido a radiação-X desde distintos pontos de vista. Cada amostra do objeto denomina-se projeção e na seção 3.1 explica-se a natureza da interação dos raios-X com a matéria, e um modelo simplificado desta.

Existem distintos métodos para reconstruir o volume projetado<sup>1</sup>, enquanto que o primeiro tomógrafo clínico utilizava a denominada técnica de reconstrução algébrica (ART), os tomógrafos comerciais atuais utilizam os denominadas métodos diretos baseados na transformada de Fourier (mais detalhes na Seção 3.4).

## 2.1 Revisão histórica

Hsieh (2009), apresenta uma completa revisão da história da tomografia computadorizada (CT), esta seção baseia-se nesse trabalho.

A formulação matemática necessária para reconstruir um objeto a partir de projeções foi o trabalho do matemático Johann Radon no ano 1917 (Radon (1986)). Em 1940 foi descrita a ideia da tomografia e reconstrução mediante a abordagem denominada *Back-Projection*, mais não foi até 1958 que o problema da reconstrução tomográfica foi formulado como a inversa da Transformada de Radon. Cormack (1963) reportou os resultados do que se considera o primeiro escâner de CT construído. Hounsfield (1976), explica como desenvolveu o primeiro protótipo de escâner de CT clínico, durante seus estudos sobre o coeficiente de atenuação frente à radiação-X em 1967. Por seu trabalho pioneiro, Cormack e Hounsfield compartilharam o prêmio Nobel em Fisiologia y Medicina no ano 1979.

Desde a introdução em 1971 do primeiro escâner clínico, os avanços na tecnologia envolvida na tomografia computadorizada têm sido impressionantes. Ao longo de 30 anos, o tempo de aquisição foi reduzido à metade aproximadamente a cada 2 anos, seguindo a lei de Moore da eletrônica.

A evolução dos escâneres de CT é agrupada em **gerações**. A primeira geração é caracterizada por emitir um único feixe de raios-X por vez. A radiação tem que ser filtrada para que um feixe seja emitido. Para cada ângulo de projeção raios paralelos são gerados. O detector tem um elemento, que se desloca seguindo à fonte, descrevendo um detector plano. Desta forma, só um feixe é amostrado por cada instante de tempo. Este procedimento se denomina traslação-rotação. O

---

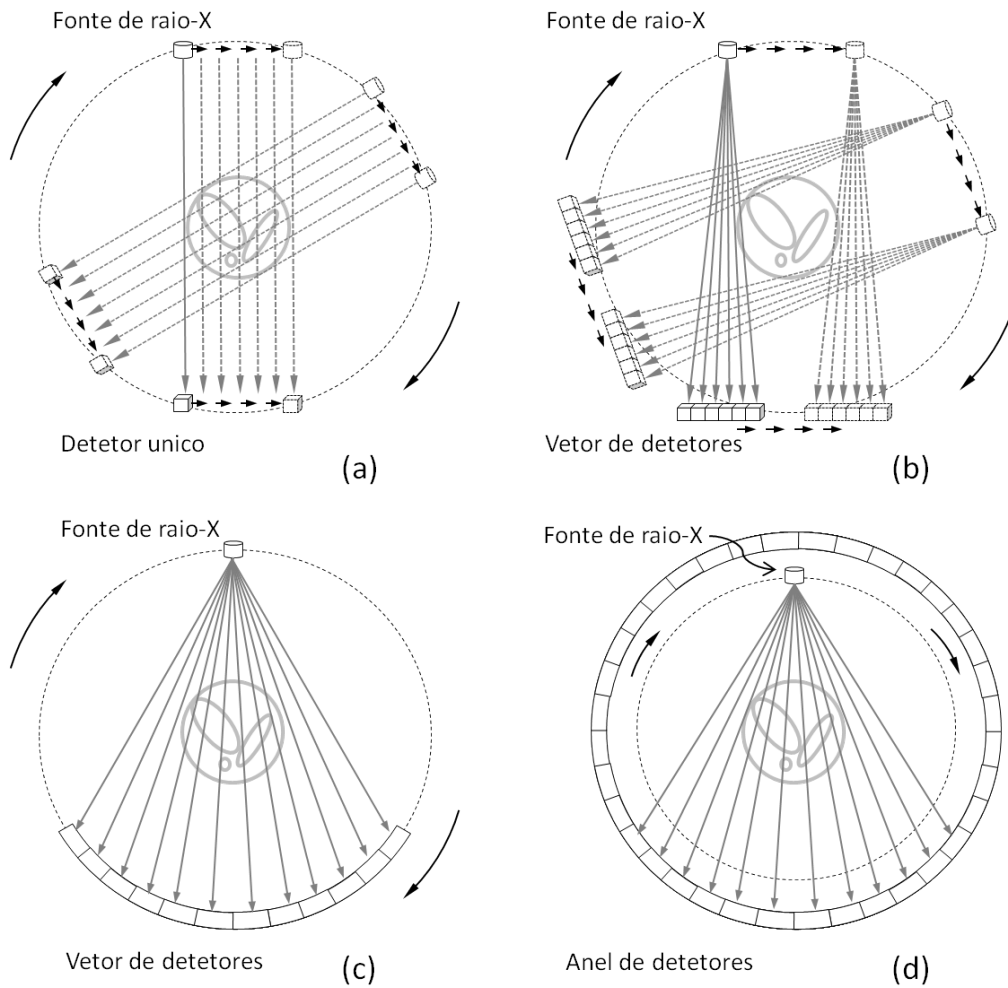
<sup>1</sup> Em Natterer et al. (2001), são apresentados uma variedade de métodos analíticos e iterativos.

escâner original gerava 160 amostras do plano a reconstruir antes de que a fonte e o detector girassem 1 grau (Figura 2.1 (a)). A desvantagem mais importante de estos escâneres foi o tempo de aquisição, aproximadamente 4,5 minutos para amostrar um plano.

A necessidade de reduzir o tempo de aquisição levou ao desenvolvimento da segunda geração, introduzida em 1974. Embora o procedimento de amostragem continuava sendo de traslação-rotação, a diferença é que 6 feixes de raios-X eram emitidos em cada posição da fonte, com 1 grau de diferença entre eles, necessitando de 6 elementos no detector alinhados de forma reta (Figura 2.1 (b)). Isto permitia que a rotação fosse de 6 graus por vez, diminuindo o tempo de aquisição por um fator de 6. Ao final de 1975, um escâner com 30 detectores foi apresentado, o que permitia amostrar um plano em aproximadamente 20 segundos.

A terceira geração de escâneres é a mais popular, iniciando sua utilização a finais de 1975. A diferença das gerações anteriores, a fonte e o detector só rotacionam. O detector é curvo, situado no arco da circunferência de rotação e o número de detectores garante que todo o objeto seja amostrado em cada posição, implicando um melhor aproveitamento da radiação gerada (Figura 2.1 (c)). A eliminação da traslação paralela, permitiu reduzir significativamente o tempo de amostragem até aproximadamente 0.5 segundos, após melhoras na mecânica do escâner.

A quarta geração de escâneres foi desenvolvida paralelamente à terceira, e em 1976 começou sua distribuição. A principal diferença com a geração anterior, é que os detectores formam um anel completo que permanece fixo durante a aquisição, e a fonte é a única que rota (Figura 2.1 (d)). Como a terceira e quarta gerações foram desenvolvidas simultaneamente, a última não apresentava muitas vantagens perante a primeira, e as sucessivas melhoras mecânicas durante os anos foram feitas nos dois tipos de escâneres. Por razões de custos, a terceira geração teve uma melhor comercialização, e com a introdução da geometria de cono (*multi-slice-CT*) a quarta geração ficou inviável (Goldman, 2007).



**Figura 2.1:** Primeira (a), segunda (b), terceira (c), e quarta (d) gerações de escâneres CT.

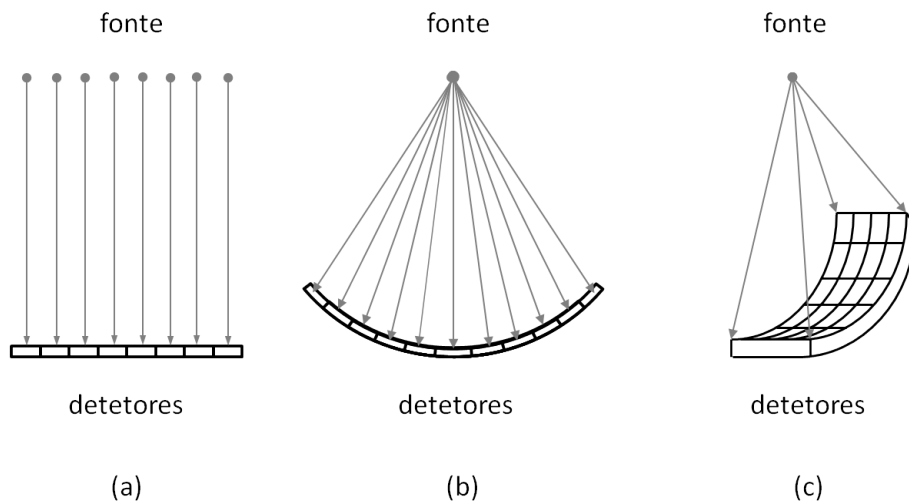
## 2.2 Geometrias de amostragem

Antes de entrar na descrição dos métodos de reconstrução, é importante definir os diferentes tipos de geometria de amostragem. Os dados coletados na primeira geração de escâneres eram projeções sobre um detector plano (unidimensional) que detectava raios-X emitidos de forma paralela (Figura 2.2 (a)). Este tipo de amostragem é chamado *parallel-beam projection*. Embora na segunda geração os raios emitidos formavam um ângulo de 1 grau, um posterior reordenamento em raios paralelos tinha lugar.

Nas terceira e quarta gerações de escâneres, continuou-se tendo projeções unidimensionais, porém, em vez de ter raios paralelos, feixes em forma de abanico

(Figura 2.2 (b)) eram emitidos. Este tipo de amostragem é chamado *fan-beam projection*.

A terceira modalidade de amostragem é chamada *cone-beam projection*. Por natureza, a fonte de radiação produz um cone que é filtrado para gerar as geometrias anteriores, por tanto esta geometria aproveita melhor a radiação gerada. Nos escâneres de terceira geração *multi-slice* vários planos são amostrados ao mesmo tempo (Figura 2.2 (c)), diminuindo o tempo de aquisição consideravelmente.



**Figura 2.2:** Ilustração das diferentes geometrias de amostragem: (a) *parallel-beam*, (b) *fan-beam*, e (c) *cone-beam*.

### 2.3 Angiografia rotacional 3D

Ao mesmo tempo que os escâneres avançam na direção dos *multi-slice-CT* para aumentar a velocidade de aquisição, precisando ainda do movimento do objeto para projetá-lo em completitude, outro tipo de escâner vinha sendo desenvolvido.

Os avanços na tecnologia de detectores planos de radiografias convencionais, permitiram a modificação dos equipamentos de tipo *C-arm*<sup>2</sup> para produzir imagens

<sup>2</sup> É um tipo especial de equipamento usado na aquisição de imagens médicas de raios-X (radiografias). Permite a utilização de baixas doses de radiação sobre o paciente amplificando a intensidade capturada pelo detector. Os *C-arms* foram introduzidos comercialmente por Philips em 1955.



2D consecutivas rotando a fonte e o detector. Um posterior pós-processamento das projeções pode gerar imagens 3D. Esta modalidade de obtenção de imagens é chamada *cone-beam computed tomography* (CBCT), a principal característica é que com uma só rotação circular é possível projetar todo o volume de interesse, sem necessidade de deslocar este último. Um melhor aproveitamento da radiação também é conseguido.

Robb (1982) construiu o primeiro CBCT com o objetivo de reconstruir objetos de alto contraste. Posteriormente, Fahrig et al. (1997) apresentaram o procedimento hoje conhecido como *Three-Dimensional Rotational Angiography* (3DRA). A modalidade usa um CBCT para reconstruir em três dimensões uma seção de arvores arteriais sometidas a uma injeção de agente de contraste que facilita a visualização e segmentação das artérias.

Em pouco mais de uma década, 3DRA tornou-se o *gold standard* na detecção de aneurismas e planejamento cirúrgico (van Rooij et al., 2008). Na Figura 2.3 apresenta-se um escâner CBCT moderno. Os métodos de reconstrução apresentados no Capítulo 4 procuram reconstruir projeções bidimensionais obtidas com CBCT, com o fim de estudar o impacto na posterior segmentação do árvore arterial, problema abordado no Capítulo 7.



**Figura 2.3:** Escâner Artes Zeego da Siemens. Imagem tomada de <http://www.medical.siemens.com/>

# Capítulo 3

## Fundamentos matemáticos

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos em reconstrução, começando pelo modelo matemático clássico usado para expressar a interação dos raios-X com a matéria, sua relação com a transformada de Radon, e as técnicas de *Back-Projection* para resolver o problema inverso em 2D.

### 3.1 Modelagem dos raios-X

As CT e 3DRA, são geradas a partir de milhares de feixes de raios-X emitidos em varias direções. Para compreender como as imagens medicas são obtidas, basta com entender o comportamento de apenas um feixe.

O raio-X é uma forma de radiação eletromagnética, com comprimento de onda na faixa de 0.01 até 10 nm, e energia na faixa de 0.124 até 124 KeV (figura 3.1). Para usos em diagnóstico clínico por imagens, utilizam-se comprimentos de ondas que variam de 0.01 até 0.1 nm, com energias desde 12.4 até 124 KeV (Hsieh, 2009).

Quando um único feixe raio-X de energia conhecida passa através de um meio, como tecido cerebral ou ossos, parte da energia do feixe é absorvida pelo meio. A intensidade de energia saliente do meio pode ser medida por um detector.

No modelo simplificando assume-se um feixe de raio-X idealizado (Feeman, 2010), onde cada fóton tem o mesmo nível de energia e frequência constante (o mesmo número de fótons por segundo passando pelo caminho do feixe), diz-se de

monocromático. Despreziam-se os efeitos de refração<sup>1</sup> e difração<sup>2</sup>, o que significa que o feixe de raio-X não sofre flexão e tampouco separação durante sua propagação. A última consideração é que o feixe de raio-X não tem espessura, o que permite modelar seu caminho percorrido com uma reta.

Nestas condições, pode-se utilizar a lei de Beer na modelagem da interação do feixe de raio-X com o meio

$$I = I_0 e^{-\int_L \mu(\mathbf{x}) dl} \quad (3.1)$$

Donde  $I$  é a intensidade medida pelo detector,  $I_0$  é a intensidade inicial do feixe de raio-X,  $L$  é o caminho percorrido, e  $\mu(\mathbf{x})$  representa a densidade (coeficientes de atenuação) do meio no espaço. Mediante uma simples manipulação, obtemos a integral de linha da função objetivo como

$$\int_L \mu(\mathbf{x}) dl = -\ln \frac{I}{I_0} \quad (3.2)$$

Isto implica que as medições de raio-X podem ser interpretadas como integrais de linha, esta é a base de todas as técnicas de reconstrução baseadas em transformações. Como foi observado, a equação (3.2) é derivada de um modelo idealizado. Na prática, fenômenos de espalhamento e sensibilidade dos detectores, dentre outros, fazem da equação (3.2) uma aproximação. Não obstante, é um modelo amplamente aceito.

---

<sup>1</sup> Mudança da direção do feixe devido a uma mudança na sua velocidade

<sup>2</sup> Flexão aparente das ondas de luz em torno a pequenos obstáculos e a separação em feixes devido ao passo por pequenas aberturas

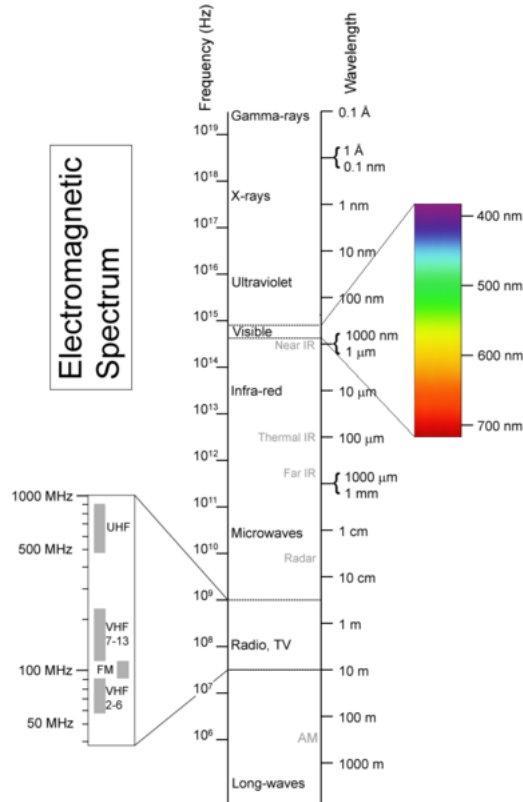


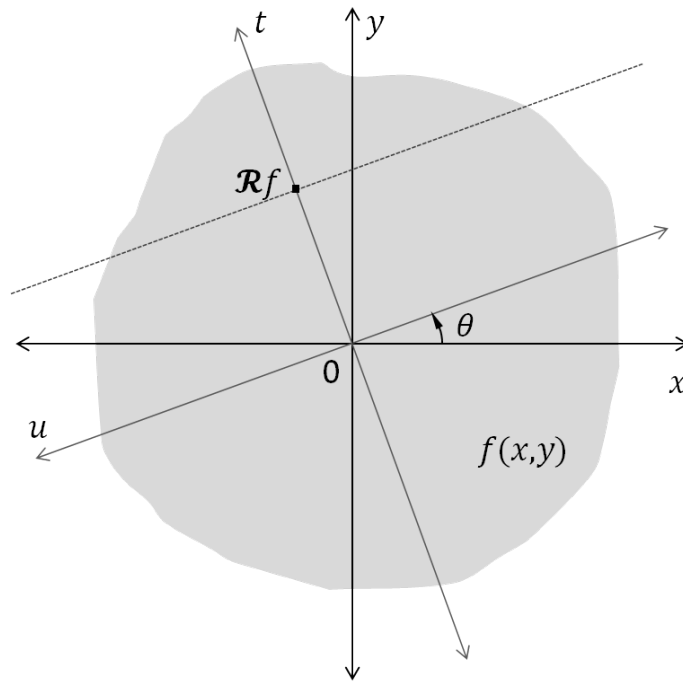
Figura 3.1: Espectro electromagnético completo.

### 3.2 Transformada de Radon

A transformada de Radon em  $\mathbb{R}^2$  de uma função  $f(x, y)$ , denotada como  $p(t, \theta)$ , é definida como a integral de linha através da reta inclinada em um ângulo  $\theta$  a partir do eixo  $x$  e a uma distância  $t$  da origem (Figura 3.2). Matematicamente, escreve-se

$$p(t, \theta) = \mathcal{R} f = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \delta(y \cos \theta - x \sin \theta - t) dx dy \quad (3.3)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$



**Figura 3.2:** Transformada de Radon em  $\mathbb{R}^2$ .

O símbolo  $\mathcal{R}$ , denota o operador da transformada de Radon, também chamado *operador de projeção* (Jain, 1989). A função  $p(t, \theta)$ , a transformada de Radon de  $f(x, y)$ , é a projeção unidimensional de  $f(x, y)$  de ângulo  $\theta$ . No sistema de coordenadas  $(t, u)$ , sendo

$$\begin{cases} t = y \cos \theta - x \sin \theta \\ u = -y \sin \theta - x \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} x = t \cos \theta - u \sin \theta \\ y = -t \sin \theta - u \cos \theta \end{cases} \quad (3.4)$$

podemos expressar (3.3) como

$$p(t, \theta) = \mathcal{R} f = \int_{\mathbb{R}} f(t \cos \theta - u \sin \theta, -t \sin \theta - u \cos \theta) du \quad (3.5)$$

$$-\infty < t < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Portanto as intensidades de raios-X medidas nos detectores podem ser interpretadas como projeções de uma função  $f(x, y)$  sobre a reta definida pelo detector, esta similitude é o principal motivador para usar o operador  $\mathcal{R}$  nos métodos de reconstrução.

Em termos matemáticos, o operador  $\mathcal{R}$  mapeia o domínio espacial  $(x, y)$  ao domínio  $(t, \theta)$ . Cada ponto em  $(t, \theta)$  corresponde-se com uma linha no domínio espacial  $(x, y)$ . O espaço  $(t, \theta)$  denomina-se *sinogram*, porque cada ponto  $(x, y)$  contribui a projeções ao longo de uma curva senoidal neste espaço.

### 3.3 *Forward projection* (projeção direta)

A transformada de Radon é uma ferramenta matemática definida pela equação (3.5) no contínuo, e é utilizada para modelar as intensidades de raios-X capturadas pelos detectores nos procedimentos de obtenção de imagens médicas. Embora se tenham um número finito de detectores que geram uma projeção discreta, eles são resultado de uma integral de linha no meio contínuo, equação (3.2).

O processo pelo qual projeções sintéticas são geradas computacionalmente denomina-se *forward projection*. Computacionalmente é um passo indispensável em todos os métodos de reconstrução iterativos, e na geração de projeções sintéticas de objetos virtuais (fantasmas), definidos no apêndice A, na avaliação dos métodos de reconstrução (5).

Neste trabalho implementou-se o método proposto por Siddon (1985) para calcular de forma rápida e exata a integral de linha sobre uma matriz de *voxels*. Seja  $\mu(i, j, k)$  o coeficiente de atenuação do *voxel*  $V_{ijk}$  no espaço tridimensional, e dado um raio  $\ell$ , o comprimento  $l(i, j, k)$  define-se como

$$l(i, j, k) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ell \text{ não interseca ao } \textit{voxel} V_{ijk}. \\ \ell \cap V_{ijk} & \text{se } \ell \text{ interseca ao } \textit{voxel} V_{ijk}. \end{cases} \quad (3.6)$$

a integral de linha pode ser escrita de forma discreta como

$$p = \sum_i \sum_j \sum_k l(i, j, k) \mu(i, j, k) \quad (3.7)$$

Uma avaliação direta da equação (3.7) implica um algoritmo que escala com a quantidade de termos do somatório, que é igual ao número de *voxels* na matriz. Siddon (1985) formulou um método eficiente de calcular os termos distintos de zero

em (3.7) acompanhando o raio, que escala com a soma das dimensões da matriz. O método de Siddon tem sido usado amplamente nos problemas de reconstrução de imagens y cálculo de doses de radiação desde sua introdução, e continua sendo usado com mais de 140 referências na atualidade.

### 3.4 *Filtered back-projection* (retroprojeção filtrada)

A primeira abordagem matemática para tentar reconstruir uma função a partir de sua transformada de Radon para uma configuração *parallel-beam* é o operador denominado *Back-Projection*  $\mathcal{B}$ , o qual é definido como

$$b(x, y) = \mathcal{B} p = \int_0^{\pi} p(y \cos \theta - x \sin \theta, \theta) d\theta \quad (3.8)$$

O operador *Back-Projection* representa a acumulação das integrais de linha de todos os raios que passam pelo ponto  $(x, y)$ . Este operador mapeia uma função do espaço  $(t, \theta)$  ao espaço  $(x, y)$ . Tal operador não é o inverso do operador  $\mathcal{R}$ , o resultado do *Back-Projection* é uma versão suavizada da função projetada originalmente. Matematicamente existe uma forma de obter de forma exata a função objetivo em base a suas projeções, o método é chamado *Filtered Back-Projection* e obtém-se usando o teorema da projeção central (também chamado *Fourier Slice Theorem*), isto é

$$(\mathcal{F}_2 f)(-\omega \sin \theta, \omega \cos \theta) = (\mathcal{F} p)(\omega, \theta) \quad (3.9)$$

O teorema estipula que a transformada de Fourier unidimensional  $\mathcal{F}$  em relação ao parâmetro  $t$  da projeção paralela  $p(t, \theta) = \mathcal{R} f$  é igual à reta central, com ângulo  $\theta$ , da transformada de Fourier bidimensional  $\mathcal{F}_2$  de  $f$ .

A fórmula do operador *Filtered Back-Projection* define uma operação inversa à transformada de Radon

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \mathcal{B} \left\{ \mathcal{F}^{-1} \left[ |\omega| (\mathcal{F} \mathcal{R} f)(\omega, \theta) \right] \right\} (x, y) \quad (3.10)$$



Sem o fator  $|\omega|$ , as transformada de Fourier e sua inversa se cancelariam, ficando a fórmula do operador *Back-Projection*. Na área de processamento de sinais, a multiplicação por  $|\omega|$  no espaço da frequência denomina-se filtrado, é por isto que a fórmula é chamada *Filtered Back-Projection*. Na prática, para garantir um filtrado sem *aliasing* e suprimir a possível presença de ruído (altas frequências no domínio de Fourier), a função  $|\omega|$  é multiplicada por uma janela  $W_\Gamma(\omega)$  para garantir o critério de amostragem de Nyquist (Hsieh, 2009), tal que

$$\Gamma = \frac{1}{2\Delta t^v}$$

$$W_\Gamma(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \leq \Gamma \\ 0 & \text{se } \omega > \Gamma \end{cases}$$

onde  $\Delta t^v$  é o espaçamento dos detectores virtuais.

A equação (3.10) só é válida para a geometria de amostragem *parallel-beam*, para projeções do tipo *fan-beam* pré-processamentos e funções de peso são necessárias. A Figura 3.3 ilustra a geometria de abanico, onde a fonte pontual movimenta-se no plano  $(x, y)$  ao longo de uma circunferência de raio  $R$ , com ângulo de projeção  $\theta$ , posicionada na coordenada  $(-R \cos \theta, -R \sin \theta)$ . O detector pode ser plano ou curvo. Enquanto que os escâneres de CT utilizam detectores curvos, os equipamentos utilizados nas 3DRA têm detectores planos. Com o objetivo de facilitar a compreensão do método denominado FDK (Seção 4.2), nesta seção apresenta-se a fórmula do operador *Filtered Back-Projection* modificada para geometria de amostragem *fan-beam* e detector plano

$$f_{FBP}(x, y) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{R}{U(x, y, \theta)} \right)^2 \mathcal{F}^{-1} \left\{ |\omega| (\mathcal{F} \tilde{p}(t, \theta))(\omega, \theta) \right\} (t, \theta) \, d\theta \quad (3.11)$$

a posição no detector é obtida a partir da equação (3.12). No discreto, uma interpolação entre os elementos próximos de  $t(x, y, \theta)$  é necessária.

$$t(x, y, \theta) = R \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{R + x \cos \theta + y \sin \theta} \quad (3.12)$$

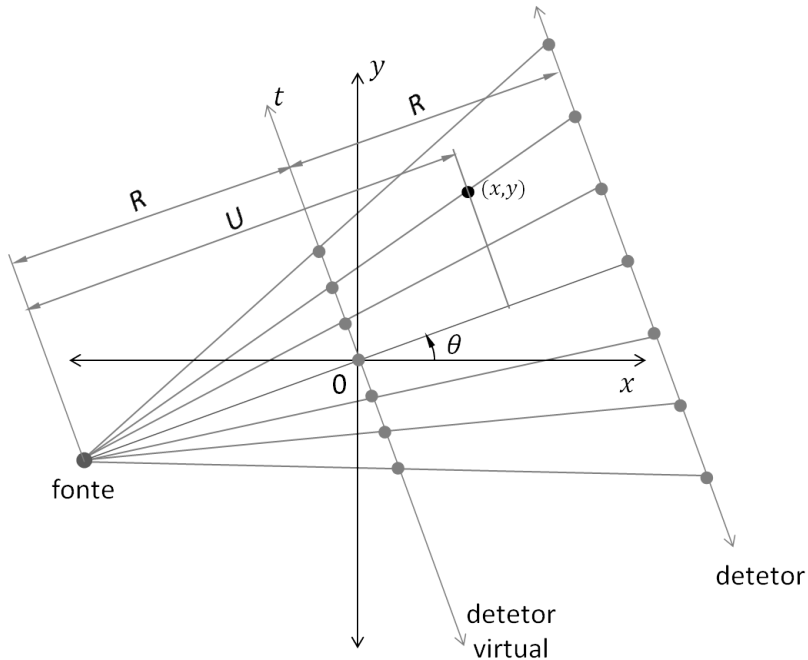
um procedimento de ponderação dos dados é necessário,  $\tilde{p}(t, \theta)$  corresponde à projeção obtida com geometria *fan-beam*  $p(t, \theta)$  vezes um fator de distância do ponto projetado  $t$  ao centro de projeção ( $t = 0$ )

$$\tilde{p}(t, \theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + t^2}} p(t, \theta) \quad (3.13)$$

$U(x, y, \theta)$  é uma função da distância entre a fonte e o ponto  $(x, y)$  projetado no raio central

$$U(x, y, \theta) = R + x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.14)$$

Caso que o leitor tenha interesse na adaptação da fórmula, Turbell (2001) apresenta as variações da *Filtered Back-Projection* para distintos tipos de geometrias de amostragem e detectores.



**Figura 3.3:** Geometria de amostragem tipo *fan-beam* com detector plano.

# Capítulo 4

## Algoritmos de reconstrução de volumes

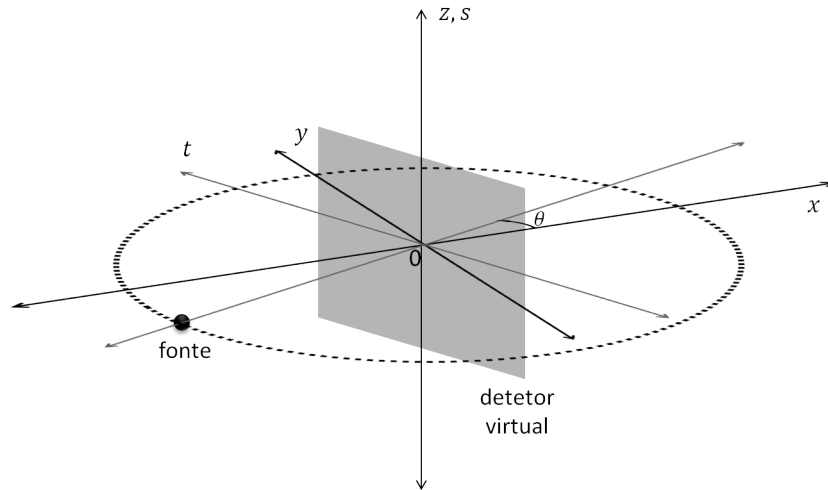
No capítulo anterior foi apresentado o algoritmo de reconstrução direta baseado em transformada de Fourier mais utilizado, o *Filtered Back-Projection*. O método pode reconstruir fatias bidimensionais de um dado objeto a partir de suas projeções unidimensionais. Se o volume completo deseja ser reconstruído, o procedimento de amostragem e reconstrução tem que ser realizado em cada fatia obtida com o deslocamento do objeto na direção perpendicular ao plano de reconstrução. Uma forma mais eficiente de amostrar os objetos é usar projeções bidimensionais de tipo *cone-beam*. Como a fonte de raio-X produz de forma natural um cone de raios, a amostragem *cone-beam* não só incrementa a velocidade de aquisição, mas também aproveita melhor a emissão de radiação.

Neste capítulo se apresentará o método criado por Feldkamp et al. (1984), o mais utilizado nas estações de trabalho comerciais para a reconstrução de CT e 3DRA. Também são exploradas dois métodos alternativos, o primeiro é um método iterativo desenvolvido por Larrabide et al. (2009), e o segundo é um método novo (para nosso conhecimento) proposto neste trabalho, que utiliza um enfoque variacional para resolver o problema da reconstrução.

### 4.1 Geometria *cone-beam*

A geometria *cone-beam* de detector plano é ilustrada na Figura 4.1. A fonte de radiação gira em torno do centro de coordenadas descrevendo uma circunferência

de raio  $R$ . O centro do detector encontra-se sobre a mesma circunferência a uma distância  $2R$  da fonte. O detector virtual de coordenadas  $(t, s)$  é colocado no centro de eixos coordenados, de tal forma que o eixo  $s$  coincida com o eixo  $z$ . Desta maneira cada projeção define-se como  $p(t, s, \theta)$ .



**Figura 4.1:** Geometria *cone-beam*, com detector plano.

De forma análoga ao *Filtered Back-Projection*, uma fórmula de reconstrução matematicamente exata pode ser deduzida para a geometria de cono. Estes algoritmos de reconstrução exatos são baseados na transformada de Radon em três dimensões. A transformada de Radon de um ponto no espaço do objeto é a integral sobre o plano que contém ao objeto e que tem como vetor normal, o vetor que passa pelo origem e o ponto. Por tanto, para realizar uma reconstrução matematicamente exata, as transformadas de Radon sobre todos os planos que interseitam ao objeto tem que ser conhecidas. A condição de suficiência de Tuy-Smith (Tuy, 1983), diz que a reconstrução exata é possível se todos os planos que interseitam ao objeto também interseitam a fonte. O que é intuitivo dado que a fonte tem que estar no plano onde se deseja medir a integral.

O primeiro algoritmo de reconstrução exato em forma de *Filtered Back-Projection* para geometria de amostragem *cone-beam* foi proposto por Defrise e Clack (1994). Embora este tipo de métodos está fora do escopo do presente trabalho, é importante saber que a condição de Tuy-Smith não é satisfeita pela amostra-

gem de tipo *cone-beam* de trajetória circular. Isto justifica a utilização de métodos não exatos, como FDK.

## 4.2 Algoritmo FDK

Em 1984, Feldkamp, Davis e Kress (Feldkamp et al., 1984) apresentaram um algoritmo de reconstrução para geometria de cono com detector plano e percurso circular. O método conhecido como FDK é considerado uma aproximação (Turbell, 2001) porque a reconstrução resultante se desviará do objeto medido sem importar a resolução utilizada. Este erro deve-se principalmente a que a condição de Tuy-Smith não é satisfeita. No entanto, na prática estas diferenças são aceitáveis, e somado a simplicidade e performance do método, são as razões pelas quais o FDK é o algoritmo mais usado para reconstruir projeções com geometria cônica.

A fórmula de reconstrução (4.1) é uma modificação do *Filtered Back-Projection* apresentado na Seção 3.4, onde as projeções são ponderadas com uma função que depende da posição do elemento detector no plano de projeção, e as operações de filtrado são realizadas fila por fila.

$$f_{FDK}(x, y, z) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{R}{U(x, y, \theta)} \right)^2 \mathcal{F}^{-1} \left\{ |\omega| (\mathcal{F} \tilde{p}(t, s, \theta))(\omega, s, \theta) \right\} (t, s, \theta) d\theta \quad (4.1)$$

onde o elemento do detector é obtido com (4.2). No discreto, novamente uma interpolação é necessária.

$$\begin{aligned} t(x, y, \theta) &= R \frac{-x \sin \theta + y \cos \theta}{R + x \cos \theta + y \sin \theta} \\ s(x, y, z, \theta) &= z \frac{R}{R + x \cos \theta + y \sin \theta} \end{aligned} \quad (4.2)$$

novamente, a ponderação dos dados é necessário,  $\tilde{p}(t, s, \theta)$  corresponde à projeção obtida com geometria *cone-beam* vezes um fator que representa o cosseno do ângulo formado entre o raio incidente em  $(t, s)$  e o raio central incidente em  $(t = 0, s = 0)$

$$\tilde{p}(t, s, \theta) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + t^2 + s^2}} p(t, s, \theta) \quad (4.3)$$

o fator  $U(x, y, \theta)$  é o mesmo que no *Filtered Back-Projection* (3.14), é uma função da distância entre a fonte e o ponto  $(x, y)$  projetado no raio central,

$$U(x, y, \theta) = R + x \cos \theta + y \sin \theta \quad (4.4)$$

### 4.3 Método de gradiente topológico

Recentemente, Larrabide et al. (2009) formularam um método de reconstrução tomográfica em 2D baseado na análise de sensibilidade de pequenas perturbações sobre os coeficientes de atenuação da reconstrução. A sensibilidade é utilizada como derivada para minimizar uma função objetivo. Também mostraram que o método tem relação com o conceito de gradiente topológico.

A formulação original foi apresentada para geometria *parallel-beam* e projeções unidimensionais, neste trabalho mostraremos como o método pode ser estendido naturalmente para utilizar projeções unidimensionais tipo *fan-beam* e bidimensionais tipo *cone-beam* de recorrido circular. Duas modificações ao método original são propostas, a primeira corresponde ao modelagem das projeções, a segunda corresponde à forma em que a sensibilidade da função objetivo é interpretada para realizar as perturbações.

Larrabide et al. (2009) utilizam a equação (4.5) para modelar as projeções  $\hat{p}$ , que se pode obter a partir de uma simples manipulação algébrica da equação (3.2), repetida aqui para facilitar a leitura

$$\begin{aligned} \ln I_0 - \int_L \mu(\mathbf{x}) dl &= \ln I \\ \alpha - \int_L \mu(\mathbf{x}) dl &= \hat{p} \end{aligned} \quad (4.5)$$

A utilização da equação (4.5) no cálculo do *Forward Projection* implica em

uma operação mais (a subtração) por cada raio-X. Por outro lado, a equação (4.6) só precisa do cálculo da integral de linha, para obter o valor da projeção  $p$ .

$$\begin{aligned} \int_L \mu(\mathbf{x}) dl &= -\ln \frac{I}{I_0} \\ \int_L \mu(\mathbf{x}) dl &= p \end{aligned} \tag{4.6}$$

Admitindo sem perda de generalidade que o detector possui  $q$  elementos, em configuração 1D ou 2D, e seja  $D$  o número de direções em que a função  $\mu$  foi projetada, obtêm-se o conjunto de integrais de linha

$$\begin{aligned} \int_{L_l^d} \mu(\mathbf{x}) dl &= p_l^d \\ l = 1, \dots, q \quad d = 1, \dots, D \end{aligned} \tag{4.7}$$

Discretizando o cálculo da integral sobre  $N$  elementos homogêneos  $\mu^h$  (*voxels*), se pode reescrever (4.7), para  $\mu$  definida em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ , como

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N K_{ij} \mu_j &= p_i \\ i = 1, \dots, M = q \times D \end{aligned} \tag{4.8}$$

onde o elemento  $K_{ij}$  é o comprimento da interseção do raio  $i$  (correspondente à medição  $i$ ) com o *voxel*  $j$ . Estes comprimentos são obtidos utilizando o método de Siddon introduzido na Seção 3.3. A geometria de amostragem define quais dos coeficientes  $K_{ij}$  serão não nulos.

Reescrevendo de forma matricial (4.8), e reagrupando, obtemos a equação (4.9) que define o problema de reconstrução como: *Dadas as projeções  $\mathbf{p}$  de uma função desconhecida de coeficientes de atenuação  $\boldsymbol{\mu}$ , e definida a matriz  $\mathbf{K} = K_{ij}$ , encontrar uma aproximação  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  de  $\boldsymbol{\mu}$  resolvendo a equação (4.9), em algum sentido*

adequado

$$\mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{p} \quad (4.9)$$

A família de métodos ART propõe soluções iterativas baseadas em métodos numéricos para resolver o sistema de equações lineares estabelecido em (4.9). Assim sendo, o método do Gradiente Topológico pode ser classificado como um deles, com a diferença que o processo iterativo é guiado pela análise de sensibilidade de uma função objetivo.

A função  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  é uma boa aproximação de  $\boldsymbol{\mu}$  se as *Forward Projections* de  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$ , geradas pelo modelo discreto definido na equação (4.9), aproximam às projeções de  $\mathbf{p}$ . Larrabide et al. (2009) definiram a função objetivo  $\Psi$  como o erro quadrático entre  $\mathbf{p}$  e as  $\mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\mu}}$  da função aproximante, ou seja

$$\Psi(\bar{\boldsymbol{\mu}}) = \|\mathbf{p} - \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\mu}}\|^2 \quad (4.10)$$

É simples notar que a função objetivo é quadrática, e nula se e só se o modelo de *forward projection* é capaz de gerar exatamente as projeções de entrada. Devido às simplificações do modelo discreto e a diversos fatores, como ruído nas medições, a função objetivo dificilmente será zero. O objetivo do método é minimizar a equação (4.10).

Seja  $\Psi(\boldsymbol{\mu})$  a função objetivo, e  $\delta\boldsymbol{\mu}$  uma perturbação tal que  $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} + \delta\boldsymbol{\mu}$ , para  $\delta\boldsymbol{\mu}$  suficientemente pequenas assume-se que vale a seguinte expansão

$$\Psi(\bar{\boldsymbol{\mu}}) = \Psi(\boldsymbol{\mu}) + \mathbf{g}\Psi \cdot \delta\boldsymbol{\mu} + O(\delta\boldsymbol{\mu}) \quad (4.11)$$

onde  $\mathbf{g}\Psi$  é a sensibilidade da função objetivo. Larrabide et al. (2009) fornecem uma forma explícita da sensibilidade, obtida via a subtração  $\Psi(\boldsymbol{\mu}) - \Psi(\bar{\boldsymbol{\mu}})$ , resultando



$$\begin{aligned}\mathbf{g}\Psi &= 2\mathbf{K}^T(\mathbf{p} - \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\mu}}) \\ \mathbf{g}\Psi &= 2\mathbf{K}^T(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})\end{aligned}\tag{4.12}$$

Por definição  $\mathbf{g}\Psi$  é um vetor de  $N$  elementos, onde o elemento  $g\Psi_j$  descreve a sensibilidade da função objetivo para uma pequena perturbação  $\delta\mu_j$  em  $\mu_j$ . Partindo do fato que todas as projeções  $p_j$  e todos os elementos  $K_{ij}$  são maiores ou iguais a zero, o sinal de  $g\Psi_j$  tem o seguinte significado: seja a perturbação  $\delta\boldsymbol{\mu} = (0, \dots, 0, \delta\mu_j, 0, \dots, 0)$ , o sinal de cada elemento (não nulo) da diferença  $(\mathbf{p} - \bar{\mathbf{p}})$  será negativo quando o *Forward Projection* de  $\bar{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} + \delta\boldsymbol{\mu}$  for maior que a projeção de entrada. Isto significa que o valor de  $\bar{\mu}_j$  tem que diminuir para minimizar o valor de  $\Psi(\bar{\boldsymbol{\mu}})$ . Portanto o sinal de  $g\Psi_j$  indica o sentido em que as perturbações devem ser feitas para minimizar a função objetivo. O método original interpreta de forma inversa o sinal da sensibilidade, isto devido a que as projeções são modeladas com a equação (4.5) em lugar de (4.6), o que gera um cambio de sinal na resta das projeções.

No trabalho de Larrabide (2007) foi mostrado que a equação (4.12) pode ser interpretada como a versão discreta do gradiente topológico associado à versão contínua da função objetivo definida na equação (4.10) para perturbações descontínuas sobre o campo escalar contínuo  $\boldsymbol{\mu}$ .

O pseudocódigo da função que implementa o método do Gradiente Topológico é fornecido no Algoritmo 1. Os dados de entrada necessários são o conjunto de observações  $\mathbf{p}$ , a matriz  $\mathbf{K}$ , o vetor de perturbações inicial  $\delta\boldsymbol{\mu}$ , o coeficiente de perturbação  $k$ , a reconstrução inicial  $\bar{\boldsymbol{\mu}}^0$ , e a tolerância desejada na função objetivo. Alguns comentários sobre estes parâmetros devem ser feitos.

A reconstrução inicial  $\bar{\boldsymbol{\mu}}^0$  não tem restrições. Pode ser uma reconstrução gerada por um método direto como *Filtered Back-Projection*. Nestes casos o método pode ser utilizado para melhorar reconstruções. Quando o método é usado diretamente,  $\bar{\boldsymbol{\mu}}^0$  é criada com um valor homogêneo em todos os *voxels* (obtido de

forma empírica), este valor é denominado *avg*, e calcula-se como a meia dos valores das projeções  $\mathbf{p}$ , dividido pela quantidade de *voxels*  $N$  da reconstrução.

O vetor de perturbações inicial  $\delta\boldsymbol{\mu}$  tampouco tem restrições, o que pode ser útil para usar informação a priori sobre  $\boldsymbol{\mu}$ , como por exemplo zonas de atenuação nula. Identificando estas áreas em  $\bar{\boldsymbol{\mu}}^0$ , e anulando as perturbações correspondentes em  $\delta\boldsymbol{\mu}$ , assegura-se que o método não modifique os elementos associados na reconstrução final. De forma padrão, o vetor assume (em todos os elementos) um valor igual ao 1% do máximo valor de atenuação esperado. O coeficiente de perturbação  $k$  estabelece a razão de cambio de cada perturbação  $\delta\mu_i$  ante uma situação de troca de sinal na sensibilidade. Na versão original do algoritmo  $k = 0.5$ .

O algoritmo cicla até que a tolerância desejada da função objetivo seja atendida. Em cada iteração  $\mathbf{g}\Psi^t$  é calculado usando a equação (4.12). Logo, verifica-se o sinal da sensibilidade para *voxel*, e os valores de atenuação da reconstrução para a seguinte iteração são modificadas, uma verificação extra é realizada para garantir que o novo valor não seja negativo. Cada vez que um cambio de sinal de  $g\Psi_j^t$  em relação à iteração anterior é detectado, o valor absoluto da variação a realizar na próxima iteração é diminuído em um fator  $k$ . Para calcular as funções objetivo, o algoritmo de Siddon é usado na obtenção dos *Forward Projections*. A complexidade computacional do algoritmo 1 em cada iteração é regida pela multiplicação matricial no calculo da sensibilidade  $\mathbf{g}\Psi^t$ , e por tanto do ordem de  $O(M \times N)$ .

---

**Algorithm 1** Método do gradiente topológico.

---

**function** GRADIENNETOPOLÓGICO( $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\delta\boldsymbol{\mu}$ ,  $k$ ,  $\bar{\boldsymbol{\mu}}^0$ , tolerance) $t = 0$ **repeat**Calcular  $\mathbf{g}\Psi^t$  usando a equação (4.12)**for**  $j = 1 \rightarrow N$  **do****if**  $g\Psi_j^t > 0$  **then**

$$\bar{\mu}_j^{t+1} = \bar{\mu}_j^t + \delta\mu_j$$

**else**

$$\bar{\mu}_j^{t+1} = \bar{\mu}_j^t - \delta\mu_j$$

**end if****if**  $\bar{\mu}_j^{t+1} < 0$  **then**

$$\bar{\mu}_j^{t+1} = 0$$

**end if****if**  $\text{sign}(g\Psi_j^t) \neq \text{sign}(g\Psi_j^{t-1})$  **then**

$$\delta\mu_j = k\delta\mu_j$$

**end if****end for**

$$\text{err} = \Psi(\bar{\boldsymbol{\mu}}^{t+1})$$

 $t = t + 1$ **until**  $\text{err} < \text{tolerance}$ **return**  $\boldsymbol{\mu}^t$ **end function**

---

#### 4.4 Formulação variacional baseada na transformada de Radon

Os métodos variacionais são muito utilizados para modelar diversos tipos de problema físicos, matemáticos, e inclusive na área de processamento de imagens na restauração e segmentação (Aubert e Kornprobst (2002) e Mitiche (2010), por compilam enfoques clássicos em processamento de imagens). Para nosso conhecimento o método variacional desenvolvido nesta seção é novo.

Seja  $\mu_0(\mathbf{x})$  a função escalar de distribuição de coeficientes de atenuação definida no espaço 2D ou 3D, o problema variacional associado a determinar  $\mu_0$  a partir de suas projeções  $P(\mathbf{r}, \theta)$  é o seguinte

Determine  $\mu_0 \in \mathcal{U} = \{\mu, \mu \text{ é suficientemente regular}\}$  tal que

$$\mu_0 := \arg \min_{\mu \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(\mu) = \arg \min_{\mu \in \mathcal{U}} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \left[ \mathcal{R}(\mu, \mathbf{r}, \theta) - P(\mathbf{r}, \theta) \right]^2 d\mathbf{r} d\theta \right\} \quad (4.13)$$

onde o operador  $\mathcal{R}(\mu, \mathbf{r}, \theta)$  é uma notação compacta que representa a integral de linha em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$  no campo escalar  $\mu(\mathbf{x})$ , sobre a reta definida por  $\mathbf{r}$  e  $\theta^1$ . Por tanto,  $\mathcal{R}(\mu, \mathbf{r}, \theta)$  é linear em  $\mu$ . A regularidade do conjunto  $\mathcal{U}$  deve ser entendida de forma que as operações envolvidas no operador  $\mathcal{R}(\mu, \mathbf{r}, \theta) \quad \forall \mu \in \mathcal{U} \forall \theta \in [0, 2\pi], \forall r \in \mathbb{R}^n, n = \{2, 3\}$ .

Para que a condição necessária de mínimo seja satisfeita, a primeira variação de Gâteaux  $\delta \mathcal{F}(\mu_0, \eta)$  tem que se anular em  $\mu_0$  para qualquer variação  $\eta \in \mathcal{U}$ , ou seja

---

<sup>1</sup>  $\mathbf{r}$  identifica o detector e  $\theta$  o ângulo da amostra.

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{F}(\mu_0, \eta) &= \left. \frac{d\mathcal{F}}{d\tau}(\mu_0 + \tau\eta) \right|_{\tau=0} \\
&= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \left[ \mathcal{R}(\mu_0, \mathbf{r}, \theta) - P(\mathbf{r}, \theta) \right] \mathcal{R}(\eta, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{U}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

A condição necessária de mínimo, não é condição suficiente para garantir que  $\mu_0$  é o argumento que minimiza o funcional  $\mathcal{F}$ , porque a primeira variação de Gatêaux se anula em máximos, mínimos e pontos de inflexão. Por tanto, é preciso conhecer o sinal da segunda variação de Gatêaux para determinar a convexidade do funcional no entorno de  $\mu_0$  na direção de um  $\eta$  arbitrário. Esta avaliação resulta

$$\delta^2 \mathcal{F}(\mu_0, \eta) = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \left[ \mathcal{R}(\eta, \mathbf{r}, \theta) \right]^2 d\mathbf{r}d\theta \tag{4.15}$$

Como  $\delta^2 \mathcal{F}(\mu_0, \eta)$  é positiva, podemos afirmar que o funcional é convexo, assegurando a existência de uma solução. Isto significa que a condição necessária também é suficiente. A unicidade da solução é garantida porque  $\delta^2 \mathcal{F}(\mu_0, \eta) = 0$  se e só se  $\eta = 0$ , portanto a solução é única, e o funcional é estritamente convexo.

A partir da condição necessária (e suficiente) de mínimo pode-se deduzir a equação variacional:

Econtre  $\mu \in \mathcal{U}$  tal que

$$\int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \mathcal{R}(\mu_0, \mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\eta, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} P(\mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\eta, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta \quad \forall \eta \in \mathcal{U} \tag{4.16}$$

Para resolver a equação computacionalmente, um conjunto de  $N$  funções bases  $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ , geradoras de um subespaço de dimensão finita  $\mathcal{U}_N \subset \mathcal{U}$  tem que ser

definido no domínio da imagem reconstruída (*voxels*), tal que  $\mathcal{U}_N = \text{span}\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ . Assim a aproximação  $\mu_0$  e a perturbação  $\eta$  neste espaço de dimensão finita ficam definidas por

$$\mu_N^0 = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \quad \alpha_j \in \mathbb{R} \quad (4.17)$$

$$\eta_N = \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_i \quad \beta_i \in \mathbb{R}$$

A partir de (4.17) se pode reescrever a equação variacional (4.16) como

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \mathcal{R}(\mu_N^0, \mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\eta_N, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta = \\ & \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} P(\mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\eta_N, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta \quad \forall \eta_N \in \mathcal{U}_N \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substituindo as funções  $\mu_N^0$  e  $\eta_N$  pelas combinações lineares dos elementos da base do subespaço  $\mathcal{U}_N$  tem-se

$$\begin{aligned} & \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \mathcal{R} \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j, \mathbf{r}, \theta \right) \mathcal{R} \left( \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_i, \mathbf{r}, \theta \right) d\mathbf{r}d\theta = \\ & \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} P(\mathbf{r}, \theta) \mathcal{R} \left( \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_i, \mathbf{r}, \theta \right) d\mathbf{r}d\theta \quad \forall \beta_i \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Como  $\mathcal{R}$  é um operador linear, e a igualdade tem que ser válida para qualquer combinação de  $\beta_i$ , pode-se reescrever o sistema de equações (4.19) em forma de sistema linear de equações em  $\alpha_j$  como

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \mathcal{R}(\Phi_j, \mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta = \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} P(\mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta \quad i = 1 \dots N \quad (4.20)$$

O sistema de equações (4.20) pode ser escrito de forma matricial como

$$\mathbf{M}\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b} \quad (4.21)$$

onde  $\boldsymbol{\mu}$  é o vetor contendo os  $\alpha_j, j = 1 \dots N$  e tem a representação vetorial da distribuição de coeficientes de atenuação que resolve o sistema. O vetor de carga  $\mathbf{b} = b_i$ , relaciona as projeções  $P(r, \theta)$  com o esquema de *Forward Projection* utilizado para calcular as integrais de linha sobre os *voxels*, tal que cada  $b_i$  representa o somatório das frações das projeções correspondentes ao *voxel*  $i$  sobre todos os raios.  $\mathbf{M} = M_{ij}$  é uma matriz de  $N \times N$ , donde  $N$  é a quantidade de elementos da base do sub-espço  $\mathcal{U}_N$  que coincide com a quantidade de *voxels* da reconstrução desejada.  $M_{ij}$  representa a acumulação sobre todos os raios de projeção dos quocientes entre os comprimentos do *voxel*  $i$  e o *voxel*  $j$ .  $\mathbf{M}$  é uma matriz simétrica, densa, e seu condicionamento depende da quantidade e resolução de projeções disponíveis (número de raios).

Para resolver de forma computacional, as integrais da equação (4.20), as mesmas são discretizadas em somatórios sobre os raios-X, e o operador  $\mathcal{R}$  é calculado com o método de Siddon. No presente trabalho as funções base  $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$  são funções de suporte compacto e constantes por *voxel*, em particular

$$\Phi_i = \begin{cases} 1 & \text{se é o voxel } i \\ 0 & \text{se não é o voxel } i \end{cases} \quad (4.22)$$

# Capítulo 5

## Resultados

Neste capítulo se apresentam resultados e comparações dos métodos de reconstrução propostos para duas e três dimensões. Para avaliar corretamente os algoritmos se usaram os fantasmas matemáticos definidos no Apêndice A, e as projeções são geradas com o método de Siddon introduzido na Seção 3.3.

O primeiro passo no estudo comparativo é a definição de um estimador do error de reconstrução (Seção 5.1). O segundo passo é a definição de um conjunto de projeções que servirão como dado de entrada para os diferentes algoritmos (os parâmetros usados na geração de este conjunto de dados de teste<sup>1</sup> se fornecem no Apêndice B). O terceiro passo é construir um conjunto de dados com ruído seguindo o procedimento introduzido no Apêndice C, que permita comparar a capacidade de reconstrução dos métodos frente a dados mais realistas.

O restante deste capítulo divide-se em quatro seções. Nas primeiras três (Seção 5.2 até 5.4) se analisam os parâmetros de cada método individualmente. Por último (Seção 5.6) se comparam os métodos de reconstrução de imagens 2D e 3D frente a distintos graus de ruído, quantidade de projeções e custos computacionais.

---

<sup>1</sup> Os nomes dos sinogramas seguem a nomenclatura  $S_nDac-np-ea$ . Onde  $n$  é a dimensionalidade do fantasma (2 ou 3 dimensões),  $ac$  é o ângulo coberto na projeção,  $np$  é o número de projeções e  $ea$  é o espaçamento do ângulo entre projeções sucessivas



## 5.1 Erro de reconstrução

Nas condições acima mencionadas, propõe-se usar o desvio meio  $\sigma_e$  entre o campo de coeficientes reconstruído  $\bar{\mu}$  e o original  $\mu$ , como um estimador do erro, tal que

$$\sigma_e(\boldsymbol{\mu}, \bar{\boldsymbol{\mu}}) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\boldsymbol{\mu}(i) - \bar{\boldsymbol{\mu}}(i)|^2} \quad (5.1)$$

onde  $N$  é a quantidade de *voxels*,  $\boldsymbol{\mu}$  e  $\bar{\boldsymbol{\mu}}$  são as representações vetoriais do fantasma e da reconstrução respectivamente.

Logo, resulta interessante calcular o ganho em termos de erro de reconstrução dos diferentes métodos em relação à reconstrução padrão (FBP ou FDK), de melhor resultado (usando o filtro no domínio da frequência com melhor resposta). Define-se assim a razão do erro de reconstrução como

$$\sigma_{Ref}(\sigma_e^m, \sigma_e^r) = \frac{\sigma_e^m}{\sigma_e^r} \quad (5.2)$$

onde  $\sigma_e^r$  é o erro de reconstrução de referência do método analítico correspondente, e  $\sigma_e^m$  é o erro de reconstrução do método para o qual se quer conhecer o ganho (ou perda) em relação ao primeiro. Por tanto  $\sigma_{Ref} = 0.5$ , por exemplo, indica que na reconstrução se reduziu um 50% o erro de reconstrução, enquanto  $\sigma_{Ref} = 1.5$  indica que na reconstrução se incrementou um 50% o erro de reconstrução em relação ao padrão.

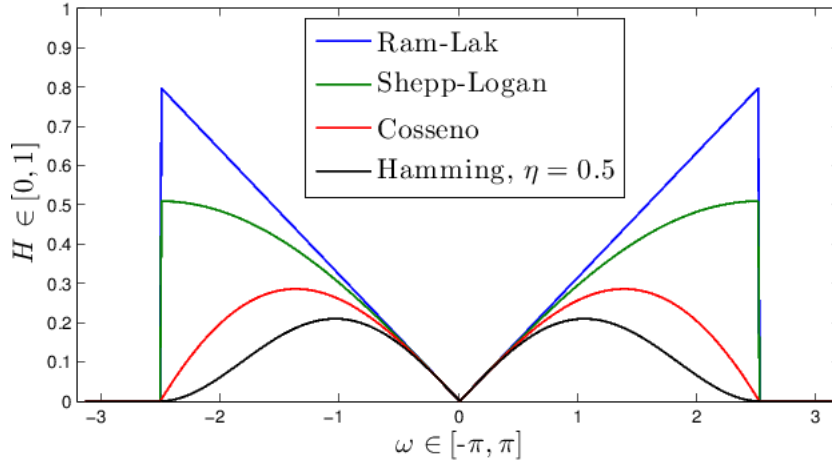
## 5.2 Análise de parâmetros dos métodos FBP e FDK

Os métodos de reconstrução diretos *Filtered Back-Projection* e FDK têm sido amplamente estudados na literatura e são utilizados nos escâneres comerciais (Hsieh (2009), Cierniak (2011)). Nesta técnica, o parâmetro principal é o chamado *kernel* usado para filtrar as projeções no espaço da frequência. Os filtros desenvolvidos para os escâneres comerciais permitem enfatizar ou atenuar frequências específicas dependendo do estudo clínico, por exemplo o escâner LightSpeedTM (GE Health-

care, Milwaukee, Wisconsin) tem 6 tipos diferentes de filtros: *soft*, *standard*, *detail*, *lung*, *bone*, e *edge*. O processo para desenvolver os *kernels* é complicado e requer de validação e testes clínicos exaustivos. Desafortunadamente, as especificações destes filtros são proprietárias e indisponíveis ao domínio público (Hsieh, 2009). A Tabela 5.1 apresenta os filtros clássicos no domínio da frequência, e podem ser visualizados na Figura 5.1.

<b>Tipo de filtro</b>	<b>Definição no domínio da frequência</b>
Ram-Lak (Ramachandran and Lakshminarayanan)	$H^{RL}(\omega) = \left \frac{\omega}{\pi}\right  W_{\Gamma}$
Shepp-Logan (Shepp and Logan)	$H^{SL}(\omega) = \left \frac{\omega}{\pi}\right  \left  \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2\Gamma}\right)}{\frac{\omega}{2\Gamma}} \right  W_{\Gamma}$
Cosseno passa-baixa	$H^C(\omega) = \left \frac{\omega}{\pi}\right  \cos\left(\frac{\omega}{2\Gamma}\right) W_{\Gamma}$
Hamming generalizado	$H^H(\omega) = \left \frac{\omega}{\pi}\right  \left(\eta + (1 - \eta) \cos\left(\frac{\omega}{2\Gamma}\right)\right) W_{\Gamma}$ $\eta \in [0, 1]$

**Tabela 5.1:** Filtros clássicos no domínio da frequência. Onde  $\omega \in [-\pi, \pi]$ ,  $\Gamma$  é a frequência de corte, e  $W_{\Gamma}$  é função janela (ver Seção 3.4).

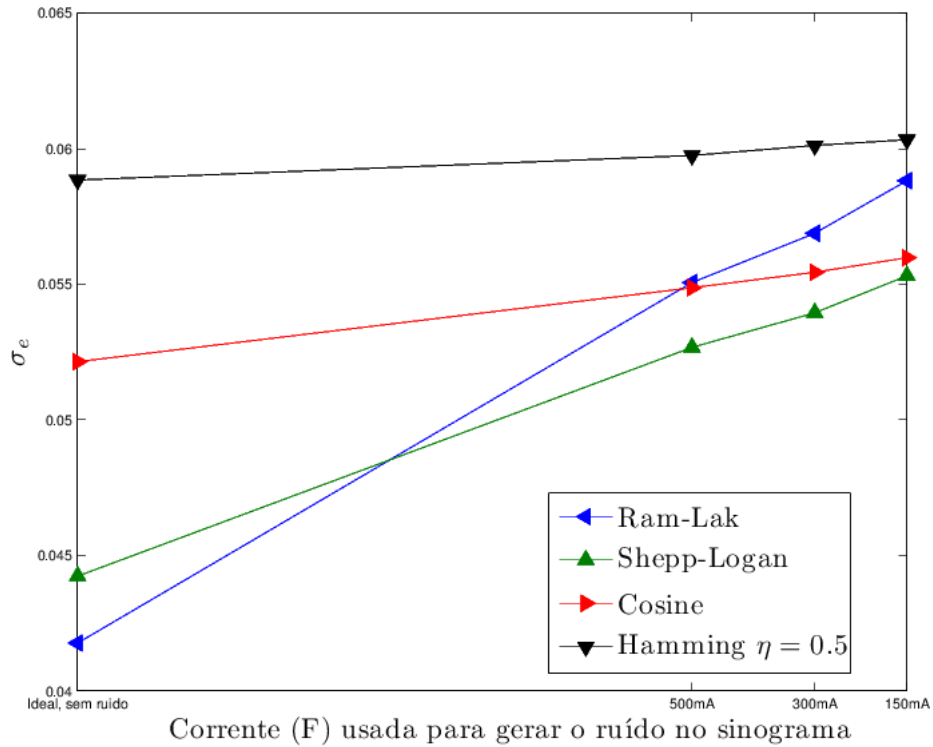


**Figura 5.1:** Filtros clássicos no domínio da frequência, para uma frequência de corte  $\Gamma = 0.8$ . No eixo- $x$  a frequência  $\omega \in [-\pi, \pi]$ , no eixo- $y$  a amplitude  $\in [0, 1]$ .

Jain (1989) explica que a escolha do filtro fica sujeita ao *trade-off* entre a amplitude na banda, necessária para realçar as bordas, e a supressão do ruído nas medições. Os intentos de alcançar boa qualidade de reconstrução utilizando a frequência de corte  $\Gamma$  no filtro Ram-Lak causa distorções quando  $\Gamma$  é relativamente baixa devido à variação abrupta na amplitude. Entretanto, com  $\Gamma$  elevados, o filtro fica sensível ao ruído. O filtro de Shepp-Logan se comporta melhor que o Ram-Lak frente à existência moderada de ruído. Porém, o filtro de Hamming generalizado, com o parâmetro  $\eta$  otimizado para o nível de ruído<sup>2</sup> é utilizado quando o mesmo é significativo. Embora o filtro Cosseno apresenta resultados aceitáveis para diferentes graus de ruído.

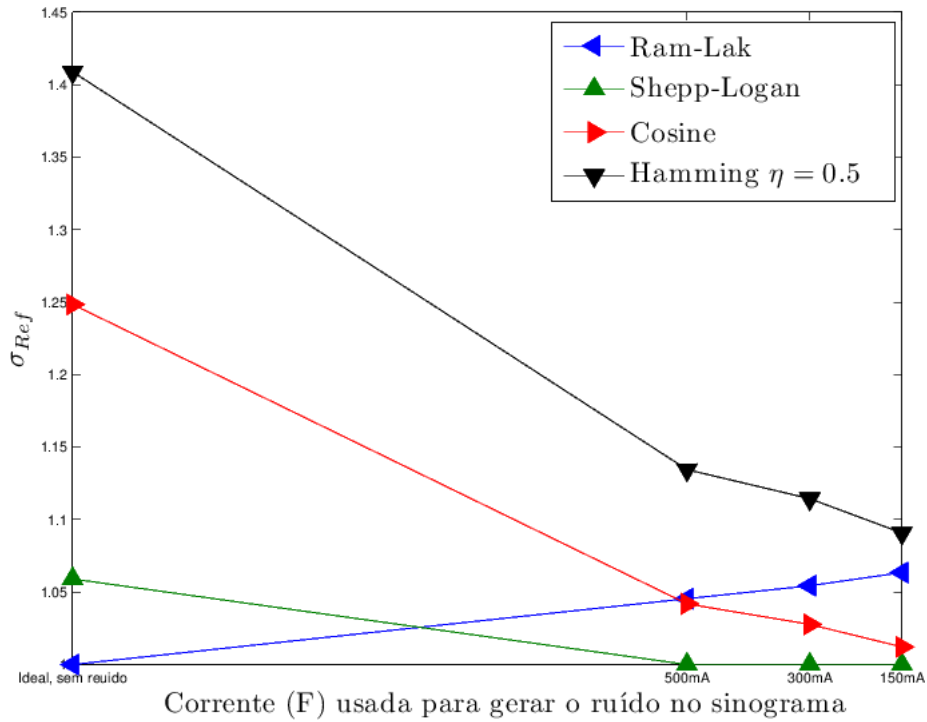
Na Figura 5.2 se apresenta o erro ( $\sigma_e$ ) na reconstrução do fantasma de Shepp-Logan para o sinograma S2D360-360-1 com diferentes níveis de ruído para cada um dos quatro *kernels* da tabela 5.1. Utilizou-se a frequência de corte unitária, com a frequência de Nyquist  $\Gamma = (2\Delta t^v)^{-1}$ , sendo  $\Delta t^v = 0.49375$  o espaçamento no detector virtual, por tanto  $\Gamma = 1.012658228$ .

<sup>2</sup> O comportamento da reconstrução em relação ao parâmetro  $\eta$  não foi objeto de estudo no presente trabalho. O valor  $\eta = 0.5$  foi adotado, para que o filtro seja contínuo na frequência de corte. Com este valor de  $\eta$ , o filtro é chamado filtro de Hann.

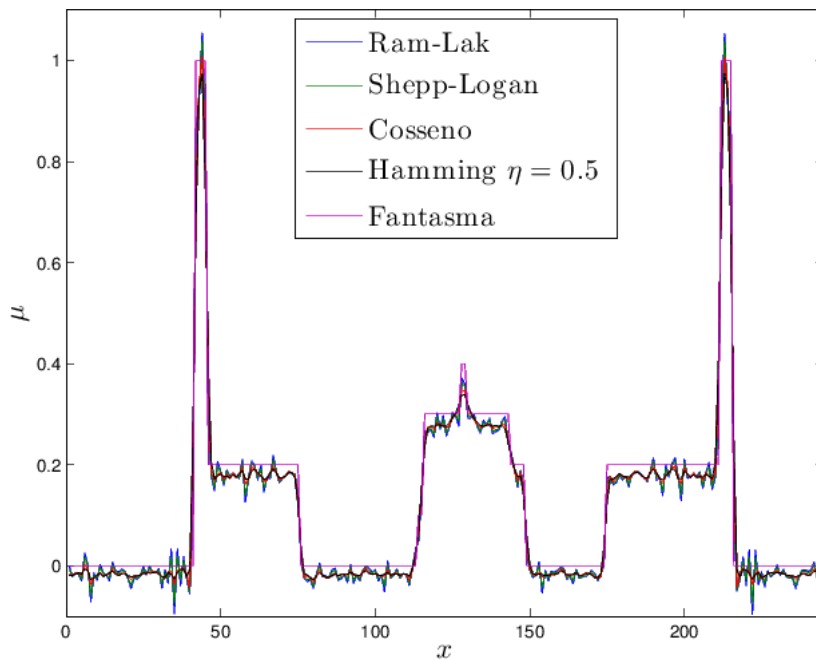


**Figura 5.2:** Comparação do desvio padrão na reconstrução. No eixo- $x$  a corrente ( $F$ ) usada na geração do ruído, no eixo- $y$  o  $\sigma_e$  entre o fantasma e a reconstrução.

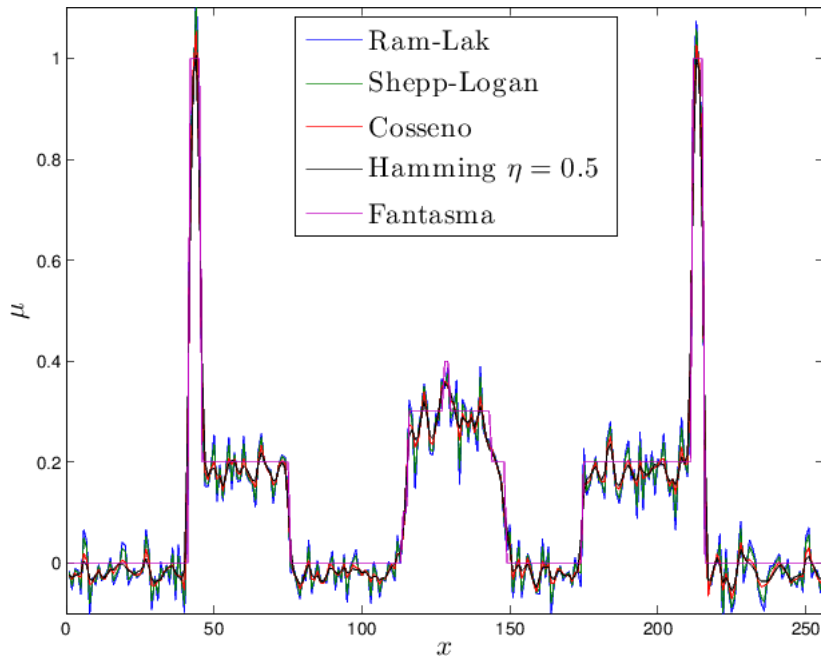
Quando a projeção não tem ruído, o filtro Ram-Lak fornece o menor  $\sigma_e$ , isto é de esperar porque é o filtro derivado diretamente da fórmula analítica do *Filtered Back-Projection*. Porém quanto maior é o ruído no sinal, pior é a reconstrução deste filtro. Para o conjunto de filtros testados, o filtro Shepp-Logan fornece o melhor balanço entre o realce de borda e a atenuação de ruído de altas frequências, em consequência gera uma reconstrução com menor  $\sigma_e$  perante o aumento do ruído. Uma comparação do erro de reconstrução relativo  $\sigma_{Ref}$  apresenta-se na Figura 5.3, nesta se pode apreciar de forma quantitativa a perda de qualidade na reconstrução dos filtros para os diferentes níveis de ruído. A modo de ilustração, as Figuras 5.4 - 5.7 apresentam um corte das imagens reconstruídas em  $y = 110$ , nelas se pode apreciar o efeito dos filtros na reconstrução. Veja que a medida que mais atenuação de altas frequências têm o filtro, menor o ruído na imagem e menor a percepção das bordas. De forma geral, pode-se concluir que as bordas verdadeiras da imagem sempre diferem das bordas reconstruídas.



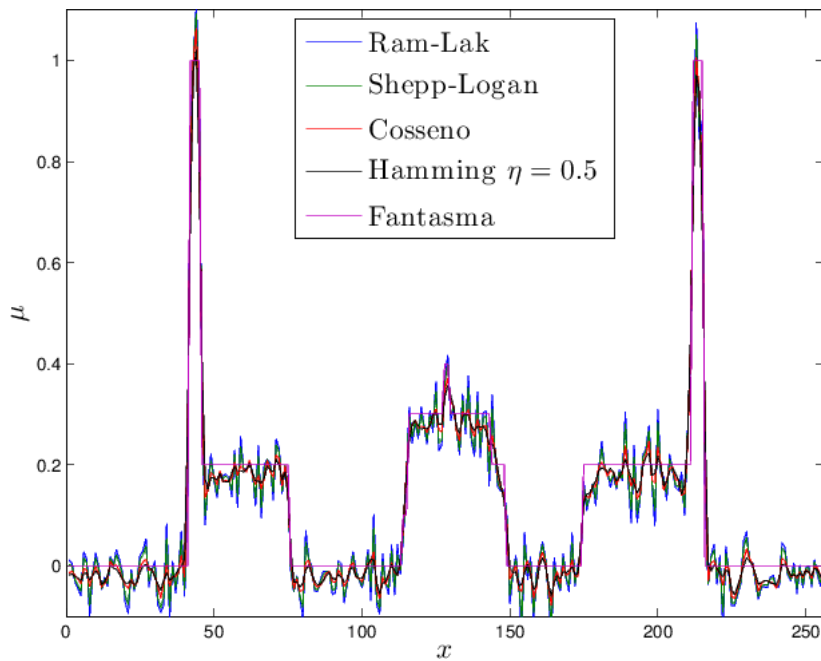
**Figura 5.3:** Comparação do erro de reconstrução relativo. No eixo- $x$  a corrente ( $F$ ) usada na geração do ruído, no eixo- $y$  o  $\sigma_{Ref}$  entre as reconstruções, tomando como referencia a reconstrução com menor  $\sigma_e$ .



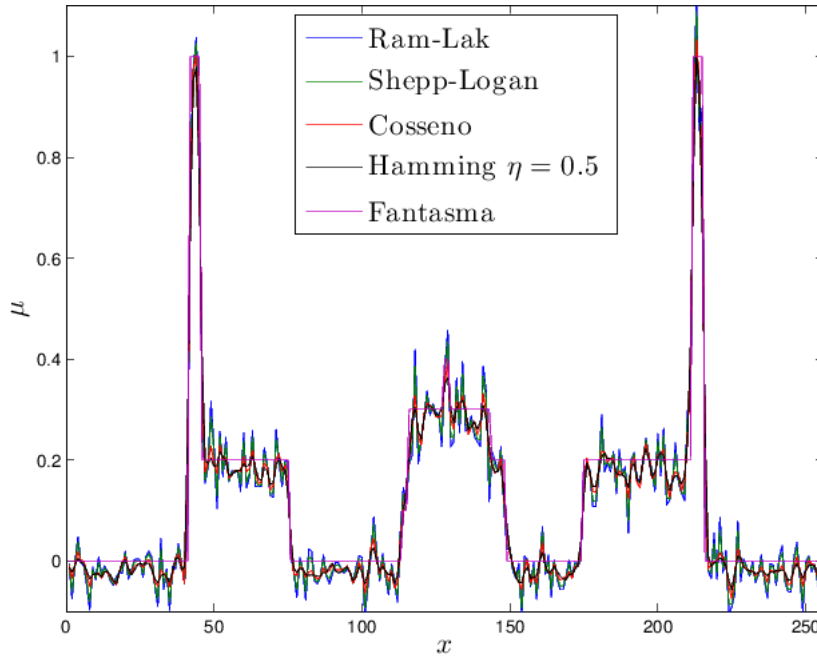
**Figura 5.4:** Seção  $y = 110$  do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma sem ruído. No eixo- $x$  os elementos  $(x, 110)$  da imagens, no eixo- $y$  o coeficiente de atenuação  $\mu$ .



**Figura 5.5:** Seção  $y = 110$  do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma com ruído gerado com  $F = 500$ . No eixo- $x$  os elementos  $(x, 110)$  da imagens, no eixo- $y$  o coeficiente de atenuação  $\mu$ .



**Figura 5.6:** Seção  $y = 110$  do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma com ruído gerado com  $F = 300$ . No eixo- $x$  os elementos  $(x, 110)$  da imagens, no eixo- $y$  o coeficiente de atenuação  $\mu$ .



**Figura 5.7:** Seção  $y = 110$  do fantasma e as reconstruções (usando diferentes filtros) para o sinograma com ruído gerado com  $F = 150$ . No eixo- $x$  os elementos  $(x, 110)$  da imagens, no eixo- $y$  o coeficiente de atenuação  $\mu$ .

### 5.3 Análise de parâmetros do método do gradiente topológico

Este algoritmo tem três parâmetros principais que influenciam na velocidade de convergência e na qualidade da reconstrução. Estes são: a condição inicial  $\bar{\mu}^0$ , o campo de perturbações inicial  $\delta\mu$ , e o coeficiente de perturbação  $k$ . Para estudar o impacto destes parâmetros, usar-se-á o sinograma S2D360-360-1.

#### 5.3.1 Condição inicial par o método

A condição inicial  $\bar{\mu}^0$  pode ser um campo homogêneo ou o resultado de aplicar um método de reconstrução como *Filtered Back-Projection* ou FDK. Para estudar o comportamento do método perante diferentes condição iniciais, definiu-se um conjunto de oito  $\bar{\mu}^0$ , especificadas na Tabela 5.2. A Figura 5.8 apresenta a convergência para cada condição inicial ao longo das primeiras 1000 iterações<sup>3</sup>. A Figura 5.9 ilustra a evolução de  $\sigma_e$  entre a solução exata (o fantasma) e as

<sup>3</sup> A perturbação inicial é  $\delta\mu_{0.01}$  (ver Tabela 5.3). O coeficiente de variação foi fixado em  $k = 0.5$ .

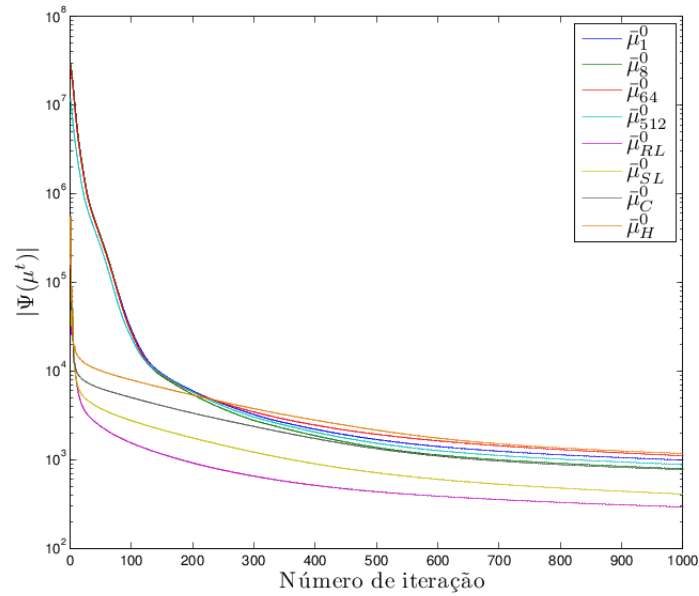
reconstruções sucessivas para cada condição inicial.

Em termos de ganho de reconstrução, no melhor dos casos, se consegue  $\sigma_{Ref} \simeq 0.6$  na iteração 100, que pode diminuir até  $\simeq 0.35$  na iteração 1000. O que significa em melhores de um 40% e 65% respectivamente. A condição inicial mas próxima ao fantasma, o resultado do *Filtered Back-Projection* com filtro Ram-Lak (no caso sem ruído), é a que melhora tanto a convergência como o erro de reconstrução, por esta razão nos estudos seguintes se utilizará  $\bar{\mu}_{RL}^0$  como condição inicial (amenos que seja indicada outra condição inicial de forma explicita). As Figuras 5.10 e 5.11 ilustram a reconstrução e a diferença entre o fantasma e a reconstrução para cada condição inicial.

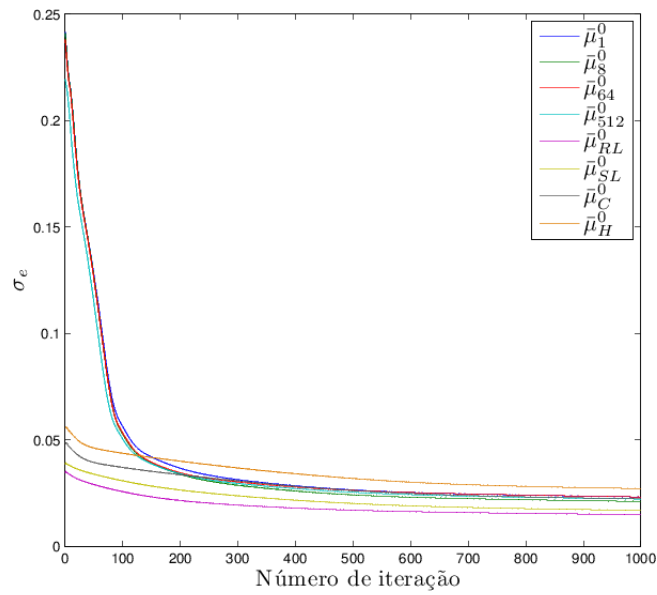
$\bar{\mu}^0$	Descrição
$\bar{\mu}_1^0$	Todos os elementos da condição inicial têm um valor igual à media dos valores do sinograma dividido a quantidade de pixels na reconstrução.
$\bar{\mu}_8^0$	Os valores dos elementos se obtêm multiplicando $\bar{\mu}_1^0$ pela constante 8.
$\bar{\mu}_{64}^0$	Os valores dos elementos se obtêm multiplicando $\bar{\mu}_1^0$ pela constante 64.
$\bar{\mu}_{512}^0$	Os valores dos elementos se obtêm multiplicando $\bar{\mu}_1^0$ pela constante 512.
$\bar{\mu}_{RL}^0$	É o resultado do <i>Filtered Back-Projection</i> , usando o filtro Ram-Lak.
$\bar{\mu}_{SL}^0$	É o resultado do <i>Filtered Back-Projection</i> , usando o filtro Shepp-Logan.
$\bar{\mu}_C^0$	É o resultado do <i>Filtered Back-Projection</i> , usando o filtro Cosseno.
$\bar{\mu}_H^0$	É o resultado do <i>Filtered Back-Projection</i> , usando o filtro Hamming.

**Tabela 5.2:** Especificação do conjunto de condições iniciais  $\bar{\mu}^0$ .

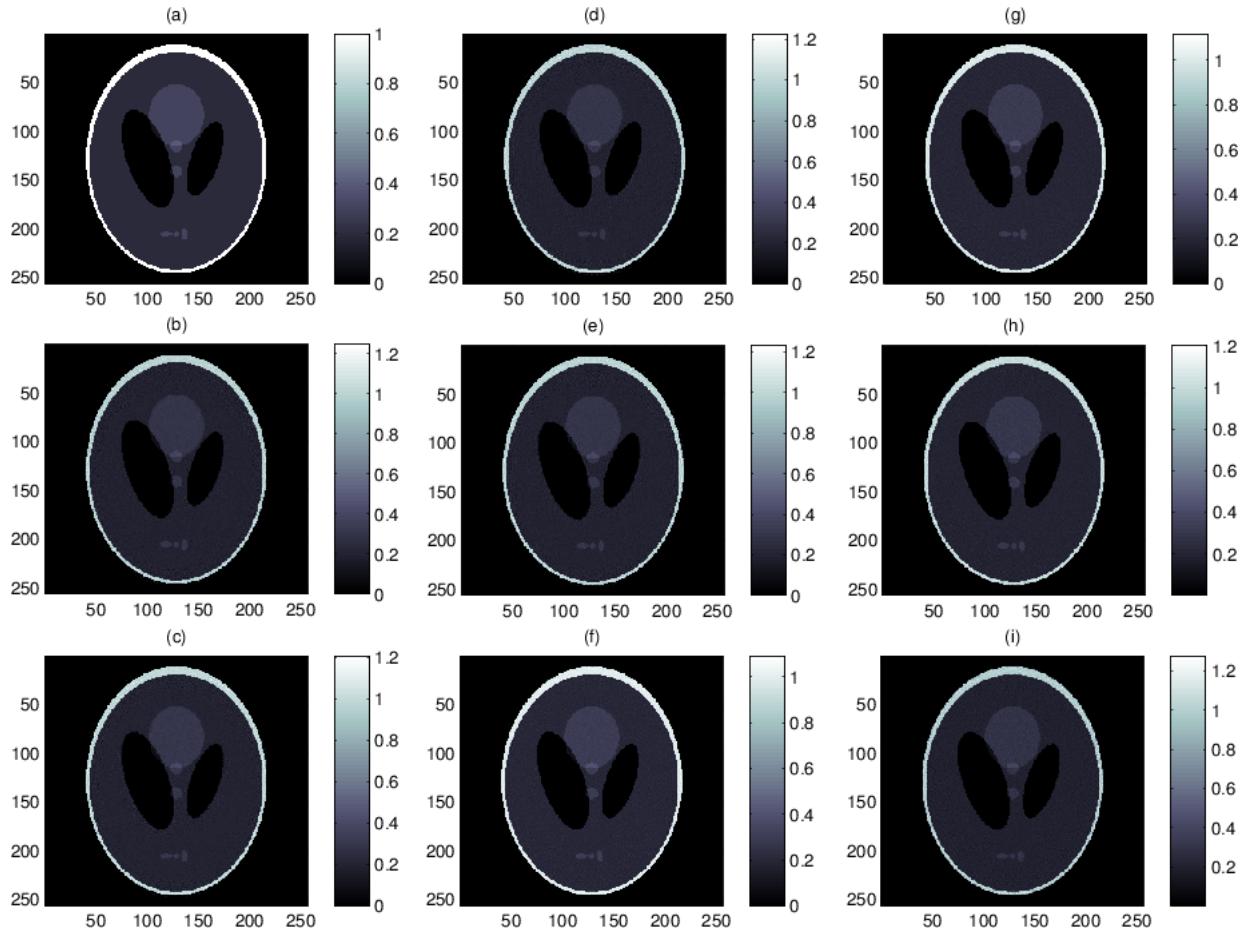




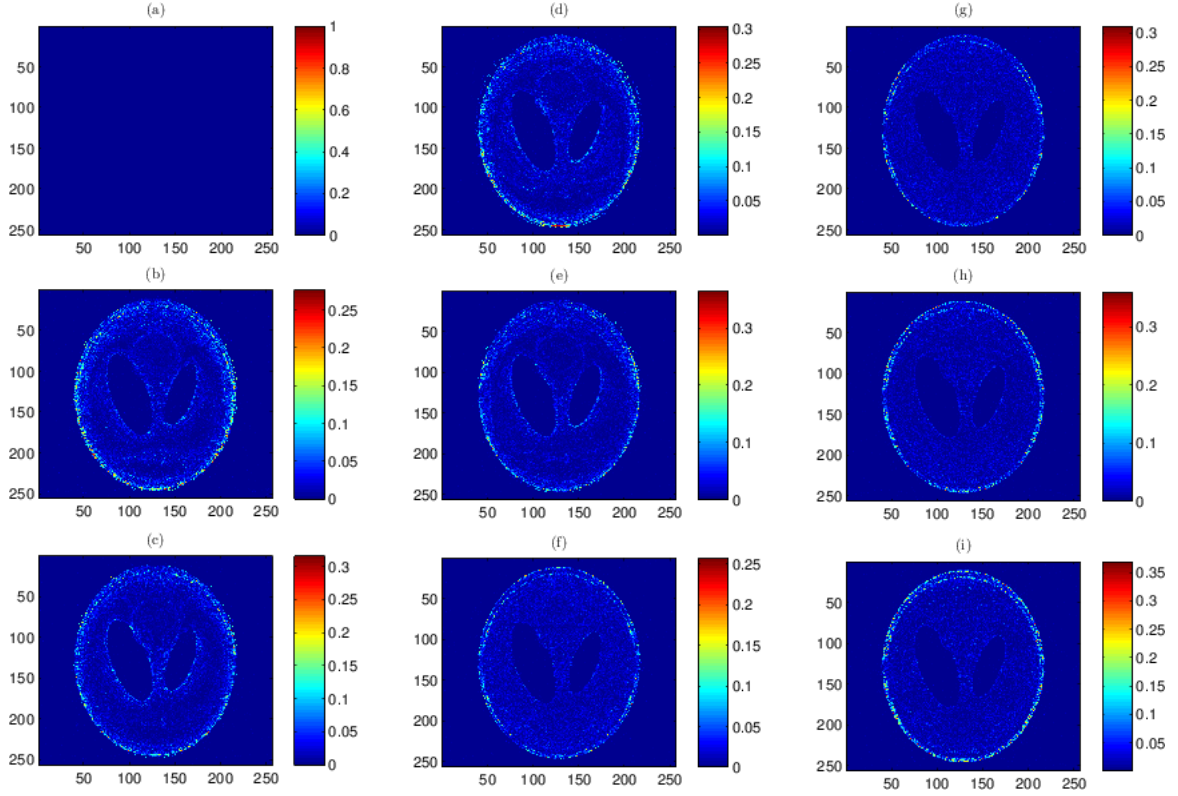
**Figura 5.8:** Erro de convergência para distintas condições iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro  $\Psi(\bar{\mu}^{t+1})$  em escala logarítmica.



**Figura 5.9:** Desvio padrão médio para distintas condições iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro entre o fantasma e a reconstrução  $\sigma_e$ .



**Figura 5.10:** Reconstrução final para distintas condições iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_1^0$ , (c) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_8^0$ , (d) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_{64}^0$ , (e) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_{512}^0$ , (f) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_{RL}^0$ , (g) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_{SL}^0$ , (h) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_C^0$ , (i) reconstrução a partir de  $\bar{\mu}_H^0$ .



**Figura 5.11:** Diferença absoluta entre a reconstrução final e o fantasma para distintas condições iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b)  $\bar{\mu}_1^0$ , (c)  $\bar{\mu}_8^0$ , (d)  $\bar{\mu}_{64}^0$ , (e)  $\bar{\mu}_{512}^0$ , (f)  $\bar{\mu}_{RL}^0$ , (g)  $\bar{\mu}_{SL}^0$ , (h)  $\bar{\mu}_C^0$ , (i)  $\bar{\mu}_H^0$ .

### 5.3.2 Campo de perturbações inicial

Embora a perturbação inicial  $\delta\boldsymbol{\mu}$  possa ser heterogênea (por exemplo nula para zonas conhecidas), neste estudo será um campo homogêneo com valor igual a uma porcentagem do valor de atenuação máximo esperado na reconstrução. A Tabela 5.3 detalha o conjunto de perturbações usadas neste estudo. A Figura 5.12 apresenta a convergência para cada  $\delta\boldsymbol{\mu}$  ao longo de 1000 iterações<sup>4</sup>. A Figura 5.13 ilustra a evolução de  $\sigma_e$  entre a solução exata (o fantasma) e as reconstruções sucessivas para cada perturbação.

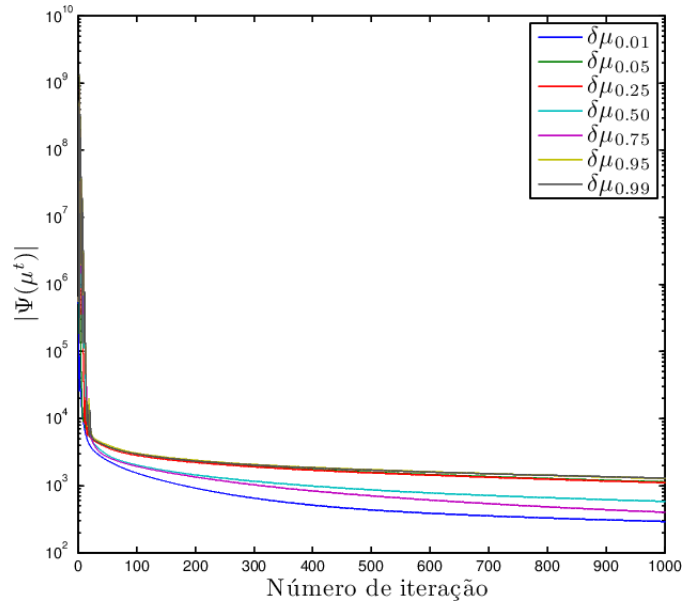
Como a perturbação usado no estudo anterior ( $\delta\boldsymbol{\mu}_{0.01}$ ), é a que melhor resultados fornece, não se obtiveram ganhos de reconstrução em relação a reconstrução via *Filtered Back-Projection*. Portanto essa perturbação inicial será utilizada nos estudos a seguir (amenos que seja indicada outro de forma explicita). As Figuras

<sup>4</sup> O coeficiente de variação foi fixado em  $k = 0.5$ .

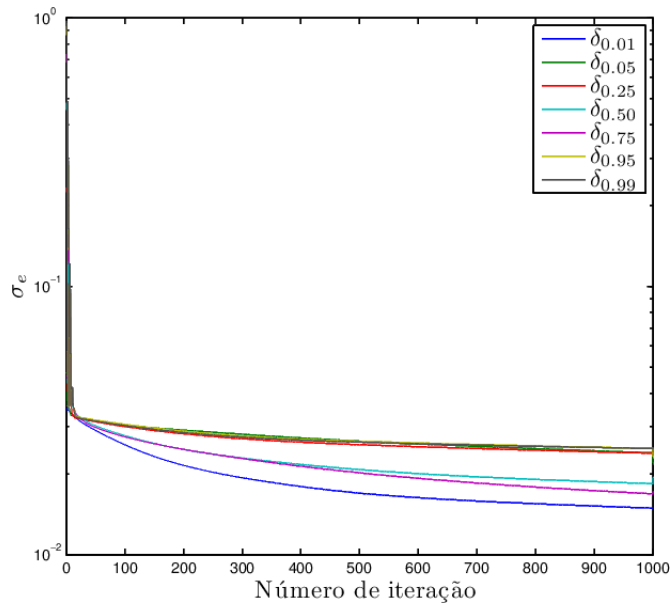
5.14 e 5.15 ilustram a reconstrução e a diferença entre o fantasma e a reconstrução para cada perturbação inicial.

Perturbação inicial	Descrição
$\delta\mu_{0.01}$	Todos os elementos da perturbação inicial têm um valor igual ao 1% do valor máximo esperado, neste caso 0.01
$\delta\mu_{0.05}$	Todos os elementos da perturbação inicial têm um valor igual ao 5% do valor máximo esperado, neste caso 0.05
$\delta\mu_{0.25}$	Todos os elementos da perturbação inicial têm um valor igual ao 25% do valor máximo esperado, neste caso 0.25
$\delta\mu_{0.5}$	Todos os elementos da perturbação inicial têm um valor igual ao 50% do valor máximo esperado, neste caso 0.5
$\delta\mu_{0.75}$	Todos os elementos da perturbação inicial têm um valor igual ao 75% do valor máximo esperado, neste caso 0.75
$\delta\mu_{0.95}$	Todos os elementos da perturbação inicial têm um valor igual ao 95% do valor máximo esperado, neste caso 0.95
$\delta\mu_{0.99}$	Todos os elementos da perturbação inicial têm um valor igual ao 99% do valor máximo esperado, neste caso 0.99

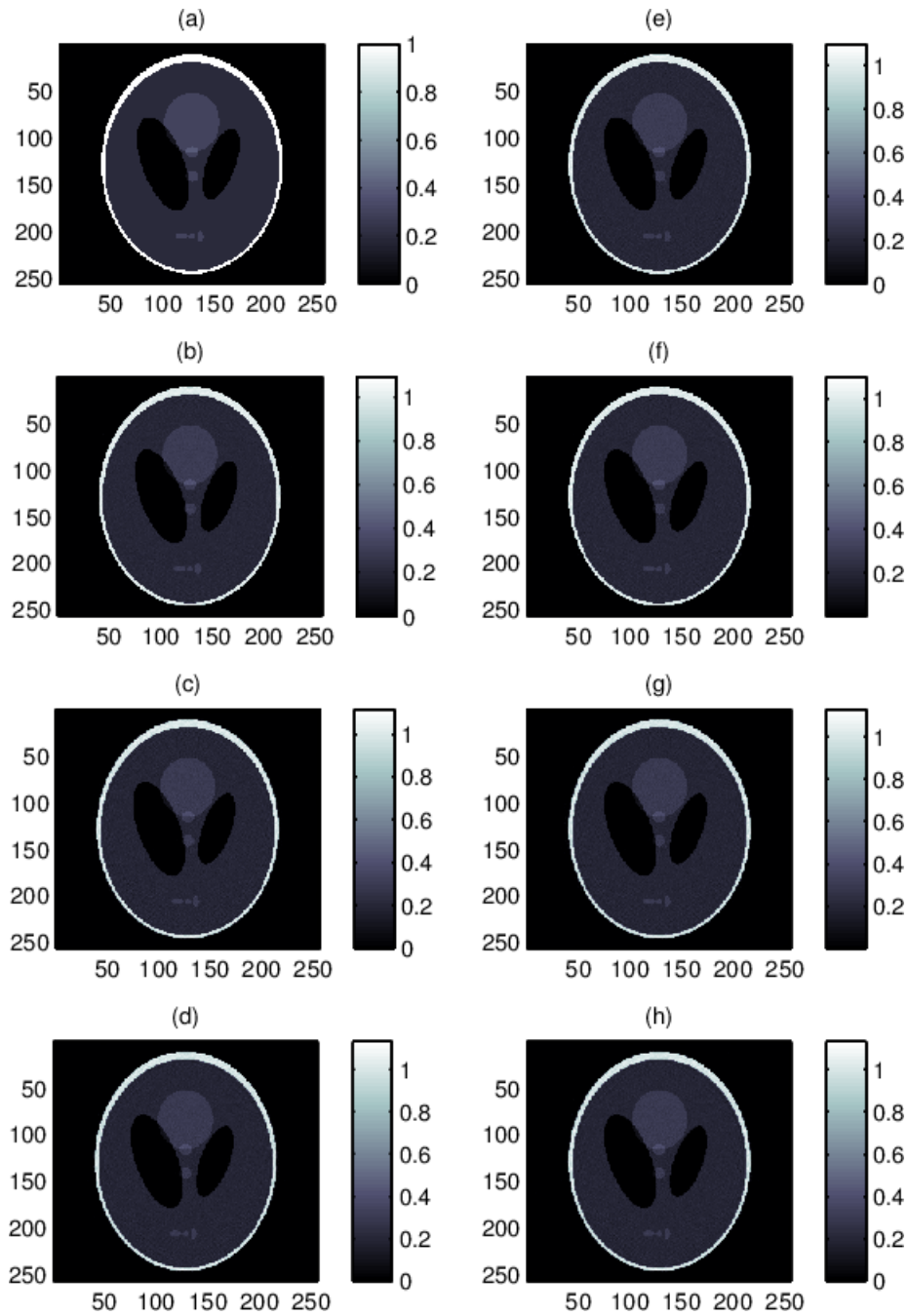
**Tabela 5.3:** Especificação do conjunto de perturbações iniciais  $\delta\mu$ .



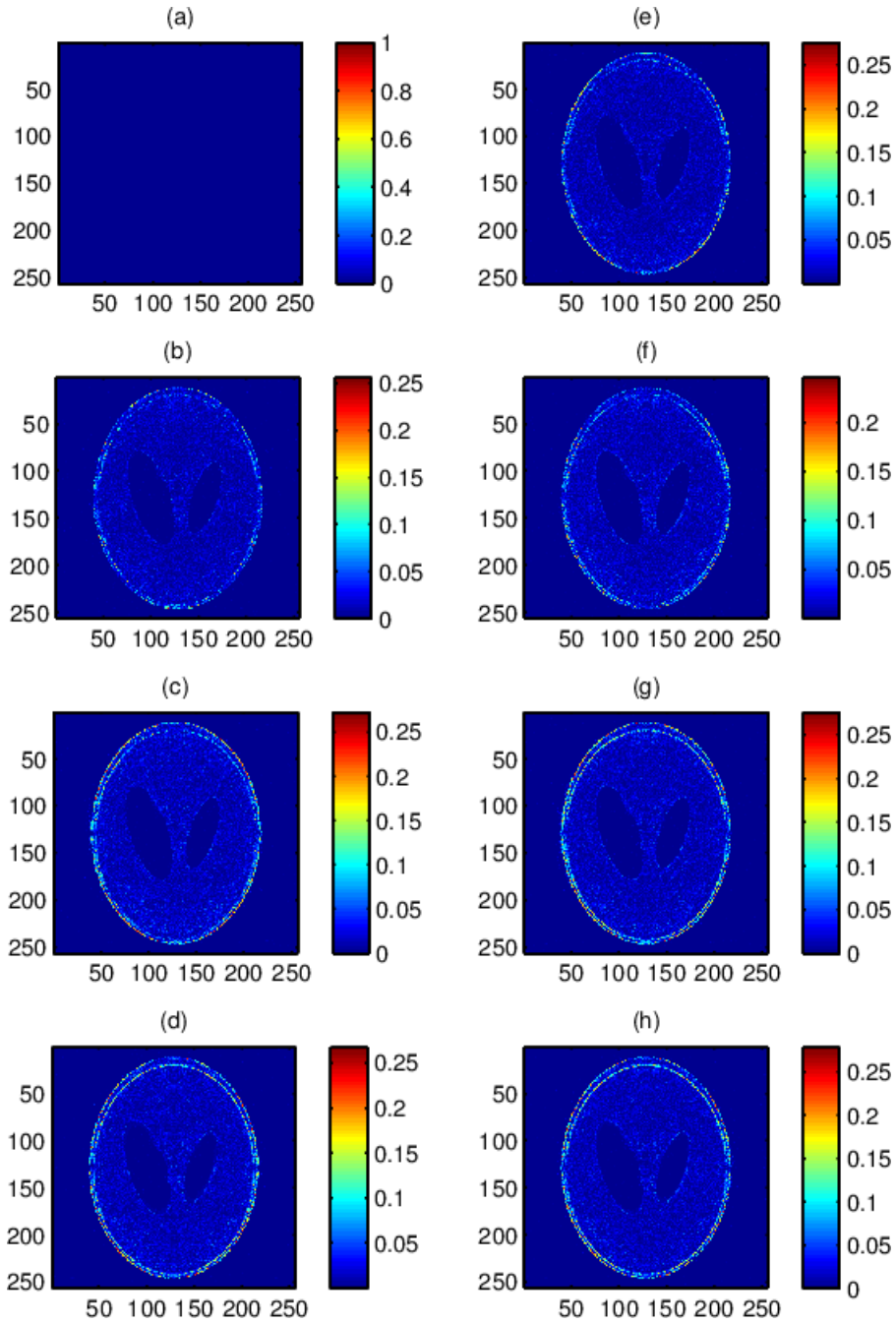
**Figura 5.12:** Convergência para distintas perturbações iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  e erro  $\Psi(\bar{\mu}^{t+1})$  em escala logarítmica.



**Figura 5.13:** Desvio padrão médio para distintas perturbações iniciais ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro entre o fantasma e a reconstrução  $\sigma_e$ , em escala logarítmica.



**Figura 5.14:** Reconstrução final para distintas perturbações iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b) reconstrução a partir de  $\delta\mu_{0.01}$ , (c) reconstrução a partir de  $\delta\mu_{0.05}$ , (d) reconstrução a partir de  $\delta\mu_{0.25}$ , (e) reconstrução a partir de  $\delta\mu_{0.5}$ , (f) reconstrução a partir de  $\delta\mu_{0.75}$ , (g) reconstrução a partir de  $\delta\mu_{0.95}$ , (h) reconstrução a partir de  $\delta\mu_{0.99}$ .



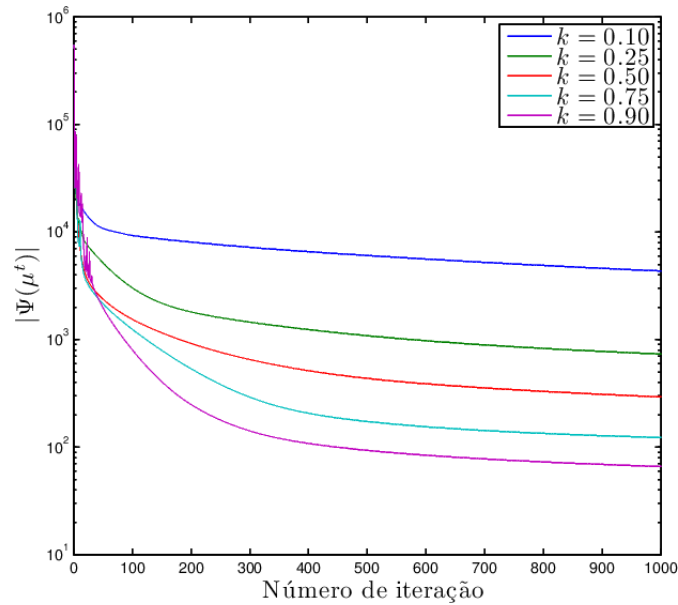
**Figura 5.15:** Diferença absoluta entre a reconstrução final e o fantasma para distintas perturbações iniciais. (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b)  $\delta\mu_{0.01}$ , (c)  $\delta\mu_{0.05}$ , (d)  $\delta\mu_{0.25}$ , (e)  $\delta\mu_{0.5}$ , (f)  $\delta\mu_{0.75}$ , (g)  $\delta\mu_{0.95}$ , (h)  $\delta\mu_{0.99}$ .

### 5.3.3 Coeficiente de perturbação

O coeficiente de perturbação  $k \in (0, 1)$  pode impactar significativamente na qualidade da reconstrução. Neste estudo se analisam os seguintes valores de  $k$ : 0.10, 0.25, 0.50, 0.75, 0.90. A Figura 5.16 apresenta a convergência para cada

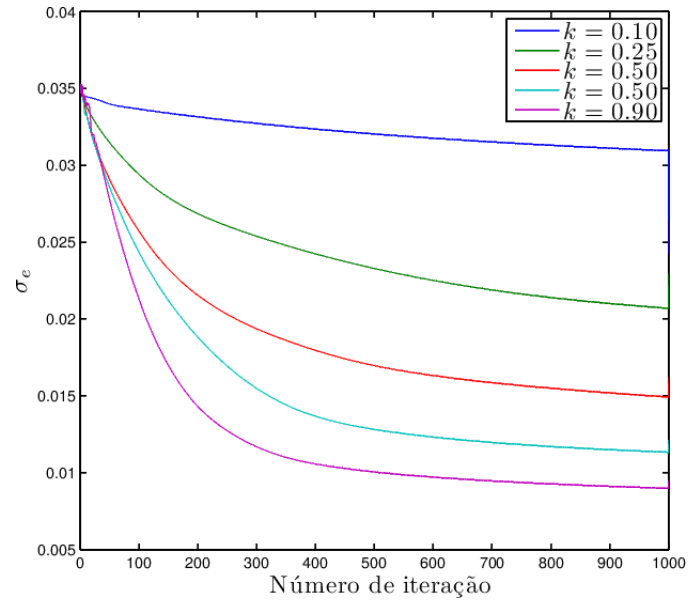
coeficiente ao longo de 1000 iterações. A Figura 5.17 ilustra a evolução de  $\sigma_e$  entre a solução exata (o fantasma) e as reconstruções sucessivas para cada coeficiente.

Em termos de ganho de reconstrução, no melhor dos casos ( $k = 0.90$ ), se consegue  $\sigma_{Ref} \simeq 0.5$  na iteração 100, que pode diminuir até  $\simeq 0.2$  na iteração 1000. O que significa em melhores de um 50% e 80% respectivamente. Por esta razão nos estudos seguintes esse valor de coeficiente de variação será usado (amenos que seja indicada outro de forma explicita). As Figuras 5.18 e 5.19 ilustram a reconstrução e a diferença entre o fantasma e a reconstrução para cada perturbação inicial.

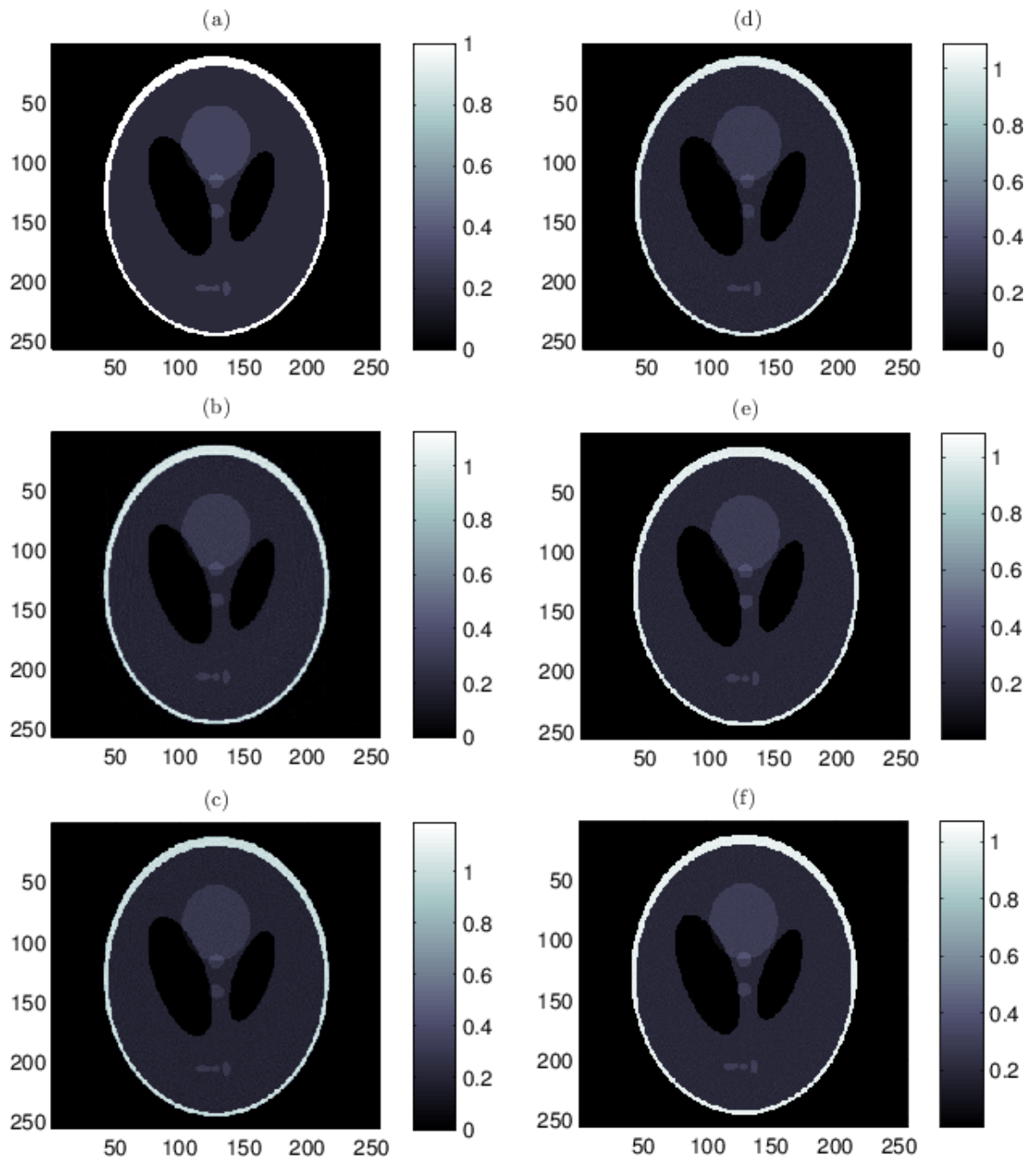


**Figura 5.16:** Convergência para distintos coeficientes de perturbação  $k$  ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro  $|\Psi(\bar{\mu}^{t+1})|$  em escala logarítmica.

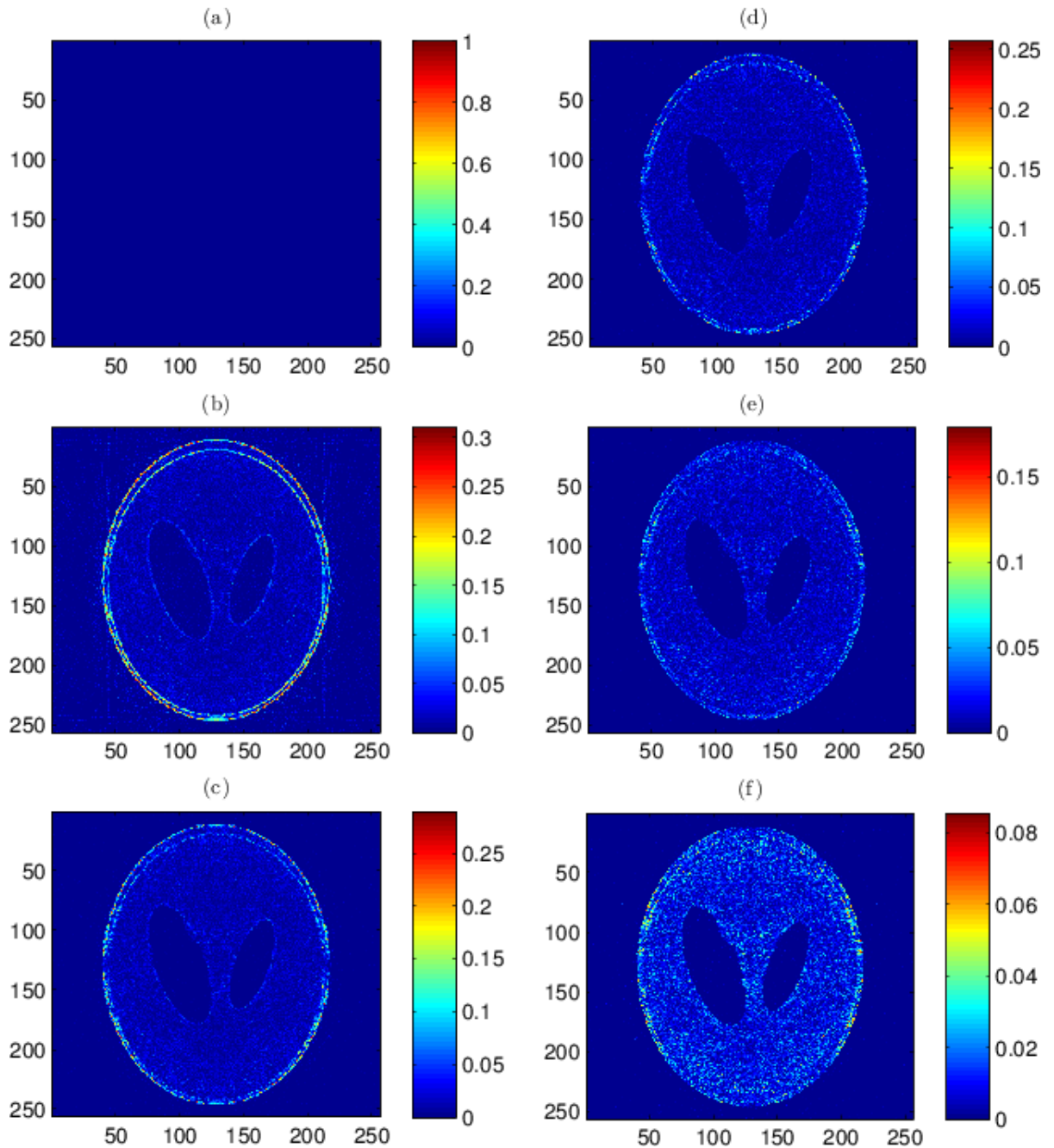




**Figura 5.17:** Desvio padrão médio para distintas coeficientes de perturbação  $k$  ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro entre o fantasma e a reconstrução  $\sigma_e$ .



**Figura 5.18:** Reconstrução final para diferentes coeficientes de perturbação  $k$ .  
 (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b)  $k = 0.1$ , (c)  $k = 0.25$ , (d)  $k = 0.5$ , (e)  $k = 0.75$ ,  
 (f)  $k = 0.9$ .



**Figura 5.19:** Diferença absoluta entre as reconstrução final e o fantasma para distintos coeficientes de perturbação  $k$ . (a) Fantasma de Shepp-Logan, (b)  $k = 0.1$ , (c)  $k = 0.25$ , (d)  $k = 0.5$ , (e)  $k = 0.75$ , (f)  $k = 0.9$ .

### 5.3.4 Comportamento em presença de ruído nas projeções

Para finalizar o estudo do método do Gradiente Topológico, apresenta-se aqui o comportamento do método quando há ocorrência de ruído nas projeções (definido no Apêndice C.1). Embora o método original é robusto ao possível ruído

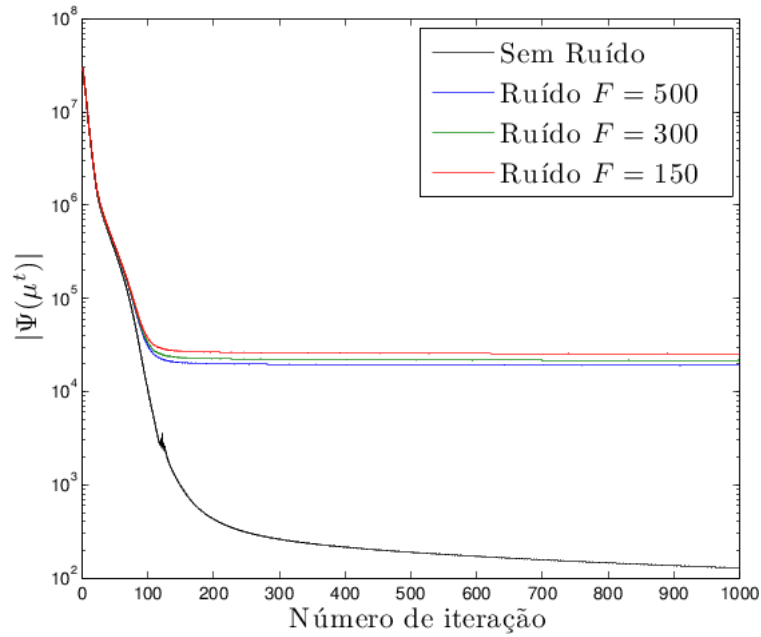
nos dados, um interessante comportamento se pode observar quando o número de iterações ultrapassa certo limiar a partir do qual as perturbações tentam caracterizar zonas que reproduzam o ruído nas projeções. Embora o método continue minimizando a função objetivo  $|\Psi(\mu^t)|$ , o erro de reconstrução  $\sigma_e$  começa a ter pequenos incrementos, devidos à criação de artefatos na reconstrução. As Figuras 5.20 e 5.21 apresentam a evolução da função objetivo e do erro de reconstrução respectivamente para reconstruir o fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 com diferentes níveis de ruído<sup>5</sup>. No entanto um incremento é percebido no erro de reconstrução, este manifesta-se de forma gradual, e quando o valor da função objetivo começa a convergir. Incluso, logo de 1000 iterações o erro de reconstrução continua menor que os obtidos pelo FBP, como se mostra na Figura 5.21.

Na Figura 5.22 apresentam-se as reconstruções tomando como condição de corte 100 e 1000 iterações, nelas pode-se perceber o efeito de degradação da solução comentado anteriormente. Os artefatos podem ser caracterizados por um incremento nos valores altos, e acentuação de artefatos de linha (*strake-lines*).

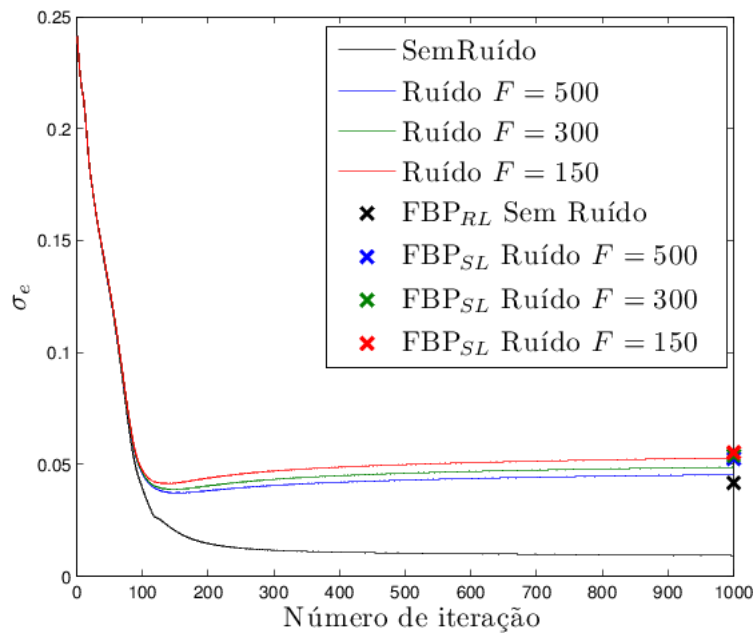
Um último comentário relacionado à função objetivo e a condição de corte do método deve ser feita. Se o valor de  $|\Psi(\mu^0)|$  é usado de forma direta como condição de corte, tem-se o problema de conhecer a faixa de valores da função para um dado sinograma, já que fatores como quantidade e tamanho das projeções influenciam a faixa de valores da função objetivo. Utilizar a diferença  $|\Psi(\mu^t) - \Psi(\mu^{t-1})|$  pode trazer o problema de cortar de forma precoce em um mínimo local. Propõe-se considerar o erro relativo como o quociente entre os valores da função objetivo da primeira solução ( $|\Psi(\mu^0)|$ ) e a atual ( $|\Psi(\mu^t)|$ ), como condição de corte, a vantagem de utilizar o erro relativo é que permite relacionar o critério de parada com o valor da função objetivo de forma indireta. No exemplo da Figura 5.21 para  $t = 100$  se tem erros relativos  $\sim 10^{-03}$  nos casos ruidosos e  $\sim 10^{-04}$  sem ruído.

---

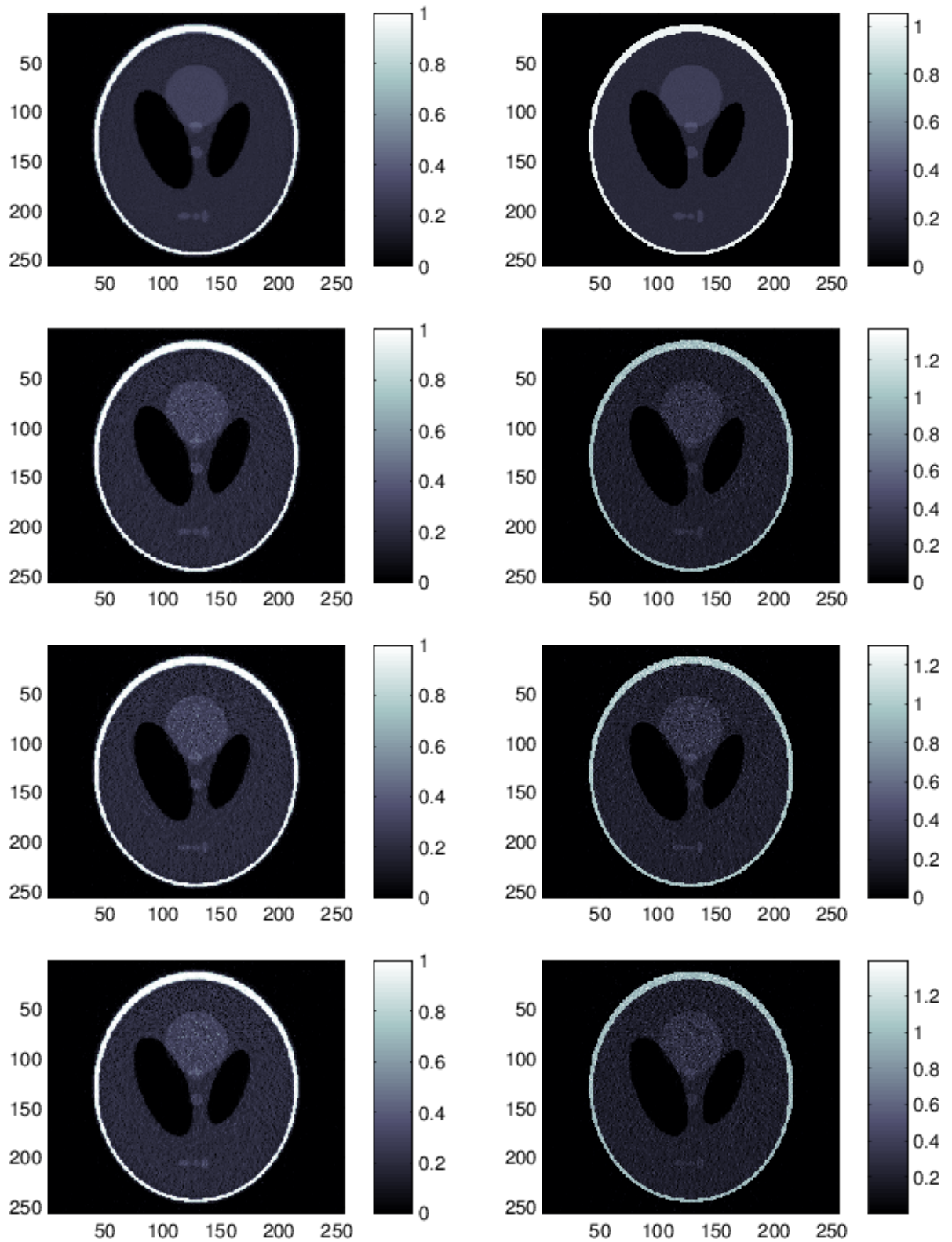
<sup>5</sup> O método do Gradiente foi parametrizado com a condição inicial  $\bar{\mu}_1^0$ , o campo de perturbações inicial  $\delta\mu_{0,01}$  e coeficiente de perturbação  $k = 0.90$



**Figura 5.20:** Convergência para distintos níveis de ruído no sinograma ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro  $\Psi(\bar{\mu}^{t+1})$  em escala logarítmica.



**Figura 5.21:** Desvio padrão médio para distintos níveis de ruído no sinograma ao longo de 1000 iterações. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro entre o fantasma e a reconstrução  $\sigma_e$ .



**Figura 5.22:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan, na primeira coluna a condição de corte foram 100 iterações, na segunda coluna 1000. Primeira fila correspondente ao sinograma S2D360-360-1 (sem ruído), segunda fila correspondente a S2D360-360-1-F500, terceira a S2D360-360-1-F300 e quarta fila a S2D360-360-1-F150.

### 5.3.5 Aspectos de implementação

Um último comentário relacionado à implementação do algoritmo deve ser feito antes de continuar com o próximo método. O custo computacional, em termos de memória RAM necessário para armazenar a matriz  $\mathbf{K}$  de  $M \times N$  elementos de dupla precisão. Para resolver os testes anteriores, seriam necessários 90 GB<sup>6</sup>, porém a matriz  $\mathbf{K}$  é esparsa, o que permite usar técnicas para armazenar só os elementos não nulos (neste caso 30891811, um 0.26 % do total de elementos), que representam 0.23 GB de dados, para um total de 0.46 GB usados para armazenar a matriz em formato CF<sup>7</sup>. Não obstante, o custo no armazenamento da matriz em formato de coordenadas quando o problema aumenta a quantidade de raios, por exemplo a geometria de amostragem *cone-beam*, resulta elevado. Por exemplo, para reconstruir a partir da projeção S3D360-360-1, se necessitariam 11796480 GB para salvar a matriz completa e 123.1 GB em formato CF.

Para contornar esta dificuldade computacional, uma alternativa *matrix-free* foi desenvolvida que não precisa armazenar a matriz  $\mathbf{K}$  em memória, denominamos esta aproximação Gradiente Topológico sem matriz (MFTG). Este enfoque calcula a sensibilidade  $\mathbf{g}\Psi = 2\mathbf{K}^T(\mathbf{p} - \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\mu}})$  com um algoritmo baseado na função usada para construir a matriz  $\mathbf{K}$  (via o método de Siddon). Neste algoritmo o produto matriz-vetor  $\mathbf{K}^T\tilde{\mathbf{p}}$  é calculado seguindo cada raio-x desde a “projeção”  $\tilde{\mathbf{p}} = 2(\mathbf{p} - \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\mu}})$  através de cada elemento de  $\mathbf{g}\Psi$  intersetado por ele até a fonte, logo

$$g\Psi_i = \sum_{\theta=\theta_a}^{\theta_b} \sum_{r=r_a}^{r_b} \delta_{\theta,r,i}\tilde{\mathbf{p}} \quad (5.3)$$

onde  $\theta$  representa o ângulo de projeção,  $r$  o detector e  $\delta_{\theta,r,i}$  é o comprimento da interseção do raio  $\ell(\theta, r)$  com o elemento  $i$  da sensibilidade (associado ao elemento  $i$  da reconstrução). Lembrando a definição da matriz  $\mathbf{K}$  (equação (4.8)), temos que  $(K^T)_{i,\ell} = l(i, \ell) = \delta_{\theta,r,i}$ , logo a equação (5.3) se pode expressar como

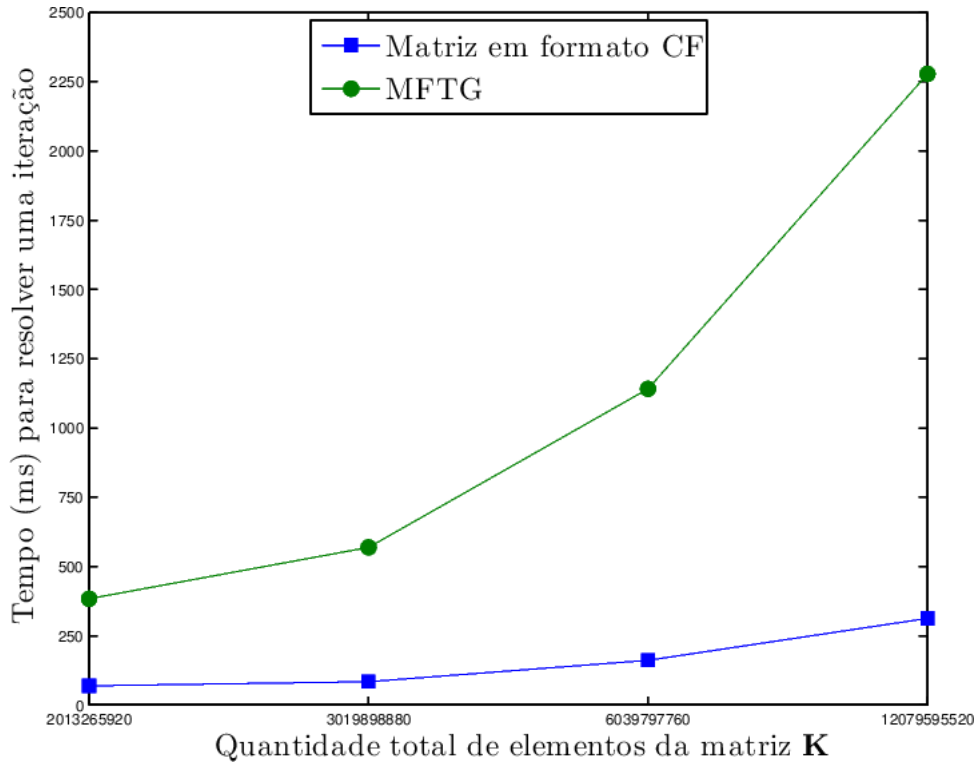
<sup>6</sup>  $M = 360 \times 512 = 184320$  raios,  $N = 256 \times 256 = 65536$  *voxels*, logo a matriz  $\mathbf{K}$  têm 12079595520 elementos de dupla precisão (8 Bytes), para um total de 90 GB.

<sup>7</sup> *Coordinate Format* é uma técnica pela qual a matriz se representa por três *arrays*, uno para os elementos da matriz, e os outros dois contém, para cada elemento, a fila e a coluna correspondentes na matriz.

$$g\Psi_i = \sum_{\theta=\theta_a}^{\theta_b} \sum_{r=r_a}^{r_b} \delta_{\theta,r,i} \tilde{\mathbf{p}} = \sum_{\ell=\ell_0}^{\ell_M} (K^T)_{i,\ell} \tilde{\mathbf{p}} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{g}\Psi = \mathbf{K}^T \tilde{\mathbf{p}} = 2\mathbf{K}^T(\mathbf{p} - \mathbf{K}\bar{\boldsymbol{\mu}})$$

Portanto, o calculo da sensibilidade via o MFTG equivale ao produto matriz-vetor, realizando exatamente as mesmas operações, o que implica em nenhum erro de arredondamento adicional. O preço que se paga por não ter que armazenar a matriz  $\mathbf{K}$  em memória é um incremento no custo computacional no calculo de  $\mathbf{g}\Psi$  igual ao custo do método de Siddon. A Figura 5.23 apresenta o tempo necessário para calcular uma iteração do método do gradiente topológico com matriz em formato CF e via *matrix-free*. A implementação sem matriz demora entre 7 e 8 vezes mais que armazenando a matriz em formato CF.



**Figura 5.23:** Tempo consumido para calcular  $\mathbf{g}\Psi$  com as implementações de matriz formato CF e MFTG. No eixo- $y$  o tempo em milissegundos, no eixo- $x$  a quantidade total de elementos da matriz  $\mathbf{K}$ , correspondente às projeções S2D180-60-3, S2D180-90-2, S2D180-180-1 e S2D360-360-1.



## 5.4 Análise de parâmetros do método variacional

O método variacional não tem nenhum parâmetro explícito que possa ser estudado de forma individual nesta seção, o que constitui sem dúvidas uma das vantagens do método. Porém, se pode estudar a qualidade da reconstrução em função do método de resolução do sistema de equações algébrico resultante (resolvedor algébrico direto ou iterativo) e de seus parâmetros. Logo, se pode avaliar o impacto na convergência que tem uma condição inicial não nula (por exemplo uma reconstrução via métodos diretos), quando métodos iterativos são usados para resolver o sistema (4.21).

### 5.4.1 Aspectos de implementação, tipos de resolvedores algébricos

Independentemente do resolvedor algébrico escolhido sempre se devem realizar operações sobre a matriz do sistema (4.21). É importante destacar o custo computacional em termos de memória RAM requerida para armazenar a matriz do sistema  $\mathbf{M}$  (cujos coeficientes são  $M_{ij}$ ), que para reconstruir uma imagem de  $n$  *voxels*, contém  $N = n^2$  coeficientes. A quantidade de elementos nulos de  $\mathbf{M}$  depende da geometria de amostragem, do número de projeções, da discretização do detector e da imagem que se deseja reconstruir. Em geral a matriz do sistema é densa porque os coeficientes  $M_{ij}$  são calculados acoplando todos os *voxels* via os raios-x, tal que

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \mathcal{R}(\Phi_j, \mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta \\ &= \sum_{l=1}^{\Theta} \sum_{k=1}^D \mathcal{R}(\Phi_j, \mathbf{r}_k, \theta_l) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}_k, \theta_l) \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (5.5)$$

onde  $D$  é a quantidade de detectores e  $\Theta$  a quantidade de ângulos de projeção. Por tanto, incluso uma representação esparsa da matriz pode ser muito custosa quando o número de projeções é considerável. Isto motiva a utilização de resolve-

dores algébricos iterativos *matrix-free* onde a matriz não requer ensamblagem em memória, porque só se utiliza para calcular o produto matriz-vetor  $\mathbf{v} = \mathbf{M}\mathbf{w}$  (onde  $\mathbf{w}$  representa a aproximação a solução na iteração atual), tal que

$$v_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} w_j \quad (5.6)$$

expandindo os coeficientes  $M_{ij}$  e reordenado os somatórios se tem

$$\begin{aligned} v_i &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{l=1}^{\Theta} \sum_{k=1}^D \mathcal{R}(\Phi_j, \mathbf{r}_k, \theta_l) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}_k, \theta_l) \right) w_j \\ &= \sum_{l=1}^{\Theta} \sum_{k=1}^D \sum_{j=1}^n \mathcal{R}(\Phi_j, \mathbf{r}_k, \theta_l) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}_k, \theta_l) w_j \end{aligned} \quad (5.7)$$

A vantagem de calcular o produto com (5.7) é que se pode usar o algoritmo que calcula a transformada  $\mathcal{R}(\Phi, \mathbf{r}, \theta)$ , neste caso o método de Siddon, para calcular a contribuição de cada raio  $\mathbf{r}_k$  sobre todos os  $v_i$  simultaneamente no termo  $\mathcal{R}(\Phi_j, \mathbf{r}_k, \theta_l) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}_k, \theta_l) w_j$ . Relembrando que dado um raio  $\mathbf{r}$ , o método de Siddon obtém uma lista com todos os *voxels* atravessados por  $\mathbf{r}$  e suas correspondentes interseções, logo basta só calcular os produtos entre os comprimentos de interseção. Seguindo esta metodologia, a complexidade computacional se mantém no mínimo (para um algoritmo *matrix-free*), porque o método de Siddon tem complexidade  $\mathcal{O}(2n)$  em lugar de  $\mathcal{O}(n^2)$  para uma imagem de dimensões  $n \times n$  (o somatório interno não calculará produtos nulos). A desvantagem é que a equação (5.7) introduz mais erros de arredondamento para calcular o produto matriz-vetor.

Para avaliar se o erro de arredondamento gera erros de reconstrução significativos, o fantasma de Shepp-Logan de  $256 \times 256$  *pixels* foi reconstruído a partir dos sinogramas de teste S2D360-360-1, S2D360-720-0.5 e S2D360-1080-0.3, utilizando um resolvidor algébrico direto<sup>8</sup> e dois resolvidores algébricos iterativos<sup>9</sup>. A Tabela

<sup>8</sup> A implementação de BLAS-LAPACK (Anderson et al., 1999) da Intel<sup>®</sup>MKL (2012) foi utilizada para resolver o sistema de equações lineares utilizando a rotina *dgels*, que resolve o sistema via fatoração *QR*.

<sup>9</sup> Foi utilizado o entorno PETSc (Satish Balay, 2012b,a, 1997) para resolver o sistema via

5.4 apresenta os correspondentes erros de reconstrução  $\sigma_e$ , o tempo total, e nos casos dos resolvedores iterativos, o tempo por iteração e o resíduo absoluto com que se alcançou a convergência (com uma tolerância relativa de convergência de  $1 \times 10^{-8}$ ). Todos os testes foram realizados de forma paralela<sup>10</sup> em um computador Intel® Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz  $\times$  8, com 56 GB de memória RAM.

Quatro observações importantes devem ser feitas a partir dos resultados da Tabela 5.4. Em primeiro lugar, confirma-se a hipótese do incremento no erro de arredondamento, refletido em diferenças nos  $\sigma_e$  e nos resíduos nos métodos GMRES e CG; Como estes erros são insignificantes em relação aos erros de reconstrução, pode-se concluir que a alternativa *matrix-free* é uma opção válida (para ambos resolvedores).

O segundo resultado relaciona o tamanho do sinograma com o custo computacional de realizar uma iteração, quanto maior o sinograma, mais tempo é necessário para realizar uma iteração usando a alternativa *matrix-free*, enquanto que o tempo por iteração se mantém constante quando a matriz se monta em memória (unicamente incrementa-se o tempo de montagem da matriz).

O terceiro resultado, e mais relevante, é a exatidão do método variacional na reconstrução quando o resolvidor direto é usado, inclusive quando o sinograma conta com 360 projeções. Tendo em consideração que em um procedimento de tomografia computadorizada convencional o número de projeções usado para reconstruir um *slice* é do ordem das 1000 (Hsieh, 2009), com uma terceira parte das projeções (implicando uma redução teórica de um terço da dose de radiação), o método variacional pode reconstruir com uma precisão quase exata ( $\sigma_e \approx 3 \times 10^{-11}$  e  $\sigma_{Ref} \approx 1 \times 10^{-09}$ ), enquanto que nas mesmas condições os métodos de FBP e TG obtém  $\sigma_e \approx 4 \times 10^{-02}$  e  $\sigma_e \approx 9 \times 10^{-03}$ , com  $\sigma_{Ref} = 1$  e  $\sigma_{Ref} \approx 0.2$  respectivamente. Este resultado demonstra a potencialidade e robustez do enfoque variacional frente aos outros paradigmas de reconstrução.

---

o método de Mínimo RESÍduo Geral (GMRES), com *restart* de 30 (PETSc *default*), usando ortogonalização de Gram-Schmidt modificada, e o método de Gradiente Conjugados (CG).

<sup>10</sup> O resolvidor direto utiliza paralelismo via OpenMP na fatoração *QR*, enquanto PETSc utiliza MPI na resolução via métodos iterativos.

O quarto resultado é a notável vantagem do método CG frente ao GMRES, isto deve-se a que o primeiro toma proveito da simetria da matriz do sistema. Para ter certeza de que CG seja a melhor alternativa para resolver o sistema de forma iterativa, estudou-se o comportamento do GMRES frente a diferentes número de *restart*, e ambos resolvidores usando diferentes preconditionadores.

	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Tempo	Tempo/it.	# it	Resíduo
S2D360-360-1						
Método direto	$3.0716 \times 10^{-11}$	$1 \times 10^{-09}$	1h 37m			
GMRES	$4.9115 \times 10^{-04}$	0.0117	3h 20m	5.6s	2101	$7.702 \times 10^{-03}$
GMRES (MF)	$4.9247 \times 10^{-04}$	0.0117	1h 35m	2.7s	2092	$7.700 \times 10^{-03}$
CG	$1.0629 \times 10^{-04}$	0.0025	1h 41m	5.4s	1087	$7.197 \times 10^{-03}$
CG (MF)	$1.0707 \times 10^{-04}$	0.0025	0h 47m	2.6s	1084	$7.560 \times 10^{-03}$
S2D360-720-0.5						
Método direto	$1.8597 \times 10^{-11}$	$4 \times 10^{-10}$	1h 43m			
GMRES	$1.9311 \times 10^{-04}$	0.0049	1h 29m	5.6s	893	$1.539 \times 10^{-02}$
GMRES (MF)	$1.9259 \times 10^{-04}$	0.0049	1h 21m	5.4s	903	$1.540 \times 10^{-02}$
CG	$4.9079 \times 10^{-05}$	0.0012	1h 05m	5.4s	658	$1.472 \times 10^{-02}$
CG (MF)	$4.9702 \times 10^{-05}$	0.0012	0h 56m	5.2s	653	$1.432 \times 10^{-02}$
S2D360-1080-0.3						
Método direto	$1.7588 \times 10^{-11}$	$4 \times 10^{-10}$	1h 49m			
GMRES	$1.7572 \times 10^{-04}$	0.0045	1h 27m	5.6s	836	$2.311 \times 10^{-02}$
GMRES (MF)	$1.7588 \times 10^{-04}$	0.0045	1h 53m	8.1s	835	$2.309 \times 10^{-02}$
CG	$5.2993 \times 10^{-05}$	0.0013	1h 03m	5.4s	601	$2.307 \times 10^{-02}$
CG (MF)	$4.9153 \times 10^{-05}$	0.0012	1h 21m	7.8s	625	$2.129 \times 10^{-02}$

**Tabela 5.4:** Comparação entre resolvidores algébricos para sinogramas de diferentes tamanhos. Os testes foram realizados em um computador Intel<sup>®</sup> Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz  $\times$  8, com 56 GB de memória RAM.

Para estudar se o impacto do número de *restart*, realizaram-se quatro re-

construções do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1, para números de *restart* de 30 (*default*), 70, 150 e 200. O algoritmo se comportou de forma idêntica para todos os casos. Portanto, este parâmetro não impacta na resolução do sistema resultante do método variacional.

#### 5.4.2 Uso de preconditionadores

O próximo teste consiste em avaliar o efeito de diferentes preconditionadores<sup>11</sup>, a Tabela 5.5 apresenta os resultados de reconstruir o fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 com os métodos<sup>12</sup> de CG e GMRES. Os preconditionadores avaliados são um subconjunto dos proporcionados por PETSc, diferenciados por ter suporte para operar sobre matrizes densas de forma paralela. Em todos os casos uso-se como sub-preconditionador ILU(1)<sup>13</sup>.

Da Tabela 5.5, pode-se concluir que os preconditionadores avaliados não oferecem uma melhoria custo/benefício suficiente como para incorporá-los na resolução do sistema, embora o preconditionador `jacobi` melhore o número de iterações sem incrementar significativamente o custo de cada iteração, a implementação do preconditionador não permite usá-lo em conjunto com a versão *matrix-free* dos métodos iterativos. Nos testes sucessivos do método variacional, nenhum preconditionador será utilizado.

---

<sup>11</sup> PETSc permite usar dois tipos de preconditionadores, um preconditionador global, que opera sobre a matriz simbólica do sistema, e o chamado sub-preconditionador usado quando o sistema resolve-se de forma paralela particionando a matriz em blocos, e opera sobre cada um deles.

<sup>12</sup> As condições de corte dos algoritmos iterativos foram:

- Atender uma tolerância relativa de  $10^{-8}$ .
- Chegar a um número de iterações máximo igual ao caso sem preconditionador (1087 para CG, ou 2101 para GMRES).
- Tempo de resolução muito elevado em relação ao caso sem preconditionadores.

<sup>13</sup> *Incomplete LU(n)* é uma fatoração LU incompleta de banda  $n$

Precond.	Método	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Tempo	Tempo/it.	# it	Convergiu
none	GMRES	$4.9115 \times 10^{-04}$	0.0117	3h 20m	5.6s	2101	Sim
	CG	$1.0629 \times 10^{-04}$	0.0025	1h 41m	5.4s	1087	Sim
jacobi	GMRES	$4.9115 \times 10^{-04}$	0.0117	3h 19m	5.6s	2096	Sim
	CG	$1.1260 \times 10^{-04}$	0.0026	1h 38m	5.4s	1067	Sim
mg	GMRES	$4.5703 \times 10^{+03}$	109427.7	1h 38m	11.2s	510	Sim
	CG	$1.0582 \times 10^{-04}$	0.0025	3h 17m	10.7s	1087	Não
mat	GMRES	$2.5844 \times 10^{-02}$	0.6187	6h 32m	11.1s	2101	Não
	CG	$1.9913 \times 10^{-02}$	0.4767	3h 18m	10.8s	1087	Não

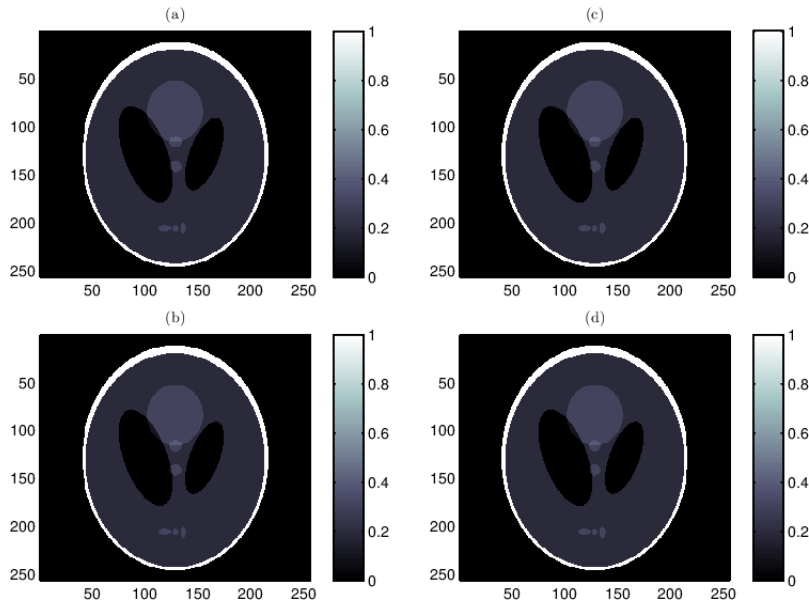
**Tabela 5.5:** Comparação entre GMRES e CG usando diferentes preconditionadores globais, e ILU(1) como sub-precondicionador. Os testes foram realizados em um computador Intel<sup>®</sup> Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz  $\times$  8, com 56 GB de memória RAM.

### 5.4.3 Impacto da condição inicial

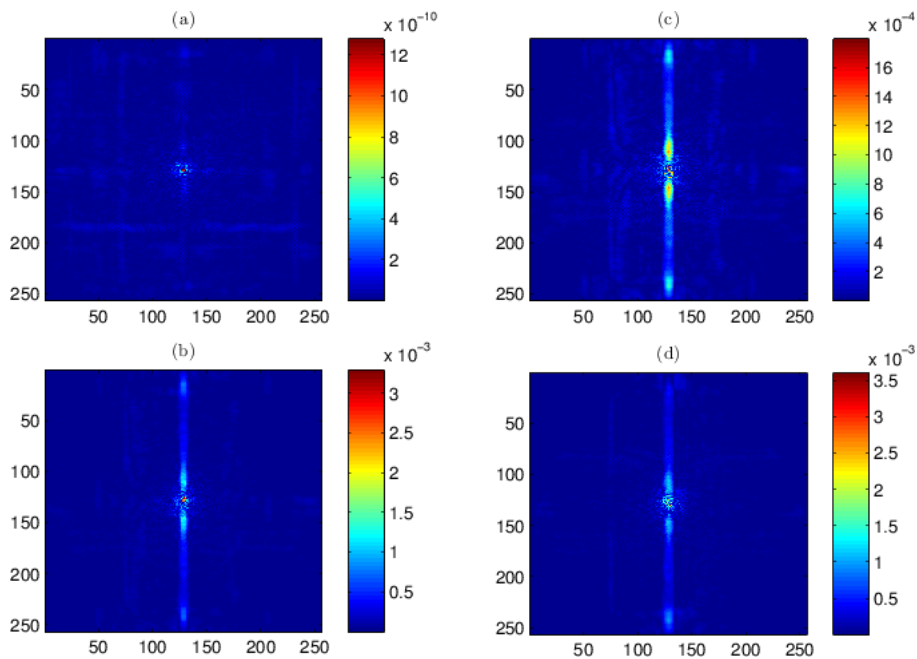
Outro estudo que se pode realizar quando métodos iterativos são usados na resolução do sistema de equações é o uso de uma condição inicial não nula. Para avaliar o comportamento do método perante diferentes condições iniciais se usaram as reconstruções geradas pelos métodos de *Filtered Back-Projection*<sup>14</sup> (FBP-RL) e do Gradiente Topológico<sup>15</sup> (TG), para reconstruir o fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1. As Figuras 5.24 - 5.25 apresentam as reconstruções e diferenças absolutas obtidas usando o método direto e CG (*matrix-free*) com condição inicial nula, FBP-RL e TG. Nelas se pode apreciar a qualidade de reconstrução obtida usando o método direto (diferenças absolutas do ordem de  $1 \times 10^{-09}$ ), embora as reconstruções usando CG tenham diferenças absolutas do ordem de  $3 \times 10^{-03}$ , a qualidade das reconstruções são muito boas.

<sup>14</sup> Com o filtro de Ram-Lak, que para projeções sem ruído é a melhor opção.

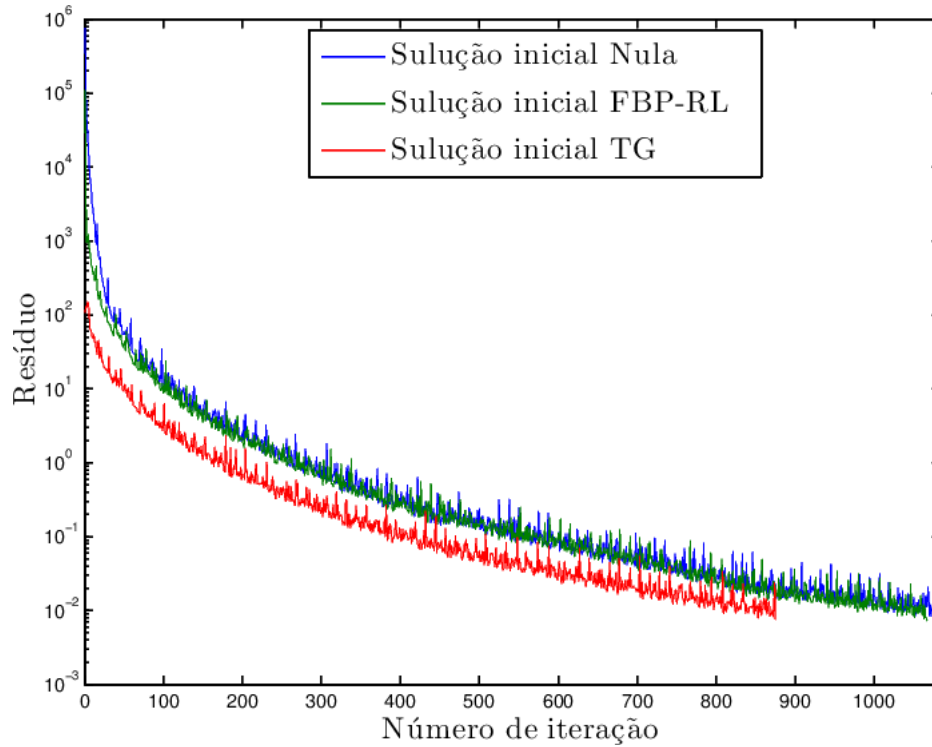
<sup>15</sup> A configuração usada na reconstrução foi:  $\bar{\mu}_{RL}^0$ ,  $\delta\mu_{0.01}$ ,  $k = 0.9$  e 1000 iterações.



**Figura 5.24:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1. (a) Método direto, (b) CG (*matrix-free*) com condição inicial dada pelo *Filtered Back-Projection*, (c) CG (*matrix-free*) com condição inicial dada pelo Gradiente Topológico, (d) CG (*matrix-free*) com condição inicial nula.



**Figura 5.25:** Diferença absoluta entre as reconstruções e o fantasma. (a) Método direto, (b) CG (*matrix-free*) com condição inicial dada pelo *Filtered Back-Projection*, (c) CG (*matrix-free*) com condição inicial dada pelo Gradiente Topológico, (d) CG (*matrix-free*) com condição inicial nula.



**Figura 5.26:** Evolução do resíduo do método CG para diferentes condições iniciais.

A Figura 5.26 apresenta a evolução do resíduo no CG (*matrix-free*)<sup>16</sup> para as reconstruções usando diferentes condições iniciais. Uma observação e uma hipótese podem ser feitas a partir desta figura. A primeira é que o método resulta sensível a condição inicial, como é de esperar em um resolvidor iterativo, o que significa que o enfoque variacional pode ser utilizado para refinar uma solução aproximada obtida com qualquer outro método. A hipótese surge de observar o ordem do resíduo das condições iniciais:  $7 \times 10^{+05}$  para a solução nula,  $1 \times 10^{+05}$  para a solução do FBP-RL e  $1 \times 10^{+02}$  para a solução do TG, é a seguinte:

*É possível obter soluções aceitáveis (em termos do erro de reconstrução  $\sigma_e$ ), atendendo uma tolerância absoluta no resíduo do CG, menor que  $7.56 \times 10^{-03}$  (correspondente ao resíduo com que o método com condição inicial nula atende uma tolerância relativa de  $1 \times 10^{-08}$ )*

Para avaliar esta hipótese, foram realizadas sete reconstruções usando como condição de corte do método CG (*matrix-free*) diferentes tolerâncias absolutas no

<sup>16</sup> A condição de corte foi atender uma tolerância absoluta de  $7.56 \times 10^{-03}$  correspondente ao resíduo com que o método com condição inicial nula atende uma tolerância relativa de  $1 \times 10^{-08}$



resíduo, com condição inicial nula. A Tabela 5.6 apresenta os resultados obtidos, e as reconstruções são apresentadas na Figura 5.27. Considerando que o método FBP-RL<sup>17</sup> consegue um erro  $\sigma_e = 4.1765 \times 10^{-02}$  ( $\sigma_{Ref} = 1$ ) e o TG<sup>18</sup> um de  $\sigma_e = 8.9882 \times 10^{-03}$  ( $\sigma_{Ref} = 0.2152$ ), para obter uma reconstrução melhor com o método variacional, se pode cortar com uma tolerância absoluta de  $1 \times 10^{+01}$ , consumindo 106 iterações. Portanto, confirma-se a hipótese.

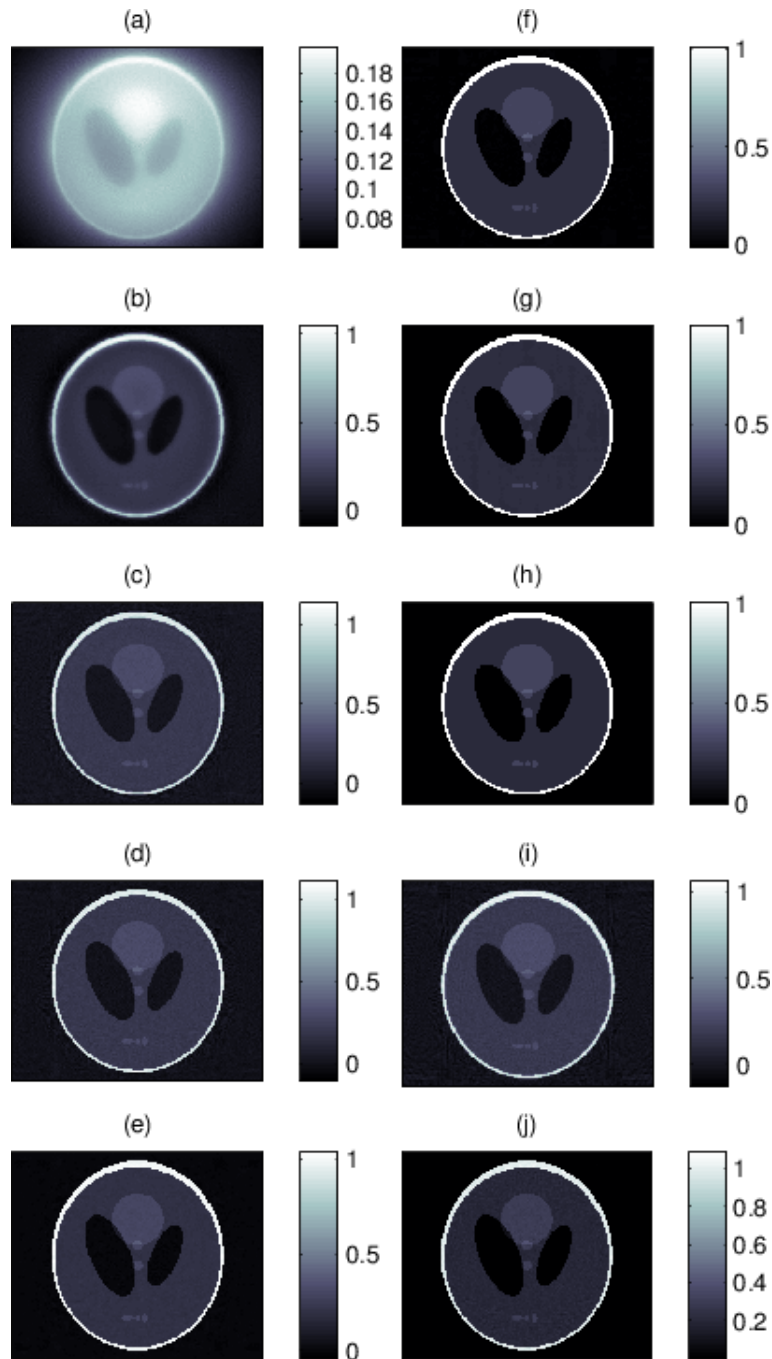
Este teste serve também para caracterizar a evolução da solução durante o processo de resolução iterativa do sistema de equações 4.21. A Figura 5.27 ilustra como as primeiras soluções são aproximações “suavizadas”, e como o método iterativo refina iteração por iteração as bordas e os detalhes da imagem. Este comportamento será de importância no entendimento da resposta do método ante projeções corruptas (Seção 5.4.4.3).

Tol. Abs.	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Tempo	# it
$1 \times 10^{+05}$	$1.9507 \times 10^{-01}$	4.6706	00m 04s	1
$1 \times 10^{+04}$	$7.3129 \times 10^{-02}$	1.7509	00m 17s	6
$1 \times 10^{+03}$	$3.5025 \times 10^{-02}$	0.8386	00m 38s	14
$1 \times 10^{+02}$	$2.2735 \times 10^{-02}$	0.5443	01m 29s	33
<b><math>1 \times 10^{+01}</math></b>	<b><math>7.9834 \times 10^{-03}</math></b>	<b>0.1911</b>	<b>04m 43s</b>	<b>106</b>
$1 \times 10^{+00}$	$2.0047 \times 10^{-03}$	0.0479	11m 28s	259
$1 \times 10^{-01}$	$5.0371 \times 10^{-04}$	0.0120	23m 47s	538
$1 \times 10^{-02}$	$1.2497 \times 10^{-04}$	0.0029	44m 54s	1016

**Tabela 5.6:** Comparação entre reconstruções usando CG para diferentes tolerâncias absolutas no resíduo.

<sup>17</sup> Com o filtro de Ram-Lak, que para projeções sem ruído é a melhor opção.

<sup>18</sup> A configuração usada na reconstrução foi:  $\bar{\mu}_{RL}^0$ ,  $\delta\mu_{0.01}$ ,  $k = 0.9$  e 1000 iterações.



**Figura 5.27:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 usando CG (*matrix-free*) com diferentes tolerância absolutas como condição de corte, em comparação com os outros métodos. (a) Tol. Abs.  $1 \times 10^{+05}$ , (b) Tol. Abs.  $1 \times 10^{+04}$ , (c) Tol. Abs.  $1 \times 10^{+03}$ , (d) Tol. Abs.  $1 \times 10^{+02}$ , (e) Tol. Abs.  $1 \times 10^{+01}$ , (f) Tol. Abs.  $1 \times 10^{+00}$ , (g) Tol. Abs.  $1 \times 10^{-01}$ , (h) Tol. Abs.  $1 \times 10^{-02}$ , (i) FBP-RL, (j) TG.

#### 5.4.4 Sensibilidade a perturbações nas projeções

Existem diferentes tipos de perturbações do sinograma que podem afetar a reconstrução, como por exemplo: conjunto de detectores estragados (que geram falta de informação em uma faixa específica do sinograma); tamanho pequeno da projeção (que gera amostras incompletas em alguma ou todas as projeções); ruído (Apêndice C); espaçamento de reconstrução, entre outros. Nesta seção se estudará o comportamento do método variacional para os últimos dois tipos de perturbações no sinograma.

É importante comentar que, como a formulação variacional apresentada na Seção 4.4 não considera nenhum tipo de perturbações nas projeções, é lógico pensar que o método ficará sensível perante elas, como apresentado a continuação.

##### 5.4.4.1 Sensibilidade ao espaçamento de reconstrução

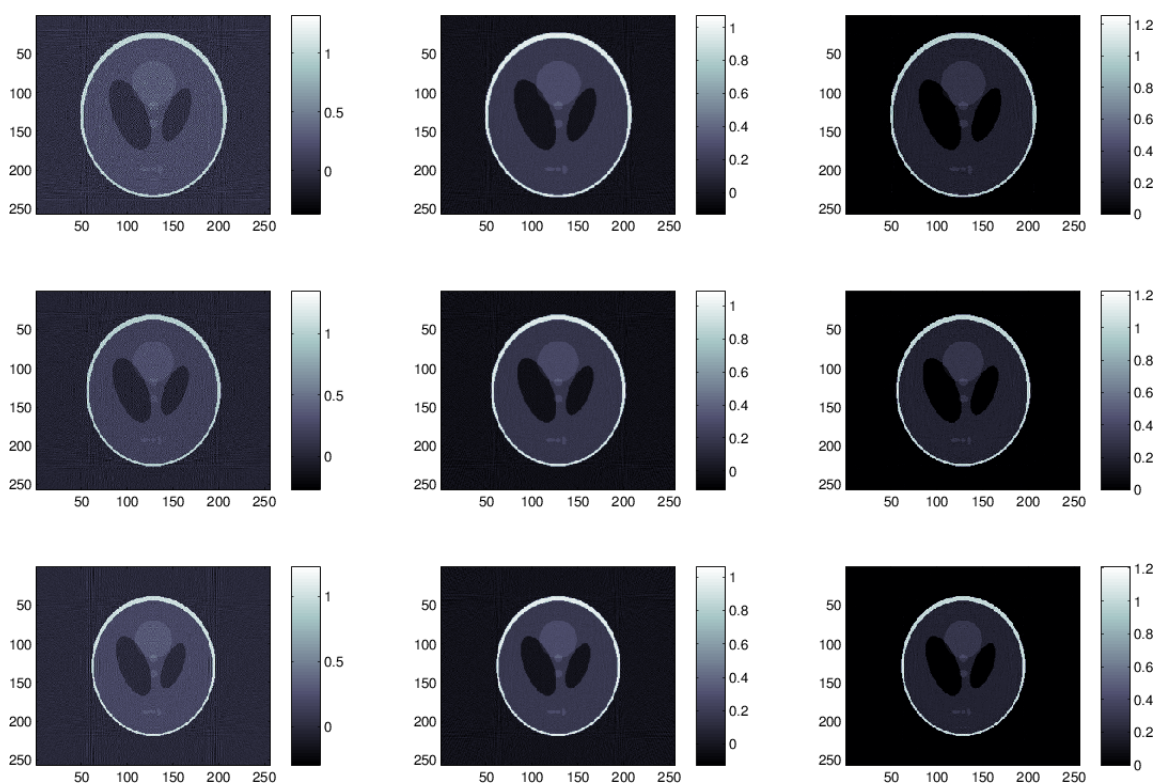
O seguinte teste consiste em usar um espaçamento do volume reconstruído diferente ao espaçamento usado na geração das projeções. Relembrando que o espaçamento do fantasma de Shepp-Logan usado na geração das projeções (definido no Apêndice B) é de  $0.5mm$ , variações do 10% na reconstrução foram utilizados. A Tabela 5.7 compara a quantidade de iterações consumidas pelo método do CG para reconstruir o fantasma a partir do sinograma S2D360-360-1, com uma tolerância absoluta de  $1 \times 10^{+01}$ . A Figura 5.28 apresenta as reconstruções resultantes do método variacional e dos métodos FBP e TG<sup>19</sup>. Nesta pode-se apreciar que embora o método não forneça a melhor qualidade de reconstrução, consegue obter as características principais do fantasma. A sensibilidade ao espaçamento de reconstrução, associa-se diretamente com a sensibilidade do método ao ruído, tópico abordado na Seção 5.4.4.2.

---

<sup>19</sup> O método de FBP foi configurado com o filtro Ram-Lak, enquanto o método do TG utiliza condição inicial  $\bar{\mu}_1^0$ , perturbação inicial  $\delta\mu_{0.01}$ , coeficiente de perturbação  $k = 0.9$ , e uma quantidade fixa de iterações de 1000

Espaçamento	Número de iteração
0.50	106
0.55	180
0.60	152
0.65	139

**Tabela 5.7:** Comparação entre reconstruções usando CG para diferentes tolerâncias absolutas no resíduo.



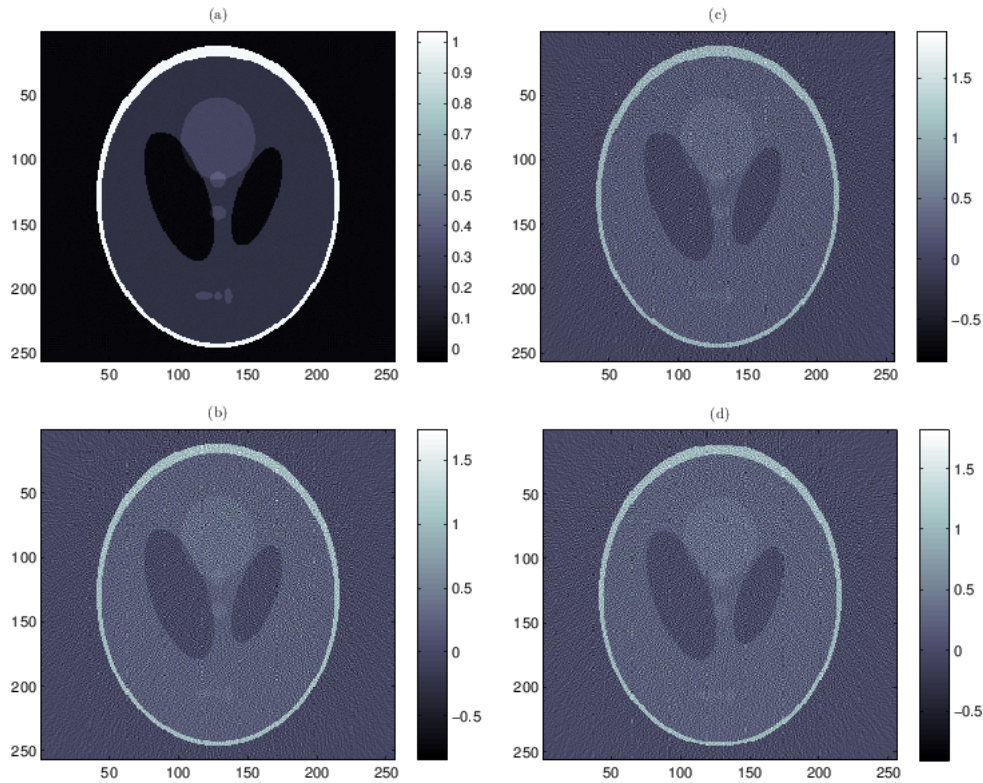
**Figura 5.28:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 usando CG *matrix-free* (primeira coluna), FBP (segunda coluna) e TG (terceira coluna) com diferentes espaçamentos na imagem reconstruída. Espaçamento de  $0.55mm$  (primeira fila),  $0.60mm$  (segunda fila),  $0.65mm$  (terceira fila).

#### 5.4.4.2 Sensibilidade ao ruído

O segundo tipo de perturbação considerado neste trabalho é a presença de ruído, embora as projeções do estudo anterior possam ser interpretadas como ruidosas para os diferentes espaçamentos de reconstrução, agora os sinogramas usados (definidos no Apêndice C.1) contêm ruído *quantum* gerado numericamente de acordo ao modelo proposto no Apêndice C. A Tabela 5.8 apresenta os resultados de reconstruir o fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 com diferentes intensidades de ruído. As respectivas reconstruções apresentam-se na Figura 5.32. A condição de corte do CG foi novamente uma tolerância absoluta de  $1 \times 10^{+01}$ . Embora o método consiga reconstruir as características principais do fantasma, o erro de reconstrução  $\sigma_e$  é maior aos obtidos com os outros métodos (apresentados na Seção 5.6).

Sinograma	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Número de Iterações
S2D360-360-1-F500	$1.8860 \times 10^{-01}$	4.5156	374
S2D360-360-1-F300	$1.9821 \times 10^{-01}$	4.7457	375
S2D360-360-1-F150	$2.1359 \times 10^{-01}$	5.1140	377

**Tabela 5.8:** Comparação entre reconstruções a partir de sinogramas com diferentes níveis de ruído.



**Figura 5.29:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1, para diferentes níveis de ruído. (a) Ideal, sem ruído, (b) ruído gerado com  $F = 500mA$ , (c) ruído gerado com  $F = 300mA$ , (d) ruído gerado com  $F = 150mA$ .

#### 5.4.4.3 Comentários

De forma geral, o comportamento do método variacional perante a corrupção das projeções, pode caracterizar-se por uma degradação da solução (incremento do erro de reconstrução) ao longo das iterações do método iterativo usado para resolver o sistema de equações (4.21). Este comportamento deve-se a que o método procura uma solução exata que seja capaz de produzir um sinograma corrupto. Lembrando que o método iterativo de resolução do sistema de equações parte de uma solução “suavizada” para logo definir as bordas nas sucessivas iterações, este processo introduz descontinuidades na reconstrução em lugares onde não deveria, só para diminuir o resíduo com o vetor de carga construído a partir de projeções corruptas. De fato, o resíduo diminui enquanto o erro de reconstrução aumenta, convergindo para uma imagem de baixa qualidade, como se pode apreciar nas Figuras 5.28 e

5.32, onde o resíduo diminuiu cinco ordens de magnitude (entre a primeira e a última iteração) para atender um resíduo absoluto de  $1 \times 10^{+01}$ .

Estes resultados indicam a necessidade de modelar a presença de ruído nas projeções dentro da formulação variacional ou incluir algum tipo de regularização para diminuir a influência da corrupção dos dados na solução do sistema. Uma possível direção para atacar este problema poderia ser exigir certa regularidade, no sentido de continuidade da solução. Uma outra direção poderia ser incluir um termo de relaxamento dependente da projeção que influencie quando os valores da projeção são altos (mais probabilidade de conter ruído).

## 5.5 Método variacional com penalização de salto

Como um primeiro intento para melhorar a robustez do método variacional, eliminando o comportamento de diminuição do resíduo e aumento do erro de reconstrução perante projeções corruptas, propõe-se incluir um termo penalizador do salto ( $[[\cdot]]$ ) da solução ( $\mu$ ) em seu esqueleto ( $E_\mu$ ). Entenda-se por  $E_\mu$  todas as curvas ou superfícies (dependendo se  $\mu \in \mathbb{R}^2$  ou  $\mu \in \mathbb{R}^3$  respectivamente) onde  $\mu$  não está definida, implicando descontinuidade. Portanto, defina-se  $[[\mu]]$  como a diferença  $(\mu^+ - \mu^-)|_{E_\mu}$  dos valores separados pela descontinuidade. Desta forma, se força que a solução seja “suave”, mas do ponto de vista matemático, nenhum tipo de regularidade adicional sobre o espaço de soluções admissíveis  $\mathcal{U}$  é exigida. Logo, o novo problema variacional fica definido como

Determine  $\mu_0 \in \mathcal{U} = \{\mu, \mu \text{ é suficientemente regular}\}$  tal que

$$\mu_0 := \arg \min_{\mu \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_\lambda(\mu) \tag{5.8}$$

$$\mathcal{F}_\lambda(\mu) = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \left[ \mathcal{R}(\mu, \mathbf{r}, \theta) - P(\mathbf{r}, \theta) \right]^2 d\ell + \frac{1}{2} \lambda \int_{E_\mu} [[\mu]]^2 dE_\mu \right\}$$

onde  $\lambda$  é um parâmetro de penalização sobre os saltos da solução, tal que  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ , no caso de  $\lambda = 0$ , temos o funcional original. Repetindo os procedimentos apresentados na Seção 4.4, podemos encontrar a equação variacional

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{F}_\lambda(\mu_0, \eta) &= \left. \frac{d\mathcal{F}_\lambda}{d\tau}(\mu_0 + \tau\eta) \right|_{\tau=0} \\ &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \left[ \mathcal{R}(\mu_0, \mathbf{r}, \theta) - P(\mathbf{r}, \theta) \right] \mathcal{R}(\eta, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r}d\theta + \lambda \int_{E_\mu} \llbracket \mu \rrbracket \llbracket \eta \rrbracket dE_\mu = 0 \\ &\quad \forall \eta \in \mathcal{U} \end{aligned} \tag{5.9}$$

A unicidade da solução, determinada pela condição  $\delta^2 \mathcal{F}_\lambda(\mu^0, \eta) = 0$  se e só se  $\eta = 0$ , também é alcançada por este novo funcional, tal que

$$\delta^2 \mathcal{F}_\lambda(\mu) = \int_{\ell_a}^{\ell_b} \left[ \mathcal{R}_\ell(\eta) \right]^2 d\ell + \lambda \int_{E_\mu} \llbracket \eta \rrbracket^2 dE_\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \eta = 0 \tag{5.10}$$

Para resolver a equação variacional (5.9) computacionalmente, se escolhe uma base finita de funções  $\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ , tal que  $\mathcal{U} \supset \mathcal{U}_N = \text{span}\{\Phi_k\}_{k=1}^N$ . Assim a solução aproximada e a perturbação neste espaço ficam definidas por

$$\begin{aligned} \mu_N^0 &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j & \alpha_j &\in \mathbb{R} \\ \eta_N &= \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_i & \beta_i &\in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{5.11}$$

Reescrevendo a equação variacional no espaço de dimensão finita  $\mathcal{U}_N$ , temos



$$\begin{aligned}
& \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \mathcal{R} \left( \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_i, \mathbf{r}, \theta \right) \mathcal{R} \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j, \mathbf{r}, \theta \right) d\mathbf{r} d\theta \quad + \\
& \lambda \int_{E_\mu} \left[ \left[ \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_i \right] \left[ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi_j \right] dE_\mu \quad = \right. \\
& \left. \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} P(\mathbf{r}, \theta) \mathcal{R} \left( \sum_{i=1}^N \beta_i \Phi_i, \mathbf{r}, \theta \right) d\mathbf{r} d\theta \quad \forall \beta_i \in \mathbb{R} \right. \quad (5.12)
\end{aligned}$$

Por linearidade dos operadores  $\mathcal{R}(\cdot)$  e  $[\cdot]$ , e condição de que a igualdade deve ser respeitada para qualquer combinação de  $\beta_i$ , pode-se reescrever a equação (5.12), como sistema de equações em  $\alpha_j$  como

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N \alpha_j \left[ \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} \mathcal{R}(\Phi_j, \mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r} d\theta + \lambda \int_{E_\mu} [\Phi_i] [\Phi_j] dE_\mu \right] = \\
& \int_{\theta_a}^{\theta_b} \int_{\mathbf{r}_c}^{\mathbf{r}_d} P(\mathbf{r}, \theta) \mathcal{R}(\Phi_i, \mathbf{r}, \theta) d\mathbf{r} d\theta \quad i = 1, \dots, N \quad (5.13)
\end{aligned}$$

O sistema de equações (5.13) pode ser escrito de forma matricial como

$$(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\boldsymbol{\mu} = \mathbf{b} \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{b}$  são os mesmos que na formulação original, e  $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_{ij}$  é uma matriz simétrica, definida como

$$\Lambda_{ij} = \begin{cases} n\lambda & \text{se } i = j, \text{ sendo } n \text{ o número de vizinhos do } \textit{voxel } i \\ -\lambda & \text{se os } \textit{voxels } i \text{ e } j \text{ são vizinhos} \\ 0 & \text{em caso contrario} \end{cases} \quad (5.15)$$

Onde a definição de vizinhança entre funções  $\Phi_k$ , para a escolha da base

(4.22), fica idêntica ao conceito de vizinhança entre *voxels* de uma imagem. Portanto, para uma imagem 2D, cada *voxel* pode ter no máximo quatro vizinhos, e no caso 3D seis. No problema discreto o esqueleto fica definido como as arestas da grede de *pixels* em 2D, e como os planos da grede de *voxels* em 3D, em ambos casos excetuando as bordas da imagem.

Desta forma, o parâmetro de penalização do salto  $\lambda$  é o novo e único parâmetro do método variacional. Se  $\lambda = 0$ , obtêm-se o funcional original, e quanto maior seja  $\lambda$ , mas “suave” será a solução. De um ponto de vista matemático, se  $\lambda \rightarrow \infty$ , a restrição força que o salto seja nulo no esqueleto  $E_\mu$ , implicando a continuidade da solução  $\mu$ . Do ponto de vista prático, a solução obtida tende a difundir as bordas da imagem. Isto acarreta um *trade-off* entre a definição das bordas verdadeiras da imagem reconstruída, e os artefatos originados pelos diferentes tipos de corrupção das projeções, portanto um estudo do impacto de  $\lambda$  na reconstrução deve ser feito. As Figuras 5.30 e 5.31 apresentam o comportamento do resíduo do método de CG e do erro de reconstrução  $\sigma_e$  para distintos valores de  $\lambda$ , na reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir dos sinogramas S2D360-360-1 e S2D360-360-1-F500.

Os resultados obtidos via o parâmetro de penalização, permitem afirmar que a influência na reconstrução de  $\lambda$  é a desejada, sendo que a convergência do resíduo do método iterativo se vê acompanhada por uma convergência do erro de reconstrução. Em geral, quanto maior seja  $\lambda$ , a convergência é atendida mais rapidamente, se evita o incremento do  $\sigma_e$  e este converge inclusive quando os dados estão corrompidos. Em contrapartida, valores elevados de  $\lambda$  provocam um suavizado das bordas de alguns pixels. A Figura 5.32 ilustra as reconstruções para diferentes  $\lambda$  e as contrasta com as reconstruções via FBP<sup>20</sup> e TG<sup>21</sup>. Na Tabela 5.9 são fornecidos o número de iterações e erros de reconstrução para cada caso. Destes dados, pode-se observar que, embora a penalização de salto produza reconstruções

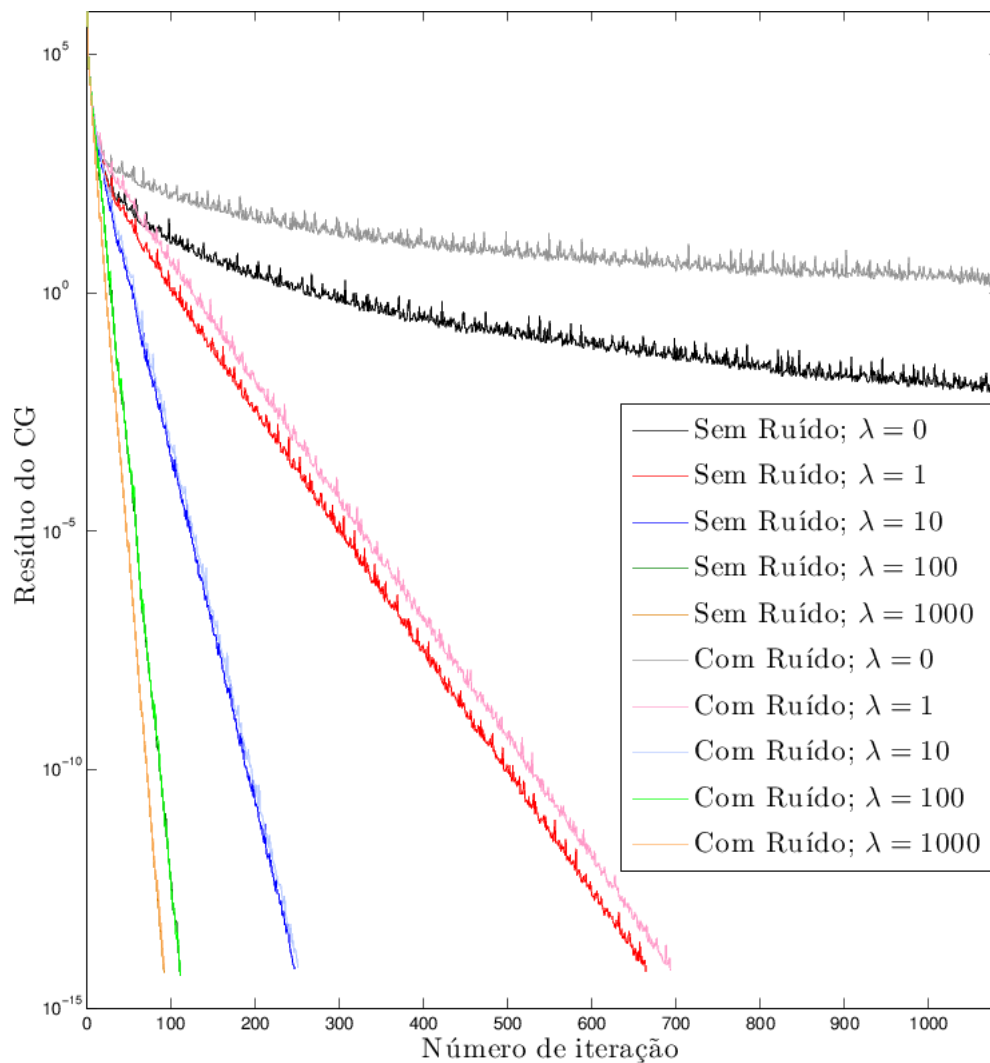
---

<sup>20</sup> Com filtro Shepp-Logan.

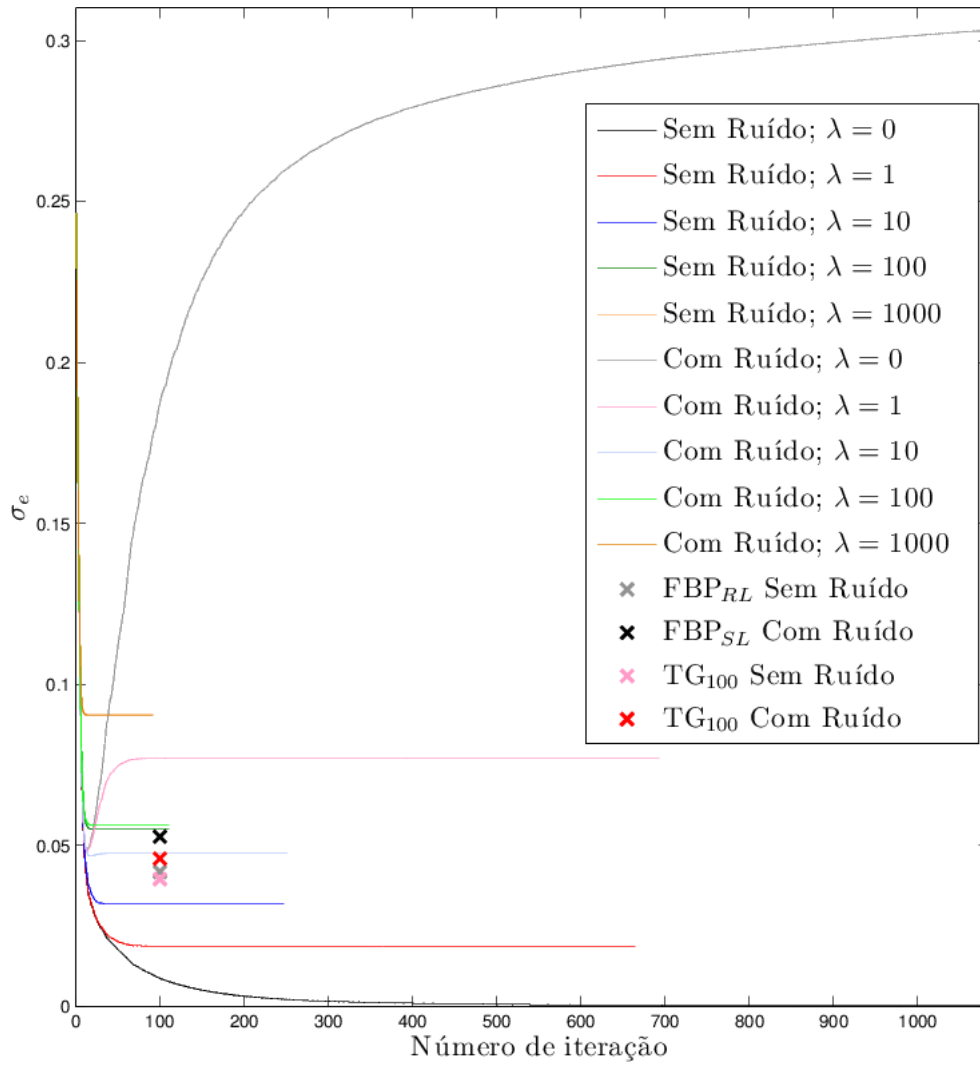
<sup>21</sup> Com condição de corte 100 iterações, condição inicial  $\bar{\mu}_1^0$ , perturbação inicial  $\delta\mu_{0,01}$  e coeficiente de reconstrução  $k = 0.9$ .

menos acuradas no caso ideal (sem ruído), perante corrupções do sinograma o método logra convergir em termos do resíduo do CG e do  $\sigma_e$ , em uma décima da quantidade de iterações que o método do Gradiente Topológico, conseguindo obter melhores reconstruções que o FBP.

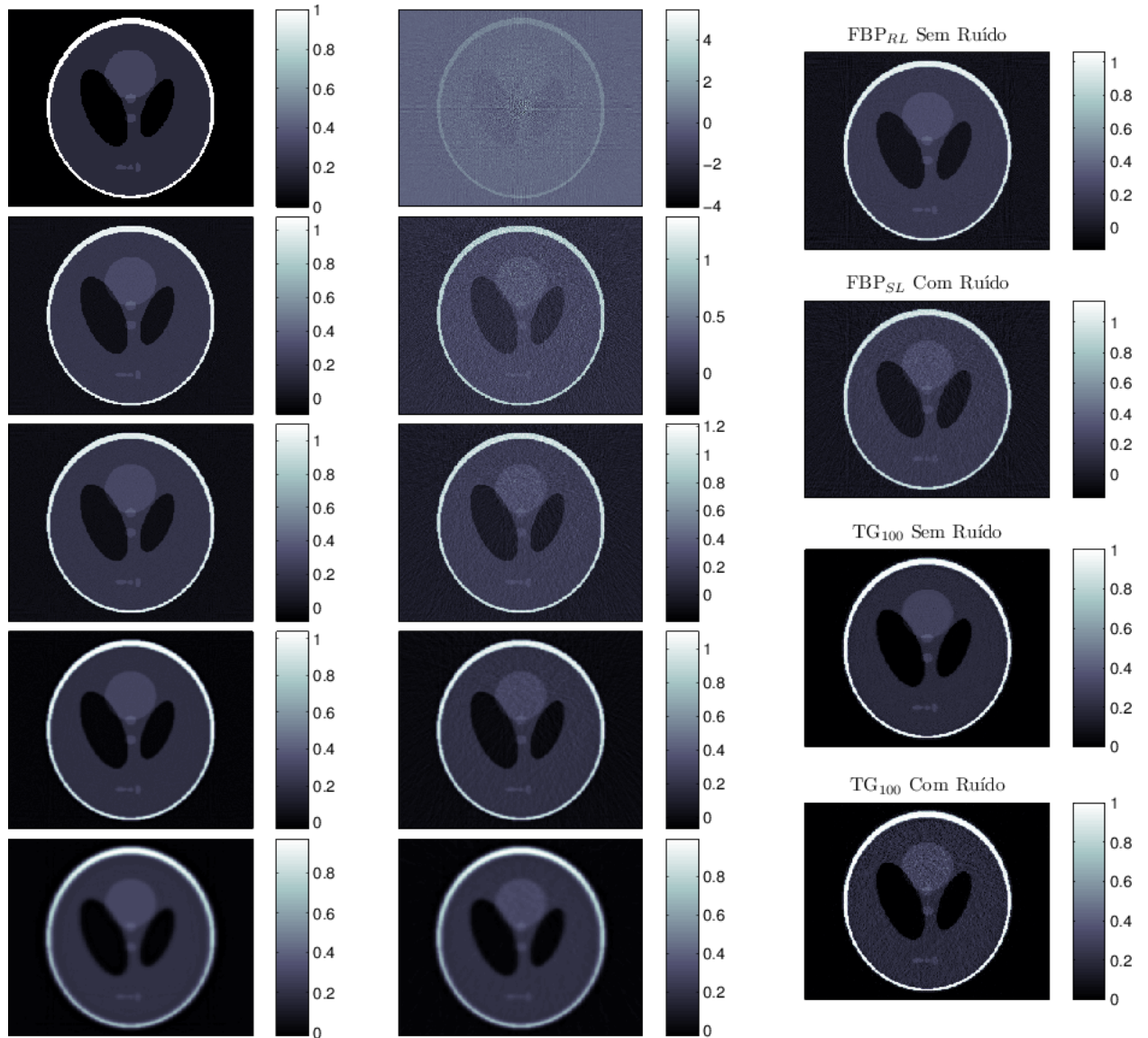
Por fim, na Figura 5.33 se ilustra como a minimização do novo funcional com penalização de salto, consegue melhorar também as reconstruções com diferentes espaçamentos, o outro tipo de corrupção nos dados apresentada na Seção 5.4.4.1.



**Figura 5.30:** Convergência para distintos valores do parâmetro  $\lambda$  na presença de ruído ( $F = 500$ ) no sinograma. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o resíduo do método de GC em escala logarítmica.



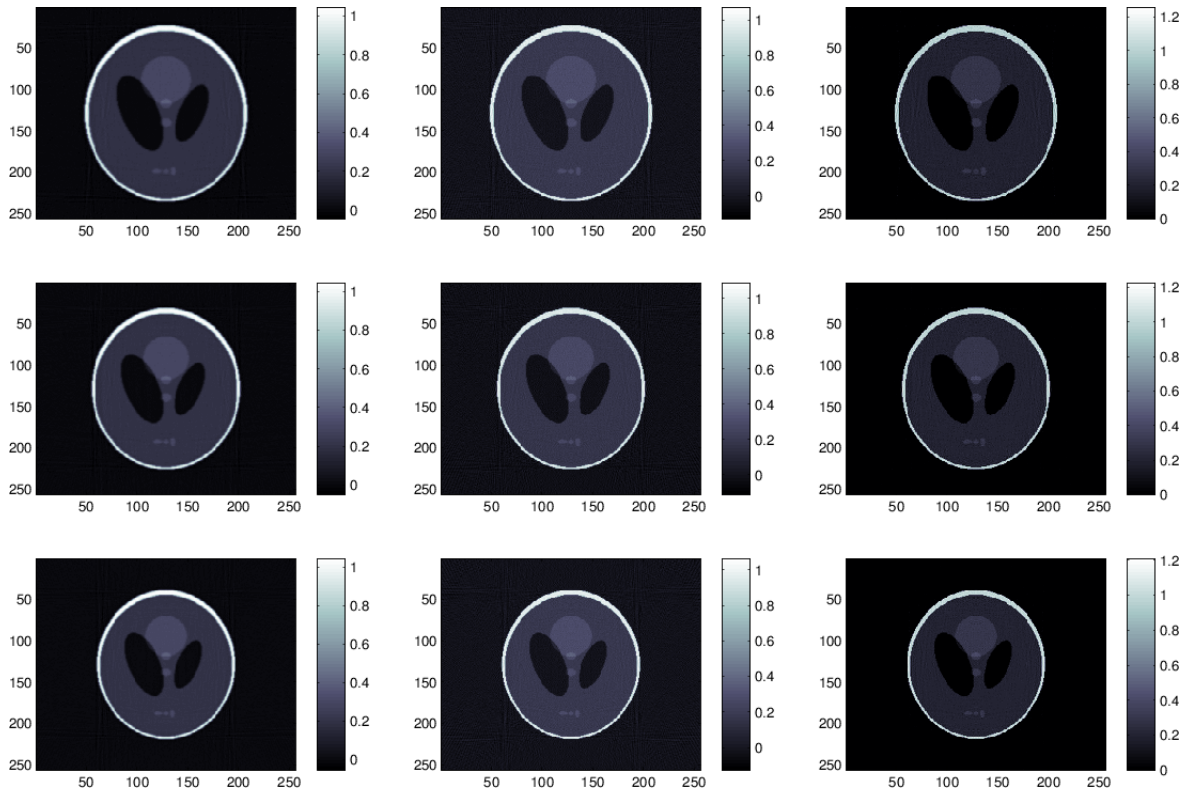
**Figura 5.31:** Desvio padrão médio para distintos valores do parâmetro  $\lambda$  na presença de ruído ( $F = 500$ ) no sinograma. No eixo- $x$  o número de iteração, no eixo- $y$  o erro entre o fantasma e a reconstrução  $\sigma_e$ .



**Figura 5.32:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 (primeira coluna) e S2D360-360-1-F500 (segunda e terceira coluna). Na primeira fila  $\lambda = 0$ , na segunda  $\lambda = 1$ , na terceira  $\lambda = 10$ , na quarta  $\lambda = 100$  e na quinta  $\lambda = 1000$ .

Reconstrução	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	# Iterações
Sinograma S2D360-360-1			
Método Variacional			
$\lambda = 0$	$1.0707 \times 10^{-04}$	0.0025	1084
$\lambda = 1$	$1.8652 \times 10^{-02}$	0.4465	663
$\lambda = 10$	$3.1884 \times 10^{-02}$	0.7634	246
$\lambda = 100$	$5.4995 \times 10^{-02}$	1.3167	110
$\lambda = 1000$	$9.0739 \times 10^{-02}$	2.1725	92
Gradiente Topológico			
	$3.9459 \times 10^{-02}$	0.9447	100
<i>Filtered Back Projection</i>			
	$4.1765 \times 10^{-02}$	1	
Sinograma S2D360-360-1-F500			
Método Variacional			
$\lambda = 0$	$3.0320 \times 10^{-01}$	5.7568	1084
$\lambda = 1$	$7.7027 \times 10^{-02}$	1.4625	692
$\lambda = 10$	$4.7479 \times 10^{-02}$	0.9014	250
$\lambda = 100$	$5.6152 \times 10^{-02}$	1.0661	110
$\lambda = 1000$	$9.0393 \times 10^{-02}$	1.7162	92
Gradiente Topológico			
	$4.5829 \times 10^{-02}$	0.8701	100
<i>Filtered Back Projection</i>			
	$5.2668 \times 10^{-02}$	1	

**Tabela 5.9:** Comparação entre reconstruções para diferentes valores de  $\lambda$ .



**Figura 5.33:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S2D360-360-1 usando: VM com penalização de salto (primeira coluna), FBP (segunda coluna) e TG (terceira coluna) com diferentes espaçamentos na imagem reconstruída. Espaçamento de  $0.55mm$  (primeira fila),  $0.60mm$  (segunda fila),  $0.65mm$  (terceira fila).

## 5.6 Comparação dos métodos de reconstrução

Nesta seção se comparam os distintos métodos para diferente número de projeções, níveis de ruído e custo computacional. A quantidade de projeções necessárias para reconstruir uma imagem é um parâmetro muito importante, porque tem uma relação direta com a quantidade de radiação à que o paciente será submetido. Como foi explicado no Capítulo 5 o ruído também pode ser relacionado com o nível de radiação via a *tube current* de geração, por isso a robustez do método frente ao ruído também é importante na diminuição de radiação desnecessária ao paciente. Historicamente os métodos analíticos baseados em *Filtered Back-Projection* têm um desempenho computacional melhor que os métodos ART, tanto em tempo

computacional como em memória necessária para armazenar as estruturas. No entanto, estes últimos têm demonstrado uma maior tolerância à falta de projeções e ao ruído (Hsieh, 2009). Somado ao crescente incremento nas capacidades computacionais, explorar alternativas aos métodos de reconstrução clássicos, que em um futuro poderão gerar imagens de maior qualidade reduzindo os níveis de radiação, em tempos aceitáveis, é de interesse tanto no contexto do diagnóstico por imagem como no contexto da modelagem do sistema cardiovascular, porque, no último caso, implica em estruturas anatômicas específicas de paciente representadas no espaço tridimensional por meio de triangulações e/ou teatralizações mais precisas.

Nas Tabelas 5.10 - 5.11 apresentam-se informações de recursos computacionais e resultados dos diferentes métodos (em 2D e 3D respectivamente). Nestes testes, os diferentes métodos foram avaliados para diferente número de projeções e níveis de ruído.

Nas reconstruções realizadas com métodos analíticos (FBP ou FDK), foi utilizado o filtro Ram-Lak no caso ideal, e o filtro de Shepp-Logan nos casos com ruído<sup>22</sup>. Os parâmetros do método do gradiente topológico (TG), em sua versão *matrix-free* foram: condição inicial  $\bar{\mu}_1^0$ , perturbação inicial  $\delta\mu_{0.01}$ , coeficiente de perturbação  $k = 0.9$ , e uma quantidade fixa de iterações<sup>23</sup> de 100. Enquanto o método variacional (VM) foi resolvido usando gradientes conjugados (CG) versão *matrix-free*, com tolerância relativa de corte  $1 \times 10^{-05}$  (ou 100 iterações máximo), e parâmetros de penalização de salto  $\lambda = 10$ . Os métodos do TG e VM não foram iniciados com a solução do FBP e FDK para obter uma comparação justa, enquanto testes iniciais indicam que quando a quantidade de projeções é muito baixa, os métodos obtêm melhores resultados com uma condição inicial “nula”, enquanto que para uma quantidade de projeções significativas a condição inicial pode melhorar significativamente os resultados, como apresentado na Seção 5.3.1

---

<sup>22</sup> Esta escolha deve-se a que estes filtros apresentaram o menor erro de reconstrução para cada caso (Seção 5.2).

<sup>23</sup> Nos testes realizados, 100 iterações se correspondem a um error relativos do ordem de  $\sim 10^{-03}$  aproximadamente.



e na Seção 5.4.3.

Como esperado, os métodos FBP e FDK superam aos outros em tempo de execução e uso recursos computacionais, entretanto, há perda de qualidade na reconstrução. Embora o método do TG obtenha sempre uma melhor reconstrução para uma baixa quantidade de projeções e todos os níveis de ruído, é preciso considerar que um alto número fixo de iterações foi usado nas reconstruções. É importante destacar que o método variacional com penalização de salto sempre fornece resultados bons em termos de erro de reconstrução, garantindo uma solução suave que tem convergido tanto para casos ideais como para ruído em poucas iterações.

No caso 3D, os erros de reconstrução do método FDK originados pelo ruído, com baixa quantidade de projeções, não sempre são suficientes para estabelecer grandes diferenças entre os diferentes sinogramas com ruído. Os efeitos dos níveis de ruído usados nestes testes podem ser apreciados melhor nas reconstruções dos método TG e VM. Para estabelecer conclusões mais fortes é necessária uma validação do modelo de ruído, provavelmente os parâmetros do modelo de geração de ruído (Apêndice C.1) deveriam ser recalibrados para que o ruído tenha uma influência maior nas projeções de diferentes *tube current*, mas para os fins comparativos deste trabalho o conjunto de sinogramas gerados tem um SNR suficientemente baixo, menor que  $30dB$  (Apêndice C.1). Neste contexto, ficou demonstrado que os métodos TV e VM conseguem uma melhora na qualidade de reconstrução, tanto para projeções poluídas com ruído como para baixa quantidade de amostras, o que permite inferir que ambos métodos permitiriam baixar as doses de radiação em estudos de tomografia baseada em radiação-X (CTA e 3DRA).

	Método	Ruído	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Tempo	Tempo/it.	# it	Memória
S2D180-060-3	FBP	Sem	$9.4600 \times 10^{-02}$	1	0.04s			0.8 MB
		F=500	$1.1300 \times 10^{-01}$	1				
		F=300	$1.1642 \times 10^{-01}$	1				
		F=150	$1.2053 \times 10^{-01}$	1				
	TG	Sem	$4.7823 \times 10^{-02}$	0.6233	15.1s	0.151s	100	2.4 MB
		F=500	$5.8971 \times 10^{-02}$	0.5218				
		F=300	$6.1642 \times 10^{-02}$	0.5249				
		F=150	$6.3737 \times 10^{-02}$	0.5288				
	VM	Sem	$6.7426 \times 10^{-02}$	0.7127	13.3s	0.496s	27	7.9 MB
		F=500	$7.1365 \times 10^{-02}$	0.6315	13.8		28	
		F=300	$7.2230 \times 10^{-02}$	0.6204	12.9		26	
		F=150	$7.3137 \times 10^{-02}$	0.6067				
S2D180-090-2	FBP	Sem	$7.2748 \times 10^{-02}$	1	0.05s			0.9 MB
		F=500	$8.9615 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$9.3097 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$9.6151 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$4.5386 \times 10^{-02}$	0.6238	22.9s	0.229	100	2.7 MB
		F=500	$5.7326 \times 10^{-02}$	0.6396				
		F=300	$6.0139 \times 10^{-02}$	0.6459				
		F=150	$6.2082 \times 10^{-02}$	0.6456				
	VM	Sem	$5.5381 \times 10^{-02}$	0.7612	24.1s	0.732s	33	8.9 MB
		F=500	$6.1663 \times 10^{-02}$	0.6880	24.9s		34	
		F=300	$6.3010 \times 10^{-02}$	0.6768				
		F=150	$6.4017 \times 10^{-02}$	0.6657				
S2D180-180-1	FBP	Sem	$5.7932 \times 10^{-02}$	1	0.07s			1.3 MB
		F=500	$7.1320 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$7.3059 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$7.5391 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$4.0596 \times 10^{-02}$	0.7007	43s	0.430s	100	3.4 MB
		F=500	$5.1498 \times 10^{-02}$	0.7220				
		F=300	$5.3078 \times 10^{-02}$	0.7265				
		F=150	$5.5101 \times 10^{-02}$	0.7308				
	VM	Sem	$4.3589 \times 10^{-02}$	0.7524	67.3s	1.432s	47	11.7 MB
		F=500	$5.5281 \times 10^{-02}$	0.7751				
		F=300	$5.7082 \times 10^{-02}$	0.7813				
		F=150	$5.9055 \times 10^{-02}$	0.7833				

	Método	Ruído	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Tempo	Tempo/it.	# it	Memória
S2D360-180-2	FBP	Sem	$4.9932 \times 10^{-02}$	1	0.07s			1.3 MB
		F=500	$6.4392 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$6.6142 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$6.8420 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$4.2743 \times 10^{-02}$	0.8560	43s	0.430s	100	3.4 MB
		F=500	$5.1323 \times 10^{-02}$	0.7970				
		F=300	$5.2683 \times 10^{-02}$	0.7965				
		F=150	$5.4446 \times 10^{-02}$	0.7957				
	VM	Sem	$4.2404 \times 10^{-02}$	0.8492	45.8s		32	11.7 MB
		F=500	$5.3530 \times 10^{-02}$	0.8313	50.1s	1.432s	35	
		F=300	$5.5286 \times 10^{-02}$	0.8358	52.9		37	
		F=150	$5.6749 \times 10^{-02}$	0.8294				
S2D360-360-1	FBP	Sem	$4.1765 \times 10^{-02}$	1	0.09s			1.9 MB
		F=500	$5.2668 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$5.3947 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$5.5309 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$3.9459 \times 10^{-02}$	0.9447	78.9s	0.789s	100	4.8 MB
		F=500	$4.5829 \times 10^{-02}$	0.8701				
		F=300	$4.6246 \times 10^{-02}$	0.8572				
		F=150	$4.7363 \times 10^{-02}$	0.8563				
	VM	Sem	$3.1888 \times 10^{-02}$	0.7635	96.1s		36	17.25 MB
		F=500	$4.7469 \times 10^{-02}$	0.9012	112s	2.667s	42	
		F=300	$4.9391 \times 10^{-02}$	0.9155	110s		41	
		F=150	$5.1727 \times 10^{-02}$	0.9352				

**Tabela 5.10:** Comparação entre os métodos de reconstrução em 2D, para diferentes sinogramas e graus de ruído. Os testes foram realizados em um computador Intel<sup>®</sup> Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz  $\times$  8, com 56 GB de memória RAM.

	Método	Ruído	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Tempo	Tempo/it.	# it	Memória
S3D180-060-3	FDK	Sem	$7.7257 \times 10^{-02}$	1	11.69s			0.26 GB
		F=500	$8.5642 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$7.6006 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$7.7132 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$3.9596 \times 10^{-02}$	0.5125	01h 20m	36.2s	100	0.7 GB
		F=500	$4.8156 \times 10^{-02}$	0.5622				
		F=300	$4.9531 \times 10^{-02}$	0.6516				
		F=150	$5.1438 \times 10^{-02}$	0.6668				
	VM	Sem	$5.6081 \times 10^{-02}$	0.7259	03h 37m	130.4s	100	2.5 GB
		F=500	$5.7824 \times 10^{-02}$	0.6751				
		F=300	$5.8117 \times 10^{-02}$	0.7534				
		F=150	$5.8520 \times 10^{-02}$	0.7586				
S3D180-090-2	FDK	Sem	$6.2931 \times 10^{-02}$	1	18.66s			0.3 GB
		F=500	$7.0849 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$6.5605 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$6.6459 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$3.7242 \times 10^{-02}$	0.5917	01h 30m	54.23s	100	0.9 GB
		F=500	$4.6440 \times 10^{-02}$	0.6554				
		F=300	$4.7895 \times 10^{-02}$	0.7300				
		F=150	$4.9782 \times 10^{-02}$	0.7490				
	VM	Sem	$4.7198 \times 10^{-02}$	0.7499	05h 24m	194.5s	100	2.91 GB
		F=500	$5.0062 \times 10^{-02}$	0.7066				
		F=300	$5.0527 \times 10^{-02}$	0.7701				
		F=150	$5.1122 \times 10^{-02}$	0.7692				
S3D180-180-1	FDK	Sem	$5.4286 \times 10^{-02}$	1	41.6s			0.48 GB
		F=500	$6.1037 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$6.0413 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$6.0874 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$3.4045 \times 10^{-02}$	0.6271	3h 00m	108.4s	100	1.2 GB
		F=500	$4.2845 \times 10^{-02}$	0.7019				
		F=300	$4.4024 \times 10^{-02}$	0.7287				
		F=150	$4.5557 \times 10^{-02}$	0.7483				
	VM	Sem	$3.8771 \times 10^{-02}$	0.7141	10h 46m	387.6s	100	4.31 GB
		F=500	$4.4633 \times 10^{-02}$	0.7312				
		F=300	$4.5433 \times 10^{-02}$	0.7521				
		F=150	$4.6476 \times 10^{-02}$	0.7634				

	Método	Ruído	$\sigma_e$	$\sigma_{Ref}$	Tempo	Tempo/it.	# it	Memória
S3D360-180-2	FDK	Sem	$4.2333 \times 10^{-02}$	1	41.6s			0.48 GB
		F=500	$5.0142 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$4.9004 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$4.9575 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$3.3566 \times 10^{-02}$	0.7929	3h 00m	108.3s	100	1.2 GB
		F=500	$4.1925 \times 10^{-02}$	0.8361				
		F=300	$4.2851 \times 10^{-02}$	0.8744				
		F=150	$4.4513 \times 10^{-02}$	0.8978				
	VM	Sem	$3.6073 \times 10^{-02}$	0.8521	08h 04m	387.6s	80	4.31 GB
		F=500	$4.2031 \times 10^{-02}$	0.8382	08h 36m			
		F=300	$4.2816 \times 10^{-02}$	0.8737	08h 36m			
		F=150	$4.3909 \times 10^{-02}$	0.8857	08h 36m			
S3D360-360-1	FDK	Sem	$3.6692 \times 10^{-02}$	1	84.9s			0.83 GB
		F=500	$4.2788 \times 10^{-02}$	1				
		F=300	$4.5607 \times 10^{-02}$	1				
		F=150	$4.5905 \times 10^{-02}$	1				
	TG	Sem	$3.1879 \times 10^{-02}$	0.8688	05h 59m	215.9s	100	1.9 GB
		F=500	$3.7346 \times 10^{-02}$	0.8728				
		F=300	$3.8113 \times 10^{-02}$	0.8356				
		F=150	$3.9160 \times 10^{-02}$	0.8530				
	VM	Sem	$2.7175 \times 10^{-02}$	0.7406	17h 48m	772.2s	85	7.13 GB
		F=500	$3.6226 \times 10^{-02}$	0.8466	18h 13m			
		F=300	$3.7328 \times 10^{-02}$	0.8184	17h 48m			
		F=150	$3.8863 \times 10^{-02}$	0.8465	18h 13m			

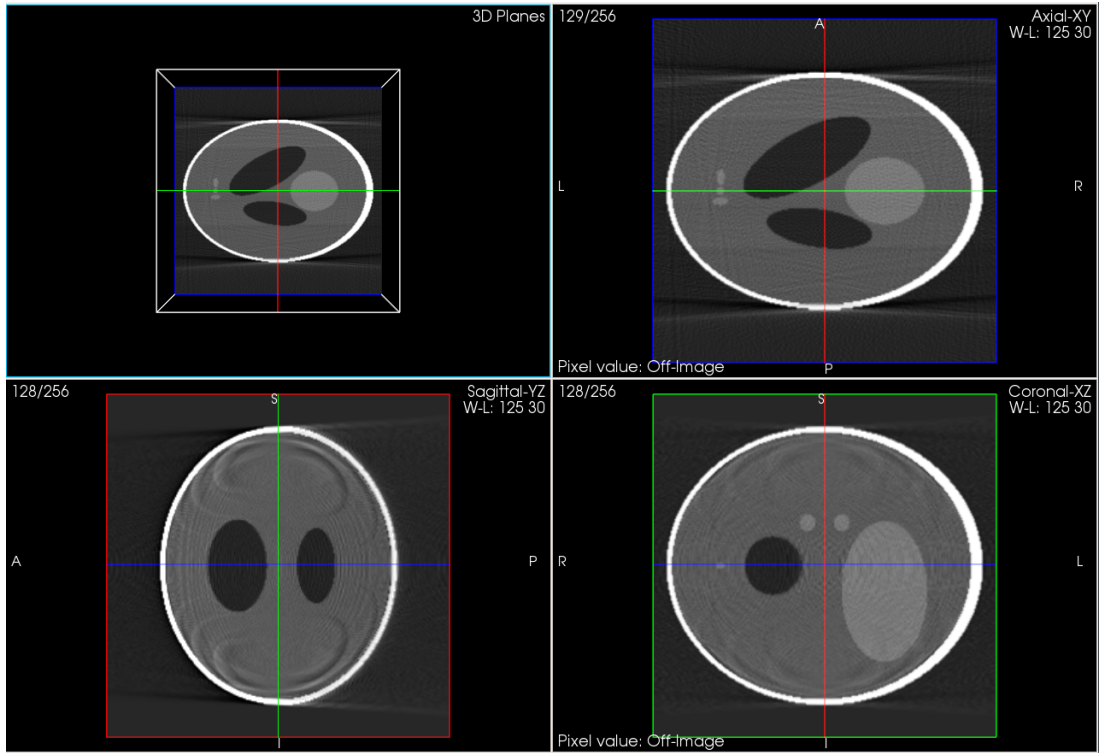
**Tabela 5.11:** Comparação entre os métodos de reconstrução em 3D, para diferentes sinogramas e graus de ruído. Os testes foram realizados em um computador Intel® Xeon(R) CPU E5450 @ 3.00 GHz  $\times$  8, com 56 GB de memória RAM.

Baseado nesta última análise do fantasma de Shepp-Logan em 3D, e antes de utilizar os métodos para reconstruir volumes a partir de dados reais, é importante comentar os diferentes tipos de artefatos introduzidos por cada método na reconstrução a partir da geometria de amostragem *cone-beam* de meia volta<sup>24</sup>. Em (Hsieh, 2009) aprofundam-se diferentes tipos de artefatos presentes em imagens de tomografia computadorizada, os principais e mais característicos nas reconstruções

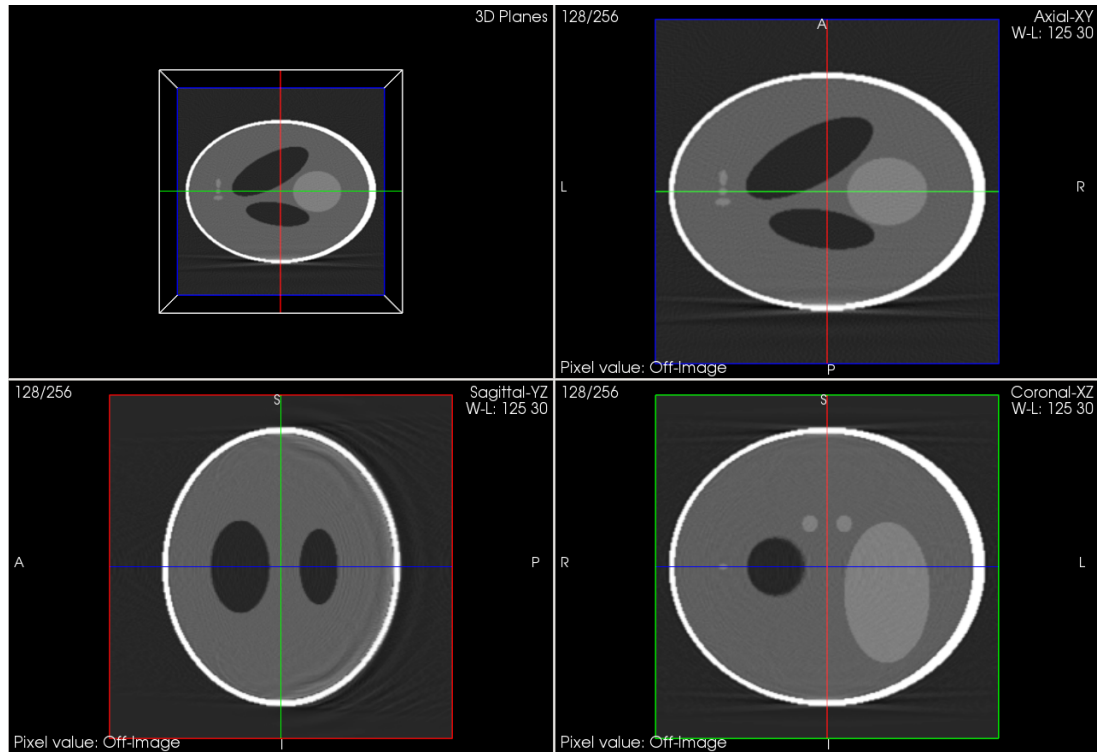
<sup>24</sup> Processo de aquisição usado no estudo de angiografia rotacional 3D.

por métodos FBP e FDK são os conhecidos *streak* e *undersampling artifacts*. Ambos tipos de artefatos são produzidos pelo processo de *back-projection* das bordas realçadas no sinograma prefiltrado. O primeiro tipo de artefatos deve-se ao ruído quantum na presença de objetos com alto coeficiente de atenuação. O segundo tipo de artefatos são os relacionados com *undersampling*, tanto das projeções (*view aliasing*) como dos detectores (*ray aliasing*) e que se acentuam para baixa quantidade de projeções em meia volta. Todos estes artefatos manifestam-se como linhas retas, os últimos dois tipo se apresentam como continuação de bordas na imagem, o último não necessariamente provém de uma borda.

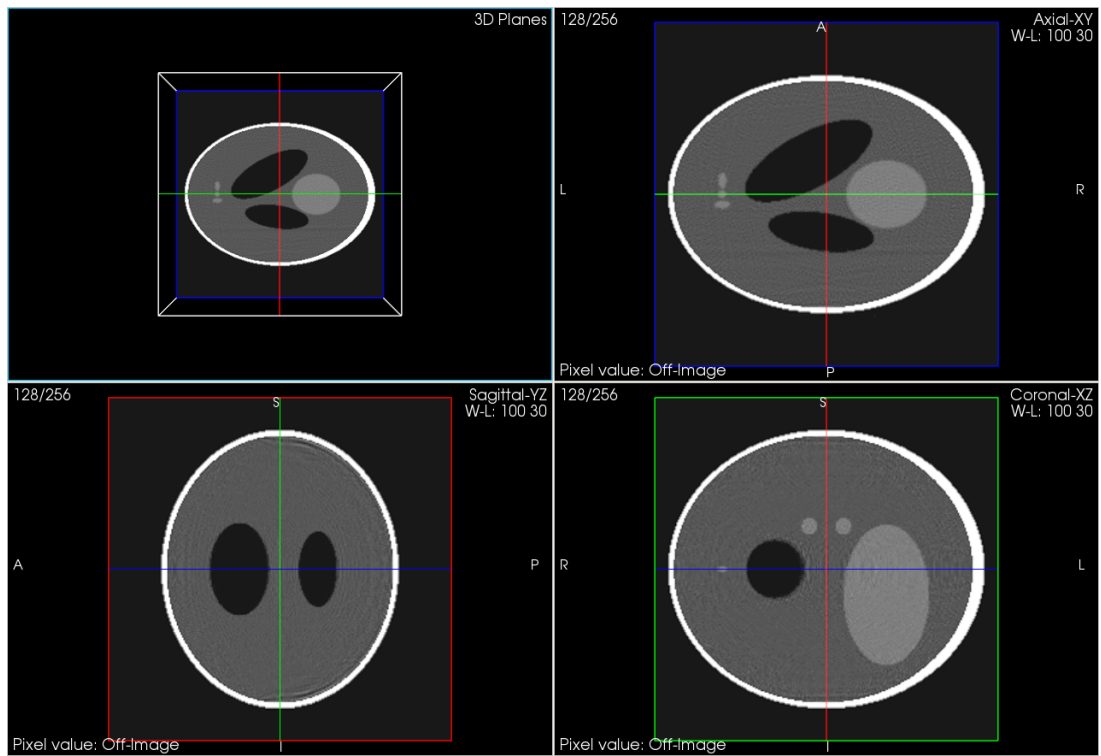
Tanto o método VM como o TG diminuem a presença dos artefatos, nos testes realizados o método TG produz a menor quantidade de artefatos amostrando meia volta. As Figuras 5.34 - 5.36 correspondem às reconstruções do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma (sem ruído) S3D180-180-1. Na vista axial podem-se perceber os artefatos tipo *undersampling* acima mencionados, enquanto que na vista sagital, pode-se apreciar como para todos os métodos as reconstruções perdem qualidade nos planos afastados do plano central em Z, isto deve-se a que a geometria de amostragem *cone-beam* não satisfaz a condição de Tuy-Smith Tuy (1983).



**Figura 5.34:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S3D180-180-1 via o método de FDK. Window-Level: Window/Level: 1.25/0.3.



**Figura 5.35:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S3D180-180-1 via o método variacional. Window-Level: Window/Level: 1.25/0.3.



**Figura 5.36:** Reconstrução do fantasma de Shepp-Logan a partir do sinograma S3D180-180-1 via o método do Gradiente Topológico. Window/Level: 1.25/0.3.



# Capítulo 6

## Um *pipeline* para a reconstrução de 3DRA

Nesta seção se apresenta a metodologia desenvolvida para reconstruir volumes a partir de imagens médicas de pacientes submetidos ao estudo de angiografia rotacional 3D (3DRA). O *pipeline* consiste em quatro passos sintetizados a continuação. Sendo que no Apêndice D apresentam-se dificuldades e detalhes de implementação que podem ser úteis para reproduzir o *pipeline*.

- **Passo 1:** O conjunto de projeções capturadas pelos aparelhos C-arm são salvas em imagens DICOM<sup>1</sup>, o primeiro passo consiste em ler as projeções e construir o **sinograma** correspondente.
- **Passo 2:** Cada *pixel* do **sinograma**, é convertido (do espaço de valores de *pixels*) ao valor que representa a integral de linha dos coeficientes de atenuação, gerando assim um novo **sinograma** (no espaço dos coeficientes).
- **Passo 3:** Se efetua a reconstrução, gerando a **imagem volumétrica** a partir do **sinograma**, usando o método desejado.
- **Passo 4:** A **imagem volumétrica** contendo os coeficientes de atenuação

---

<sup>1</sup> *Digital Imaging and Communications in Medicine* (DICOM), é o formato de fato para o armazenamento e visualização de imagens médicas modernas em formato digital (Pianyk, 2012).

é normalizada para a escala de Hounsfield<sup>2</sup>, tal que

$$HU(\mu) = 1000 \times \frac{\mu - \mu_{agua}}{\mu_{agua} - \mu_{ar}} \quad (6.1)$$

portanto, um cambio de uma unidade de HU, representa uma mudança de 0.1% do coeficiente de atenuação da água, sendo que a atenuação do ar é insignificante. Tendo em vista que os coeficientes de atenuação ( $\mu$ ) dependem da energia dos fótons (medida em KeV) com que a matéria interage, a escala de Hounsfield foi adotada para desacoplar as imagens dos parâmetros do escâner usados para obtê-las.

Como os primeiros dois passos do *pipeline* são pré-processamentos dos dados, não serão tratados nesta seção, alguns detalhes de implementação apresentam-se no Apêndice D. O resto deste capítulo divide-se em duas seções. Na primeira (6.1) se exemplificam algumas dificuldades das projeções 3DRA, e se detalha o **Passo 3** do *pipeline* reconstruindo a fatia central de um volume 3D. Por último na Seção 6.2 se apresentam resultados de reconstruir volumes usando o *pipeline* proposto.

## 6.1 Reconstrução 2D da fatia central

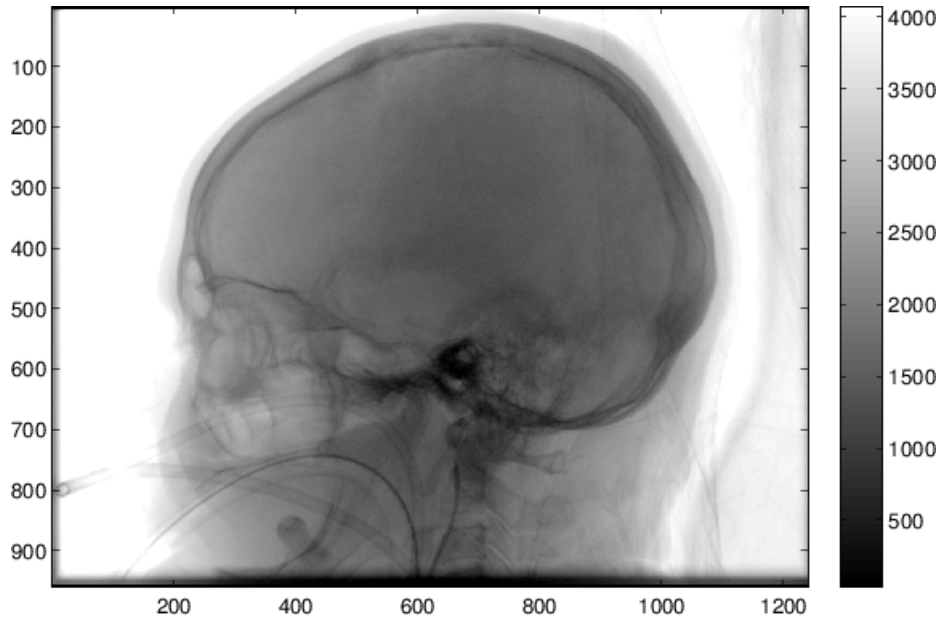
Como passo prévio à reconstrução de volumes a partir de estudos de 3DRA, um teste com o objetivo de detectar possíveis problemas e avaliar o desempenho dos métodos de reconstrução com dados reais foi preparado. Este teste consiste na reconstrução da fatia central do volume, a qual pode ser reconstruída usando geometria de amostragem *fan-beam* a partir das projeções 1D extraídas do estudo de 3DRA.

A Figura 6.1 ilustra dois inconvenientes que podem apresentar os sinogramas 3DRA e afetar a reconstrução. O primeiro é a ausência de artérias nas primeiras projeções, devido a uma falta de sincronismo entre o início do estudo e a liberação

---

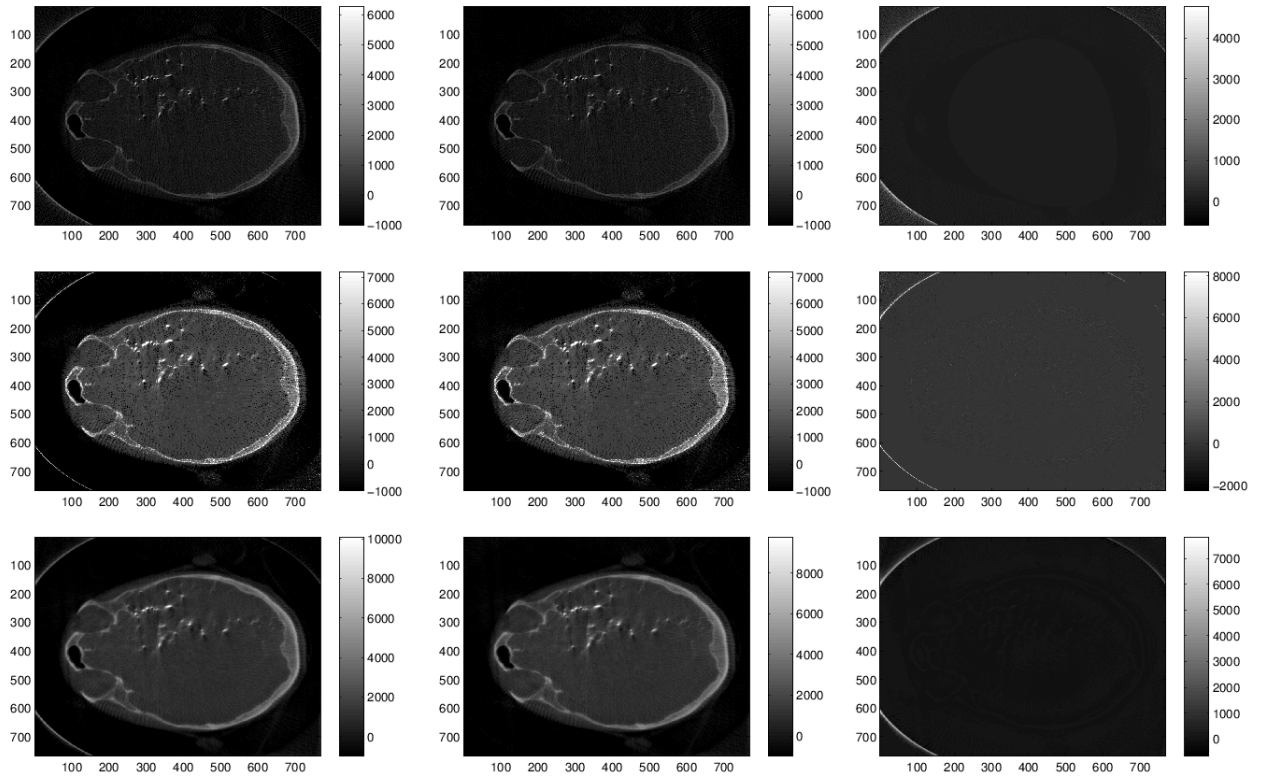
<sup>2</sup> A escala de Hounsfield (HU), é uma transformação dos coeficientes de atenuação lineares, normalizados em relação à radio intensidade da água destilada em condições normais de pressão e temperatura.

do agente contrastante. O segundo possível problema é a presença de artefatos nos limites laterais das projeções que podem dever-se à sujeira no detector.



**Figura 6.1:** Primeira projeção do sinograma 3DRA de teste. O contraste apenas é visível nas proximidades do catéter, ainda não chegou a espalhar na árvore arterial. No lado esquerdo se pode apreciar uma faixa gris, correspondente ao segundo problema.

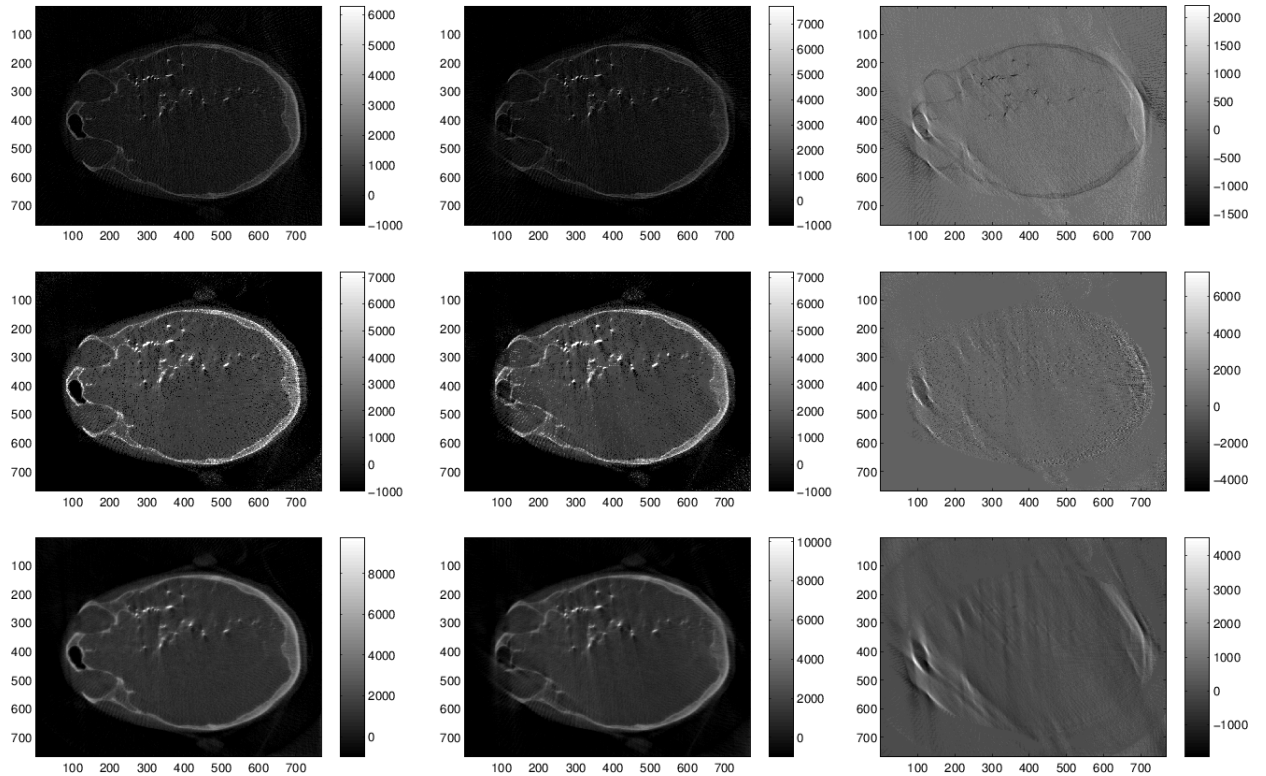
Os artefatos nas bordas das projeções geram um “anel” na reconstrução, na parte externa, que em princípio não afeta as principais características da imagem. Um efeito colateral deste artefato na borda é que modifica de forma não homogênea as intensidades do volume reconstruído. Para solucionar este problema acrescentou-se uma faixa homogênea (de valor correspondente a integral de linha sobre um campo de coeficientes de ar). A Figura 6.2 apresenta exemplos de como a reconstrução do plano central se vê afetada nestes cenários, a reconstrução via FBP é a menos afetada, enquanto o TG e o VM apresentam uma maior sensibilidade modificando substancialmente os valores da reconstrução. Esta sensibilidade se deve ao forte acoplamento entre os *pixels* da imagem em relação às projeções na formulação destes métodos, enquanto o FBP não acopla os *pixels* da imagem, calculando os valores só em relação aos valores das projeções associadas.



**Figura 6.2:** De esquerda a direita, reconstrução com borda, impondo valor na borda, e resta da primeira menos a segunda. Da cima para abaixo, FBP (filtro de Hamming com  $\eta = 0.5$ ), TG (100 iterações, condição inicial homogênea igual a  $\bar{\mu}_1^0$ , perturbação inicial homogênea igual a 0.6, coeficiente de variação  $k = 0.9$ ), VM (10 iterações,  $\lambda = 50$  e condição inicial nula)

A falta de contraste nas artérias em um número significativo de projeções pode afetar a reconstrução em termos de precisão e intensidade nas proximidades das artérias. A forma direta de solucionar este problema é truncar o sinograma, eliminando as projeções sem contraste. A Figura 6.3 apresenta exemplos de como a reconstrução do plano central se vê afetada nestes cenários<sup>3</sup>. De forma geral se pode apreciar a criação de artefatos em algumas áreas ósseas, e um incremento na definição das artérias.

<sup>3</sup> Neste cenário, as projeções já têm as bordas tratadas, para solucionar o problema anterior.



**Figura 6.3:** De esquerda a direita reconstrução com todas as projeções, com as últimas 100 projeções, e resta da primeira menos a segunda. Da cima para abaixo, FBP (filtro de Hamming com  $\eta = 0.5$ ), TG (100 iterações, condição inicial homogênea igual a  $\bar{\mu}_1^0$ , perturbação inicial homogênea igual a 0.6, coeficiente de variação  $k = .9$ ), VM (10 iterações,  $\lambda = 50$  e condição inicial nula).

É importante comentar que a utilização de uma menor quantidade de projeções implica em um menor custo computacional (para todos os métodos de reconstrução). Portanto, de forma a obter maior resolução das artérias, sem introduzir os artefatos nas áreas ósseas, e tentando diminuir o custo computacional, se propõe a seguinte metodologia, que detalha o **Passo 3** do *pipeline* de reconstrução proposto. Primeiro se realiza uma reconstrução com método FBP (ou FDK) utilizando o set completo de projeções (prévia eliminação dos artefatos de borda) com o objetivo de gerar uma reconstrução inicial comparável com a da máquina, sem a presença de artefatos nas áreas ósseas. O segundo passo é utilizar esta reconstrução como condição inicial dos métodos TG ou VM, utilizando o “sinograma com contraste”,<sup>4</sup>

para melhorar a reconstrução tentando obter maior definição das artérias. A Figura 6.4 apresenta a reconstrução provista pelo aparelho (a), a reconstrução com FBP<sup>5</sup> (b), a reconstrução via o Gradiente Topológico<sup>6</sup> (c), e a reconstrução utilizando o Método Variacional<sup>7</sup> (d).

O SNR foi calculado nas áreas indicadas na Figura 6.4 como o quociente entre a média e o desvio padrão dos *pixels* (na escala de Hounsfield), e o resultado é apresentado na Tabela 6.1. Quando o valor do SNR é negativo, estamos em presença de zonas onde o ruído é mais forte que o sinal (desvio padrão maior que a média), quanto maior o valor do SNR menos ruído de reconstrução e mais homogênea é a zona analisada. Portanto, da Tabela 6.1 podemos deduzir que o método Variacional com penalização de salto consegue homogeneizar melhor a condição inicial dada pelo FBP (cujo SNR é melhor que a reconstrução da máquina),<sup>8</sup> entanto que o TG melhora a condição inicial, não consegue uma suavização como a do VM em zonas homogêneas.

A Figura 6.5 apresenta um *zoom* das reconstruções do plano central em uma área com presença de artérias. Via inspeção visual, pode-se apreciar que a reconstrução com FDK apresenta a melhor definição de bordas, sendo que o método Variacional consegue definir as artérias, mas as bordas pareceram estar suavizadas. O método TG obtêm um resultado intermédio entre o FDK e VM. No obstante nos últimos dois casos as intensidades de valores correspondem a um rango de valores diferente que nas reconstruções obtidas pela máquina e pelo método FBP. É importante aclarar que a maior definição de bordas resultante com o método FBP não implica que sejam as bordas verdadeiras da artéria, como foi mostrado na Seção 5.2 as bordas reconstruídas diferem das bordas reais, enquanto que nos outros métodos estas diferenças de bordas são menores.

---

<sup>4</sup> Aproximadamente 100 de 126 projeções neste caso de exemplo.

<sup>5</sup> Com filtro de Hamming e  $\eta = 0.5$ , usando todas as 126 projeções.

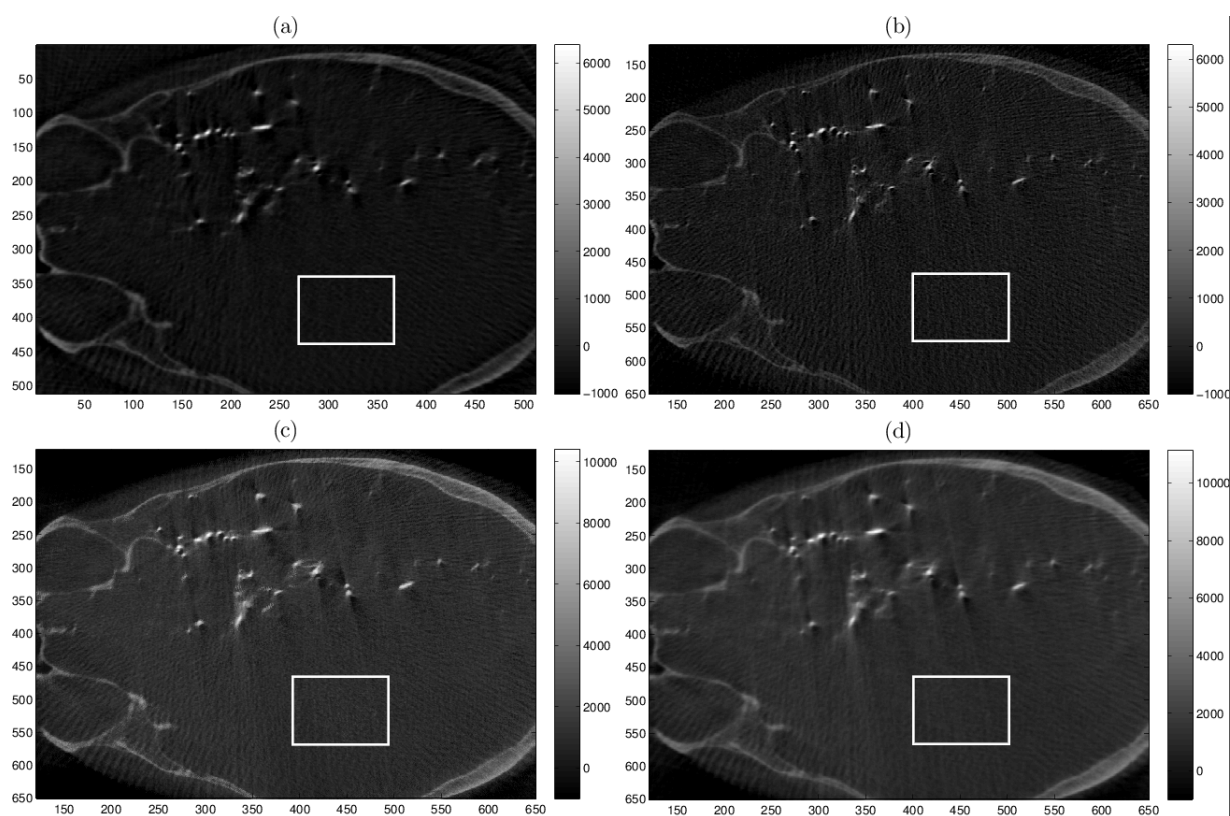
<sup>6</sup> Usando como condição inicial a provista por o FBP, com perturbação inicial homogênea igual a 0.6, coeficiente de variação  $k = 0.9$ , e 50 iterações.

<sup>7</sup> Utilizando Gradientes Conjugados para resolver o sistema, com condição inicial dada pelo FBP,  $\lambda = 50$  e 10 iterações.

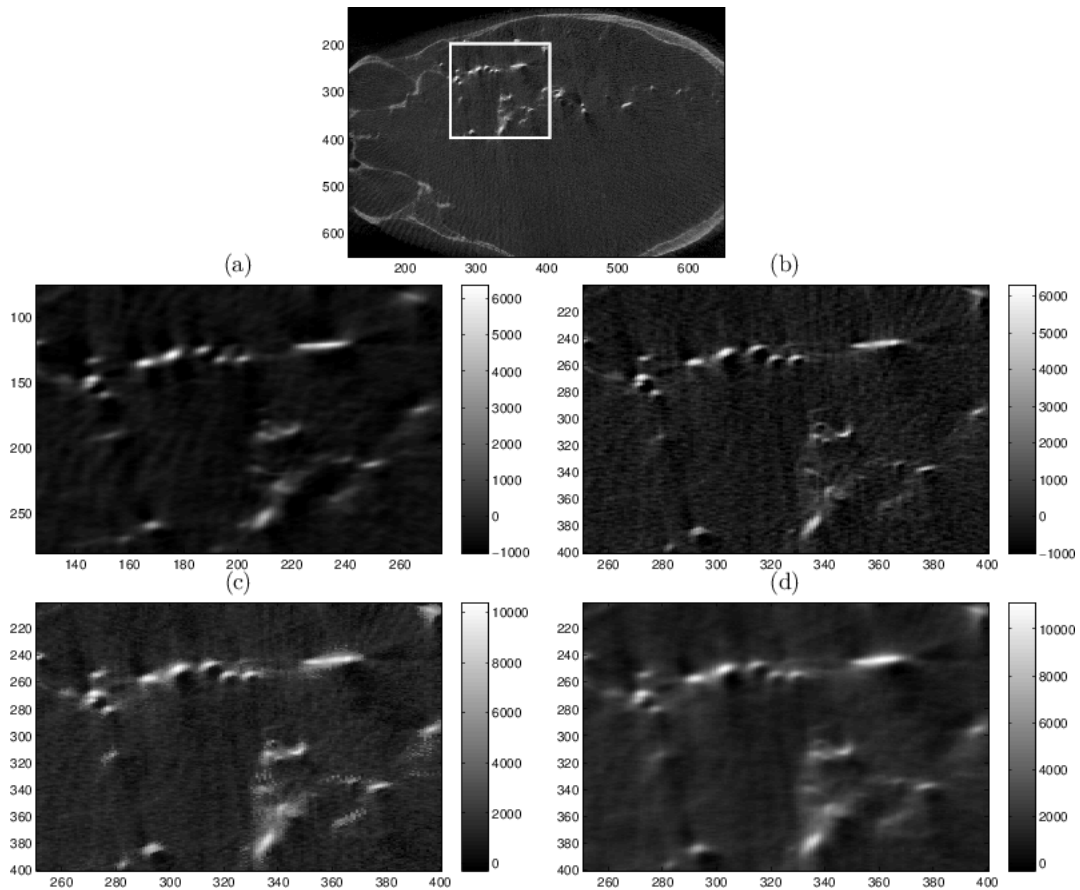
<sup>8</sup> Para esta reconstrução, desconhece-se o tipo de filtragem utilizado no processo de reconstrução e o tipo de pós-processamento ao que o volume foi submetido (em caso de existir).

Reconstrução	SNR em Hounsfield
Aparelho	-4.7799
FBP	-1.1719
TG	2.6967
VM	6.5490

**Tabela 6.1:** SNR para as diferentes reconstruções.



**Figura 6.4:** Reconstruções do plano central com os diferentes métodos e as áreas onde se calculou o SNR. Reconstrução do aparelho (a), reconstrução com FBP (b), reconstrução com TG (c), e reconstrução com VM (d).



**Figura 6.5:** Reconstruções do plano central com os diferentes métodos, *zoom* em uma área com presença de artérias. Reconstrução do aparelho (a), reconstrução com FBP (b), reconstrução com TG (c), e reconstrução com VM (d).

## 6.2 Reconstrução de 3DRA

Por fim, nesta seção apresentam-se resultados de reconstruções em 3D do mesmo estudo para o que foi analisado o *slice central* na Seção 6.1, e repetindo a metodologia já explicada. Relembrando que em algumas oportunidades o hospital provê as projeções e ainda a imagem volumétrica gerada por *software* proprietário<sup>9</sup> (do fabricante do aparelho), podem-se comparar qualitativamente os volumes gerados. As Figuras 6.6 - 6.9 apresenta os planos Axial, Sagital e Coronal dos volumes reconstruídos no hospital e pelos métodos FDK, TG e VM respetivamente. A continuação seguem as principais diferenças entre a reconstrução feita pelo *software*

<sup>9</sup> Embora é de público conhecimento que o método utilizado para a reconstrução pelo software proprietário é o FDK, o filtro utilizado assim como o *pipeline* de reconstrução não. Portanto, é impossível saber se algum tipo de filtragem de *smoothing* foi utilizado sobre o volume, por exemplo.



proprietário e os métodos aqui implementados.

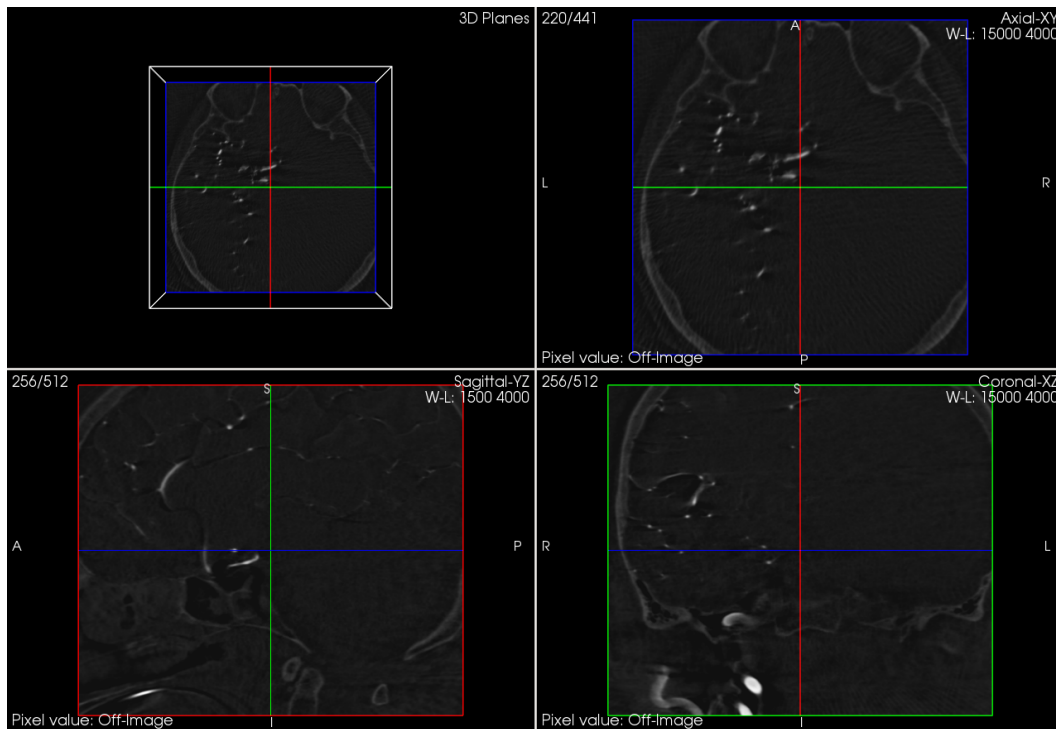
- **As faixas de valores.** A diferença deve-se à falta de conhecimento dos parâmetros para a conversão do domínio de valores de *pixel* para o domínio de coeficiente de atenuação, assim como para passar à escala de Hounsfield (como explicado no Apêndice D). Embora a diferença não é muito grande para o caso da reconstrução via FDK, o problema magnifica-se nas reconstruções via os outros métodos, porque diferenças do 0.1% entre os coeficientes lineares de atenuação (em relação à água) significam uma mudança unitária na escala de Hounsfield.
- **Os volumes obtidos.** Vale a pena mencionar que não existe nenhum tipo de controle sobre o tamanho, espaçamento nem domínio da reconstrução provida pelo hospital (caso exista). Como se pode apreciar nas Figuras 6.7 - 6.9, os volumes reconstruídos cobrem um volume maior ao da Figura 6.6, o que permite em princípio recuperar malhas mais completas do árvore arterial de um paciente específico.
- **Artefatos.** A última diferença entre as reconstruções corresponde-se ao tipo de artefatos característicos. Como visto na Seção 5, os artefatos característicos dos métodos analíticos baseados em *Filtered Back Projection* estão presentes na reconstruções via FDK (tanto da máquina como na versão implementada neste trabalho). Nas reconstruções via o VM e o TG embora os artefatos característicos sejam atenuados, artefatos em forma de anéis são introduzidos nos planos afastados do origem no eixo Z. A provável causa destes artefatos pode ser uma falta de calibração do centro de projeção da fonte nas imagens do sinograma, que, embora suficientemente pequena como para não afetar ao método FDK, nos outros métodos gera artefatos devido ao forte acoplamento dos *voxels* com as projeções nos métodos VM e TG. Recordando que esta informação de calibração não está presente nas imagens disponíveis para este trabalho. Uma outra causa

pode ser a ausência de contraste em uma quantidade considerável (em aproximadamente um quinto das projeções). Estas hipóteses tomam força pelo fato que este tipo de artefatos não estão presentes nos experimentos numéricos apresentados neste trabalho.

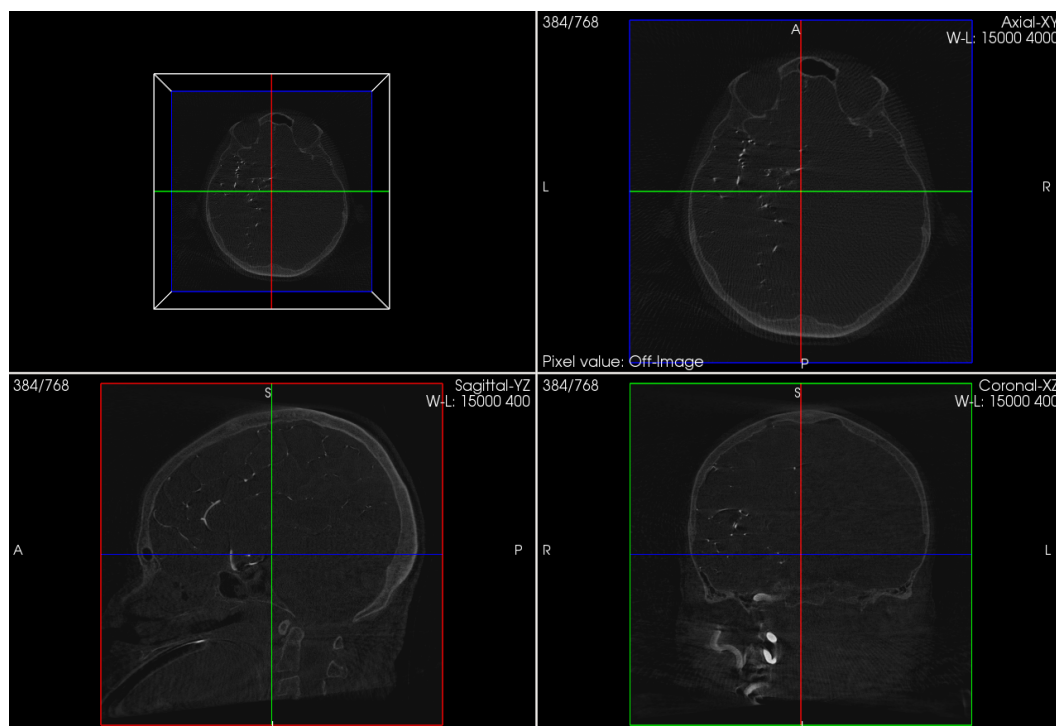
Para descartar a possibilidade de que estes artefatos sejam produto de falta de convergência dos métodos VM e TG, provas forçando 200 e 50 iterações respectivamente foram realizadas. As reconstruções resultantes mantêm os artefatos, indicando que a soluções às quais os métodos estão convergindo introduzem de fato estes artefatos. Para obter resultados concludentes é preciso determinar e corrigir a fonte da corrupção das projeções. Estas fontes poderiam ser erros de calibração do aparelho por exemplo, no entanto provas em condições controladas com fantasmas físicos deveriam ser feitas para verificar estas hipóteses.

A metodologia de reconstrução termina no **Passo 4** do *pipeline* proposto. A partir do Capítulo 7 o problema da segmentação será apresentado e abordado, tendo como entrada imagens volumétricas, tanto provistas diretamente pelo Hospital, como as reconstruídas com a metodologia apresentada neste capítulo.

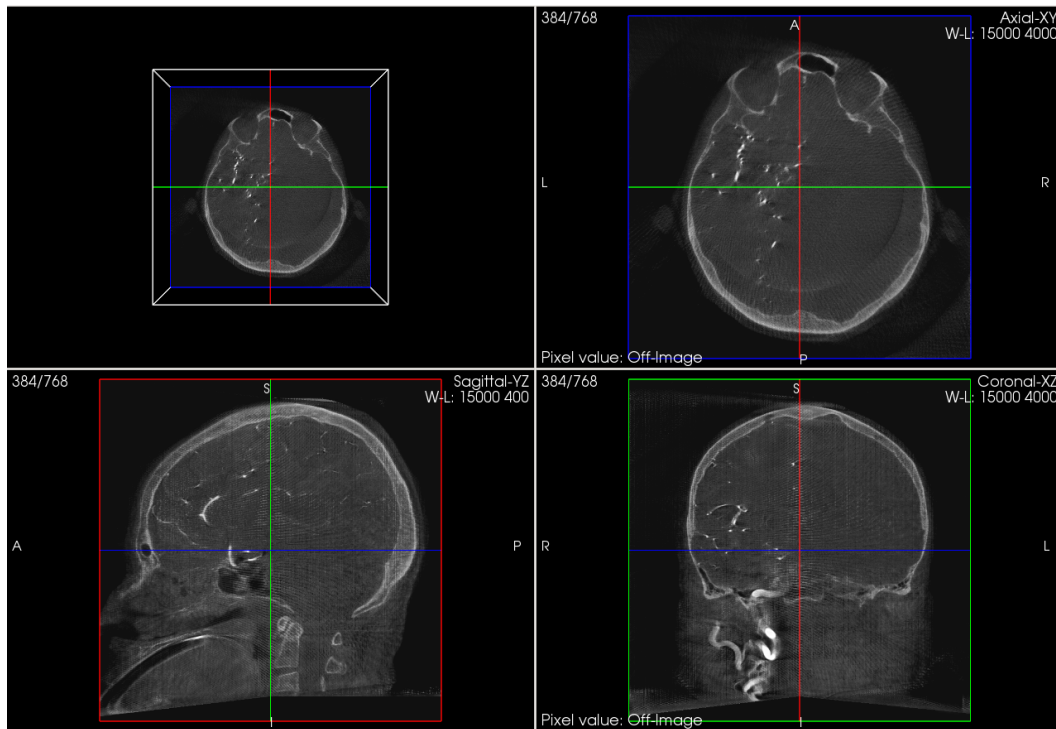
Por fim, é importante comentar as dificuldades encontradas no momento de trabalhar com imagens médicas reais, em particular pela falta de descrição dos parâmetros das projeções e eventuais falta de calibração dos aparelhos do hospital, que limitaram a quantidade de estudos que puderam ser utilizados neste trabalho. Neste contexto revalorizam-se os fantasmas e exemplos numéricos que serviram para demonstrar a potencialidade dos métodos estudados e daqueles aqui propostos.



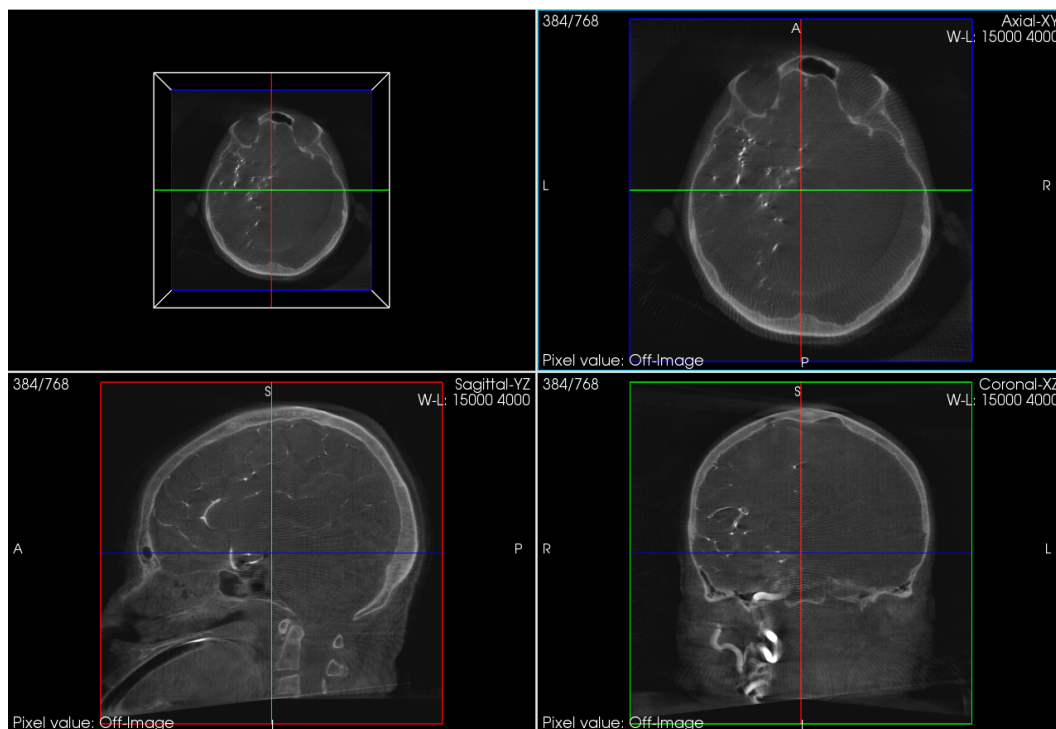
**Figura 6.6:** Reconstruções tridimensional fornecida pelo fabricante do aparelho C-Arm. O Window-Level de visualização é 1500-4000.



**Figura 6.7:** Reconstruções tridimensional via FDK com filtragem de Hamming. O Window-Level de visualização é 1500-4000.



**Figura 6.8:** Reconstruções tridimensional via o método do Gradiente Topológico. O Window-Level de visualização é 1500-4000.



**Figura 6.9:** Reconstruções tridimensional via o Método Variacional. O Window-Level de visualização é 1500-4000.

# Capítulo 7

## Introdução à segmentação de imagens médicas

A segunda parte deste trabalho foca-se na problemática da segmentação de estruturas arteriais em volumes obtidos via as modalidades de 3DRA ou CTA, ambos dois são procedimentos padrão em hospitais para a detecção e diagnóstico de doenças vasculares como estenoses e aneurismas. A segmentação de imagens refere-se à decomposição de uma cena nos objetos que a compõem (Jain, 1989), e têm sido uma linha de pesquisa dentro do campo de processamento digital de imagens por mais de quatro décadas. No entanto, ainda existem grandes desafios, sendo uma área de pesquisa muito ativa.

O desenvolvimento de ferramentas para o processamento de imagens médicas, que possam atuar de forma efetiva para assistir no diagnóstico médico, é um objetivo perseguido por pesquisadores desde a década de 80 (Sa Rebelo et al., 2011). A segmentação de imagens médicas é usada para a caracterização de tecidos e na visualização de estruturas resultando em menos tempo investido pelos médicos especialistas, reduzindo a taxa de diferenças intra e inter observador e diminuindo a necessidade de segundas opiniões. Ainda, a segmentação de imagens pode ser usada para melhorar sistemas de ensino médico (Sa Rebelo et al., 2011).

Os objetos de interesse para este trabalho são segmentos arteriais. Os algoritmos de segmentação de vasos arteriais utilizam-se para assistir na detecção, quantificação e diagnose de patologias vasculares, para planejamento cirúrgico e

seguimento de tratamento, são fundamentais na visualização de imagens, e são componentes essenciais nos sistemas de modelagem e simulação numérica. Os métodos de segmentação variam dependendo da modalidade de aquisição da imagem, o domínio de aplicação e nível de automatização, dentre outros fatores. Não existe um único método de segmentação que possa extrair árvores arteriais de todas as modalidades de imagens médicas. Apesar da tremenda quantidade de trabalho desenvolvido (e em andamento), a segmentação vascular continua sendo uma tarefa desafiante. Para uma completa e extensa revisão e classificação de algoritmos e metodologias de segmentação de artérias recomenda-se os trabalhos de Kirbas e Quek (2004) e Lesage et al. (2009).

### 7.1 Segmentação arterial em modalidades 3DRA e CTA

O objetivo nesta segunda parte do trabalho é a construção de um procedimento constituído por uma sequência de ações bem determinadas, a qual será denominada doravante de *pipeline* visando a segmentação de estruturas arteriais a partir de imagens volumétricas de estudos de 3DRA e CTA. Estes procedimentos clínicos têm-se tornado padrão na detecção e diagnoses de patologias cerebrovasculares, sendo que o 3DRA é considerado o *gold standard* na identificação de aneurismas cerebrais (van Rooij et al., 2008). A segmentação vascular é um problema desafiante, além de considerações gerais dependentes da modalidade de aquisição como contraste, resolução, ruído e artefatos, as redes vasculares podem ser estruturas particularmente complexas (Lesage et al., 2009).

A seguir, comentar-se-ão algumas das características das imagens produzidas por estudos de 3DRA e CTA. Embora o primeiro estudo produz imagens com maior resolução espacial e contraste (entre estruturas arteriais e o resto dos tecidos), a aquisição requer de um procedimento altamente invasivo de cateterização que muitas vezes limita o procedimento nas etapas de tratamento (Geers et al., 2009). Em contrapartida, o estudo de CTA é menos invasivo (o contraste é injetado em artérias periféricas, no braço por exemplo), e por isto utilizado nas etapas de

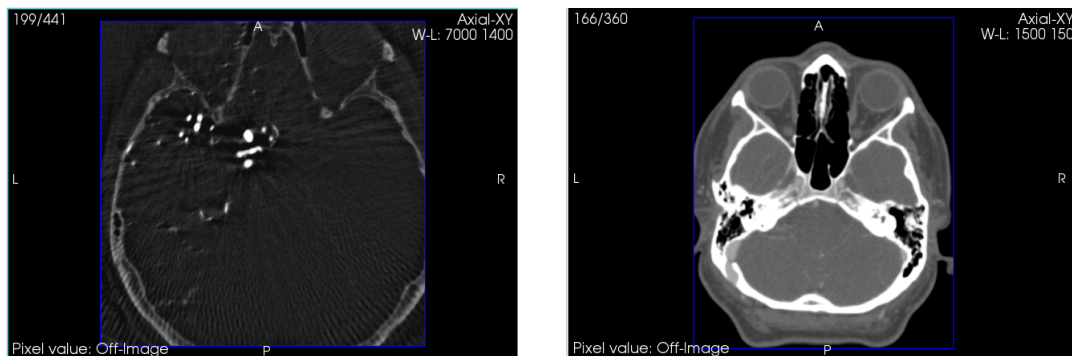
diagnose ou seguimento.

Em geral, as imagens provenientes de estudos 3DRA permitem visualizar a árvore arterial cerebral direta ou esquerda<sup>1</sup> com alto grau de resolução e baixo solapamento de intensidades entre tecido ósseo e segmentos arteriais. Castro et al. (2006b) mostraram que nestas condições, a análise da hemodinâmica em segmentos arteriais (e aneurismas) com mais de uma via de alimentação pode variar significativamente se todas as artérias de alimentação são modeladas ou não. Enquanto que em CTA, esta situação não é um problema porque todas as artérias de alimentação apresentam agente contrastante, enquanto que a principal dificuldade na segmentação da árvore arterial surge em zonas de proximidade osso-artéria, pelo alto solapamento de intensidades entre as artérias e o osso.

Como explicado em Hernandez e Frangi (2007), a segmentação arterial de imagens provenientes de estudos de 3DRA é uma tarefa difícil devido ao ruído, a que os gradientes da imagem são pouco homogêneos, e à presença de artérias de vários tamanhos. Em imagens adquiridas em condições de baixas dose de contraste, artefatos podem aparecer perto das artérias e o solapamento de intensidades osso-artéria é incrementado. Entretanto, a segmentação de imagens provenientes de estudos de CTA é inclusive mais desafiante devido ao alto solapamento das intensidades osso-artéria. Na Figura 7.1 apresentam-se exemplos de ruído em 3DRA e solapamento de intensidades em CTA.

---

<sup>1</sup> Independentemente de se o paciente apresenta anastomoses no *Círculo de Willis*, por exemplo. Isto deve-se a que o agente contrastante é injetado só em uma das artérias que alimentam o cérebro (carótidas internas ou vertebrais)



**Figura 7.1:** Ilustração de dificuldades na segmentação de imagens 3DRA e CTA. Na esquerda um plano de um estudo 3DRA com ruído e artefatos característicos. Na direita, um plano de CTA com alto solapamento de intensidades entre estruturas arteriais e ósseas.

## 7.2 Relevamento de metodologias de segmentação

Os trabalhos de Kirbas e Quek (2004) e Lesage et al. (2009) revisam e classificam algoritmos, filtros e metodologias de segmentação de estruturas arteriais em imagens em uma ampla gama de estudos clínicos. No entanto, neste trabalho em particular, foram ponderadas as metodologias utilizadas por grupos de pesquisa que utiliza a segmentação como uma ferramenta para a posterior geração de malhas que são utilizadas em estudos hemodinâmicos e caracterização de geometrias, em outras palavras, os mesmos objetivos pelo qual o problema da segmentação foi abordado neste trabalho.

Em Cebral e Löhner (2001) apresenta-se um *pipeline* de segmentação de estruturas arteriais interativo (resumido na Seção 7.2.1), que utiliza técnicas clássicas de segmentação de imagens com o fim de gerar, de forma rápida, modelos geométricos (triangulações). Nos últimos anos foram realizados alguns avanços e sofisticções em direção à construção de metodologias de segmentação automática ou semi-automáticas que possam ser aplicadas em diferentes modalidades de imagens usadas de forma rotineira nos hospitais, como 3DRA, CTA e MRA. As motivações por trás destas pesquisas são objetividade na segmentação (independência do operador) e repetibilidade, para diminuir a propagação de variabilidades



nas etapas seguintes<sup>2</sup> (Bogunovic et al., 2011).

Um método de segmentação automático da árvore arterial cerebral é apresentado em Bogunovic et al. (2011). Neste trabalho, revisam-se outros *pipelines* de segmentação considerados como estado da arte. Todos estes métodos de ponta utilizam alguma variante de métodos deformáveis e obtêm resultados com precisão *sub-voxel*. Para nosso conhecimento, os trabalhos de Manniesing et al. (2008) e Bogunovic et al. (2011) são os únicos em propor métodos totalmente automáticos com capacidade de extração da árvore arterial completa, enquanto que outros grupos (Firouzian et al. (2011), Chang et al. (2009), Antiga et al. (2008), Castro et al. (2006a)) propõem metodologias de segmentação interativas de segmentos arteriais. Nas Seções 7.2.2 - 7.2.7 sumarizam-se as metodologias consideradas como estado da arte na segmentação arterial.

### 7.2.1 Segmentação interativa via métodos clássicos

Em Cebral e Löhner (2001) apresenta-se um *pipeline* de segmentação de estruturas arteriais interativo, que utiliza técnicas clássicas de segmentação de imagens, com o fim de gerar, de forma rápida, modelos geométricos. A metodologia consiste de sete passos, começando pelo denominado *Crop* da imagem, onde um sub-volume de interesse que contém as estruturas de interesse é extraído da imagem. O passo seguinte consiste em um realce de contraste (*Sharpening*) para realçar a diferença entre intensidades “claras e escuras”. Posteriormente um SRG é utilizado para segmentar as estruturas de interesse. Logo, uma binarização da imagem é realizada, seguidamente uma convolução com um *kernel* de *smoothing* (*Blur*). Por fim, um filtro estatístico de *voating* é utilizado para eliminar buracos.

O ponto de forte interação com o usuário é a definição da semente e da faixa de valores para o método de SRG. A metodologia foi extensamente validada na segmentação de artérias e aneurismas em imagens de 3DRA, CTA e MRA.

---

<sup>2</sup> Geração de malhas, medição de índices geométricos e simulações hemodinâmicas

### 7.2.2 Segmentação automática de arvores arteriais via *geodesic active regions*

Em Bogunovic et al. (2011) propõe-se uma metodologia de segmentação baseada em um método tipo *Level Set* denominado *Geodesic Active Regions* (GAR), introduzido em Hernandez e Frangi (2007). Neste método, as probabilidades de um *pixel* pertencer a diferentes regiões (por exemplo artérias ou ossos), são obtidas a partir de um classificador de redes neurais que necessita ser treinado “*off-line*” (de forma não automática). Logo, o processo de segmentação pode ser executado sobre uma imagem via a utilização direta do método tipo *Level Set*. Um pré-processamento de todas as imagens (tanto as de treinamento como as segmentadas) consistente em um filtrado de *Image Intensity Standardization* (IIS), introduzido em Bogunovic et al. (2008), é fundamental para o cálculo de probabilidades dado que intensidades correspondentes a mesmos tecidos geralmente não são iguais para diferentes imagens.

O grau de interação da metodologia é baixo, chegando a ser quase automático. O ponto fraco da metodologia é o treinamento manual prévio que precisa o classificador. O método consegue segmentar artérias e aneurismas e foi testado com imagens provenientes de 3DRA e ToF-MRA<sup>3</sup>.

### 7.2.3 Segmentação de aneurismas via *level set*

Em Firouzian et al. (2011) propõe-se um *pipeline* de cinco passos. Em uma primeira instância o usuário proporciona um ponto no interior do aneurisma. Seguidamente uma região de interesse (ROI) cúbica é gerada em torno a esta semente. Logo, um filtragem não linear é usada para melhorar os resultados da segmentação. Em quarto lugar, uma segmentação inicial é gerada via o método de *Fast Marching* (Sethian, 1999). Por fim, um método tipo *Level Set* é usado para segmentar o aneurisma (junto com as artérias incluídas na ROI).

O método necessita interação com o usuário para prover os parâmetros de

---

<sup>3</sup> *Time of Flight - Magnetic Resonance Angiography.*

cada passo da segmentação. Os autores testaram a metodologia para segmentar aneurismas, particularmente a partir de imagens de CTA.

#### 7.2.4 Segmentação via *fluid charge-model*

Em Chang et al. (2009) apresenta-se um *pipeline* de seis passos, o primeiro deles é a escolha de um plano que contenha a estrutura de interesse. A seguir realiza-se uma segmentação usando *Seeded Region Growing* (SRG) no plano. O terceiro passo consiste na geração de uma região de interesse (ROI) cúbica entorno da segmentação. O seguinte passo é suavizar a ROI usando um filtro Gaussiano tridimensional. Logo, segmenta-se a artéria utilizando um método de tipo *Level Set* onde as forças internas são modeladas como cargas elétricas e as forças externas dependem do gradiente da imagem, o modelo de segmentação denomina-se *Fluid Charge-Model* (introduzido em Chang et al. (2007)). Por fim, avalia-se se a segmentação finalizou (interação do usuário), em caso contrário, novas ROI são geradas nos extremos da artéria, e se volta ao quatro passo.

A metodologia requer da interação do usuário na primeira inicialização e como condição de corte em cada iteração. O *pipeline* foi usado na segmentação de artérias e aneurismas em imagens 3DRA.

#### 7.2.5 Segmentação automática de arvores arteriais via *level set*

Em Manniesing et al. (2008) apresenta-se um *pipeline* que consiste em cinco passos. Primeiramente, várias zonas anatômicas (crânio, base do crânio e as artérias carótidas internas) são identificadas automaticamente utilizando conceito de entropia clássico sobre os histogramas de cada plano axial do volume, o plano com maior entropia corresponde-se com a base do crânio. Logo, eliminam-se as estruturas não-arteriais (*background*, ar, ossos e artérias próximas ao crânio) via uma combinação de informação espacial, de intensidade e de operadores morfológicos<sup>4</sup>. Em uma terceira instância a seção transversal das carótidas internas e artéria ba-

---

<sup>4</sup> Mais detalhes do processo e os parâmetros encontram-se no anexo do artigo, disponível em <http://radiology.rsna.org/content/247/3/841/suppl/DC1>

silar são detectadas buscando estruturas circulares via a transformada de Hough (PVC, 1962). Na quarta etapa, uma segmentação inicial é obtida unindo os resultados obtidos na zona da base do crânio e no interior dele. Para a base do crânio, no primeiro caso utiliza-se um método tipo *Level Set* com restrição de topologia tubular (Manniesing et al., 2007), que contorna dificuldades de proximidades osso-arterial. Para o interior do crânio, utiliza-se um SRG. Por fim, um outro método tipo *Level Set* é utilizado para obter a segmentação arterial completa.

Os autores indicam que o método é automático, e foi utilizado para segmentar árvores arteriais em CTAs.

### 7.2.6 Segmentação via *colliding fronts* e *level set*

Em Antiga et al. (2008) apresenta-se um *pipeline* de segmentação de segmentos arteriais em dois passos. Primeiramente utiliza-se um novo método de inicialização denominado *Colliding Fronts*, introduzido pelos autores no mesmo artigo, que consiste na utilização de dois métodos de *Fast Marching*. Portanto, o usuário deve prover dois pontos dentro do segmento arterial de interesse. Esta segmentação é utilizada logo para inicializar um método *Level Set* clássico para obter a segmentação final.

A metodologia necessita da interação com o usuário para inicializar o método de *Colliding Fronts*, tanto como para definir os parâmetros do método de *Level Set*. O método foi utilizado para segmentar segmentos arteriais sem aneurismas de CTA e CE-MRA<sup>5</sup>.

### 7.2.7 Segmentação via *deformable models*

Em Castro et al. (2006a) utiliza-se um *pipeline* de segmentação proposto inicialmente por Yim et al. (2001) e posteriormente refinado em Yim et al. (2003), a metodologia utiliza um modelo deformável 3D. O algoritmo é inicializado com uma iso-superfície (gerada com o método de *Marching Cubes*, sobre uma segmentação

---

<sup>5</sup> *Contrast-Enhanced Magnetic Resonance Imaging*.

obtida com SRG guiado por processo de prova e erro). Logo, a malha de triângulos da iso-superfície é deformada de acordo a “forças da imagem e de suavizado” de uma forma iterativa até que um equilíbrio seja alcançado.

A metodologia requer da interação com o usuário na definição da iso-superfície, e foi extensamente testada na segmentação de artérias e aneurismas em imagens 3DRA.

# Capítulo 8

## Metodologia de segmentação

Neste capítulo apresentar-se-ão dois *pipelines* de segmentação de estruturas arteriais. Primeiramente (Seção 8.1) introduz-se uma metodologia baseada em métodos clássicos, inspirada no trabalho de Cebra e Löhner (2001), que permite a utilização do *software* ImageLab<sup>1</sup> desenvolvido pelo grupo HeMoLab no LNCC de forma direta para segmentar estruturas arteriais em 3D. A segunda opção (Seção 8.2), utiliza o método de *Level Set* proposto por Antiga et al. (2008), implementado na ferramenta *Vascular Modeling Toolkit* (VMTK)<sup>2</sup>.

### 8.1 Um *pipeline* de segmentação baseado em crescimento de região

Com o objetivo de segmentar de forma rápida e simples segmentos arteriais e aneurismas de imagens 3DRA e CTA utilizando técnicas clássicas de segmentação, detalha-se aqui uma metodologia de cinco passos capaz de obter estas estruturas anatômicas. Para cada passo do *pipeline*, quando se faz referência a *imagem*, está-se referenciando ao resultado obtido no passo imediatamente anterior. Todos os filtros aqui utilizados pertencem ao *framework* ITK (Ibáñez e Insight Software Consortium, 2005), e se utilizam diretamente desde o *software* ImageLab.

---

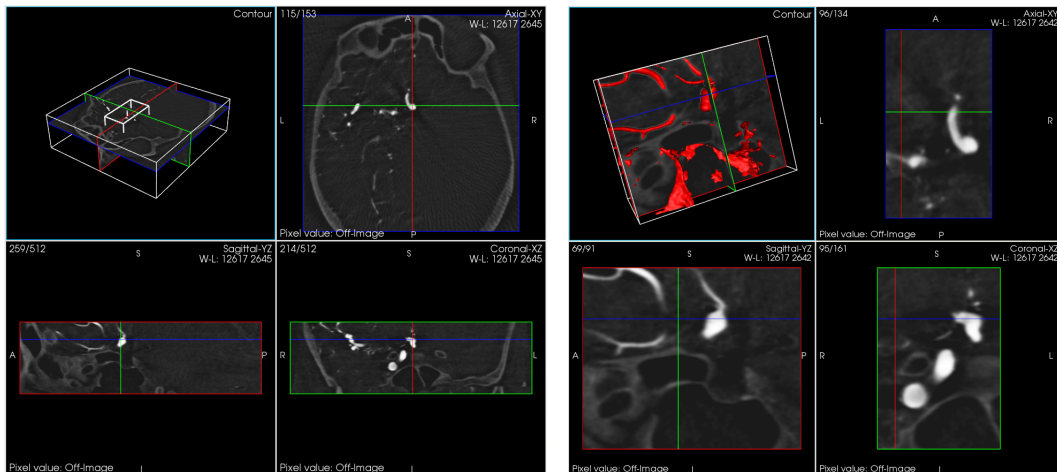
<sup>1</sup> <http://www.lncc.br/imagelab/>

<sup>2</sup> <http://www.vmtk.org/>

### 8.1.1 Extração do sub-volume de interesse

Primeiramente, uma seleção manual de um sub-volume que contém as estruturas arteriais de interesse é levada a cabo. Esta ação conhece-se como *cropping* (Cebral e Löhner, 2001), e utiliza-se porque os estudos de hemodinâmica detalhada posteriormente realizados são feitos em locais específicos, e não na árvore arterial completa<sup>3</sup>. Vantagens da extração do local de interesse, são a exclusão de áreas que apresentam dificuldades na segmentação, como proximidade de osso, além de reduzir os custos computacionais dos próximos passos.

Na Figura 8.1 apresenta-se um exemplo do processo de *cropping* em uma imagem volumétrica de um estudo de 3DRA<sup>4</sup>. Nesta figura se pode apreciar como uma região de interesse que contém ao aneurisma e a sua artéria pai é delimitado e extraído para a posterior segmentação.



**Figura 8.1:** Ilustração do procedimento de *cropping*, na esquerda a imagem original onde se pode apreciar a região de interesse. Na direita, o sub-volume extraído, com uma visualização de iso-superfície que permite visualizar em 3D o aneurisma.

<sup>3</sup> Caso seja necessário, podem-se segmentar os diferentes ramos da árvore por separado, e logo unir os resultados.

<sup>4</sup> Esta imagem foi escolhida para ilustrar uma das problemáticas anteriormente mencionadas dos dados volumétricos provistos de forma direta pelo Hospital. Como se pode ver na Figura 8.1, o volume restringe-se a uma região de interesse entorno aos plano axiais que contém ao aneurisma, impedindo segmentar o resto da vasculatura cerebral.

### 8.1.2 Eliminação de estruturas não arteriais

O seguinte passo consiste na eliminação de objetos “não arteriais”, entenda-se por isto, a supressão de todas as intensidades da imagem que não se correspondam com intensidades observadas dentro das estruturas arteriais. Esta operação materializa-se através da operação conhecida como *general threshold*<sup>5</sup>  $T(I)$ , tal que

$$T(I) = \begin{cases} I & \text{se } I \in [I_{min}, I_{max}] \\ I_{ref} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8.1)$$

onde  $I$  é a intensidade da imagem,  $I_{ref}$  é a intensidade de referência que será imposta em todos os *voxels* da imagem com intensidade fora do intervalo  $[I_{min}, I_{max}]$  (definido por intensidades mínimas e máximas). Em particular, neste trabalho  $I_{ref} = -1$ , e  $[I_{min}, I_{max}]$  são obtidos por um processo de prova e erro. A principal dificuldade para definir um intervalo fixo é a falta de correspondência entre uma faixa de intensidade de imagem com um tipo específico de tecido. Segundo Bogunovic et al. (2008), isto deve-se a diferenças entre os equipamentos, a sua configuração, e à variabilidade de protocolos de injeção de contraste. Particularmente em imagens 3DRA, as intensidades são escaladas para expandir por completo o *dynamic range*<sup>6</sup>, portanto as intensidades altas correspondem-se com tecidos de alto coeficiente de atenuação, que poderá ser artérias em um estudo, ou um aparelho médico artificial (*stent* ou *coil*) em outro estudo. Esta variabilidade afeta os algoritmos de renderização das estações de trabalho em hospitais, além de criar uma barreira para qualquer metodologia de segmentação. Em Bogunovic et al. (2008) propõe-se um procedimento para standardizar a intensidade de imagens produzidas por estudos de 3DRA, que estabelece de forma automática uma correlação entre tipo de tecido e intensidade de *voxel*. O procedimento está baseado no alinhamento dos histogramas usando técnicas de registro de sinais. Embora no presente trabalho nenhum tipo de pré-processamento é utilizado para homogeneizar os histogramas, futuros trabalhos na direção de metodologia de segmentação

---

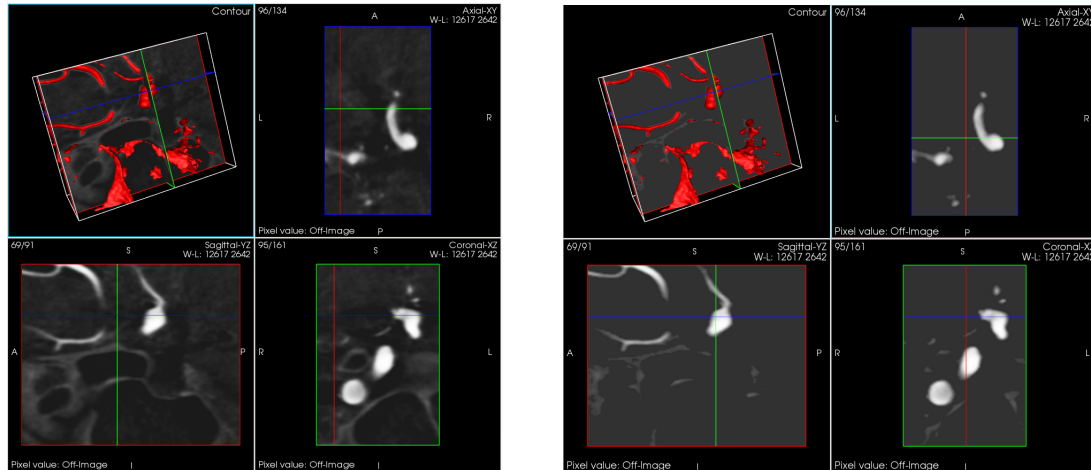
<sup>5</sup> Neste trabalho usar-se-á o filtro *general threshold* implementado em ITK.

<sup>6</sup> É o quociente entre o maior e o menor valor possível de intensidades de uma imagem.



automáticas poderiam tomar vantagem deste tipo de técnicas.

Na Figura 8.2 apresenta-se o resultado da operação de *thresholding*, Na mesma, pode-se apreciar como as estruturas arteriais de alto contraste são preservadas, junto com algumas áreas ósseas de alta densidade.



**Figura 8.2:** Ilustração do procedimento de *Thresholding*, na esquerda a imagem de entrada, na direita, o resultado da operação. A visualização da iso-superfície manteve-se inalterada.

### 8.1.3 Suavizado com preservação de bordas

Como consequência da operação anterior, o contraste entre as estruturas arteriais e fundo é incrementado, facilitando a aplicação de um filtro de suavizado que preserve bordas. Existem numerosos filtros na literatura desenhados com este fim (Ibáñez e Insight Software Consortium, 2005). Dentre eles destaca-se a família de métodos de difusão anisotrópica<sup>7</sup> motivados pelo fato de que uma imagem com suavizado Gaussiano pode ser interpretada como um instante de tempo na solução da equação de difusão de calor, com a imagem original como condição inicial. Neste trabalho utiliza-se uma variante denominada *Curvature Anisotropic Diffusion*, introduzida em Whitaker e Xue (2001) que resolve uma equação de difusão anisotrópica modificada para levar em conta a curvatura da imagem, isto é

<sup>7</sup> Originalmente propostos em Perona e Malik (1990).

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = |\nabla g(\mathbf{x}, t)| \nabla \cdot \left[ c(\nabla g(\mathbf{x}, t)) \frac{\nabla g(\mathbf{x}, t)}{|\nabla g(\mathbf{x}, t)|} \right] \quad (8.2)$$

onde  $g(\mathbf{x}, 0) = I(\mathbf{x})$  é a imagem de entrada,  $g(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, \sigma(t)) * I(\mathbf{x})$  é a convolução da imagem com a Gaussiana de desvio padrão  $\sigma(t) = \sqrt{2t}$ . A função  $c(\nabla g(\mathbf{x}, t))$  define-se tal que  $c(\alpha(\mathbf{x})) \rightarrow 0$  quando  $\alpha(\mathbf{x}) \rightarrow \infty$ , conhecida como função de condutância, introduz a anisotropia na difusão, em particular

$$c(\alpha(\mathbf{x})) = e^{-\left(\frac{\alpha(\mathbf{x})}{K}\right)^2}$$

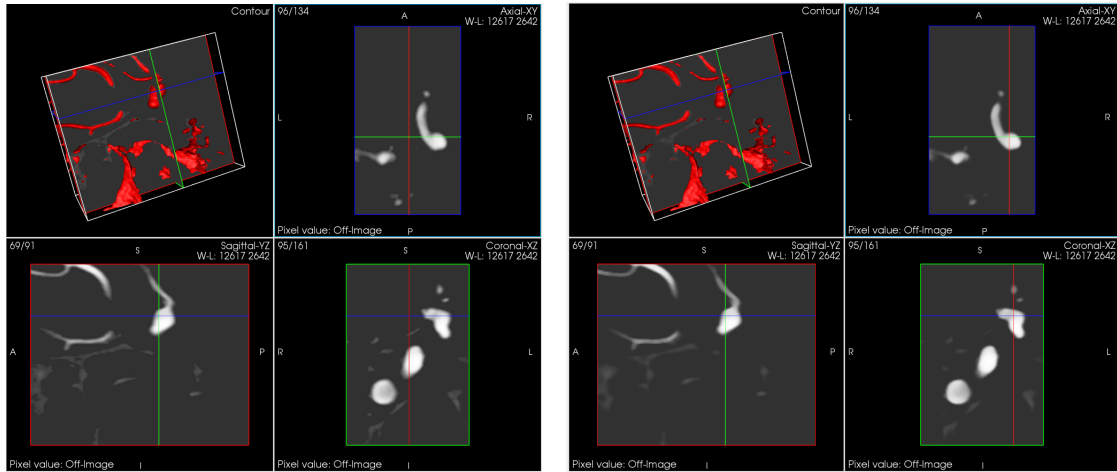
Neste trabalho utiliza-se a implementação oferecida na biblioteca ITK, que necessita a definição de três parâmetros, o espaçamento de tempo  $\Delta t$  usado na discretização da equação (8.2), o parâmetro  $K$  da função de condutância, e o número de iterações a serem realizadas<sup>8</sup>.

A operação de suavizado é utilizada para eliminar ruído. Aqui, utiliza-se também com o objetivo de homogeneizar as regiões arteriais, e difundir interfaces de contato osso-artéria. Nos casos de estudo, tanto de 3DRA como de CTA, utilizaram-se os seguintes valores para os parâmetros,  $\Delta t = 0.0625$ ,  $K = 4$  e em torno de 10 iterações.

Na Figura 8.3 apresenta-se o resultado de aplicar o filtro de suavizado. Como se pode apreciar as bordas das artérias foram preservadas, e uma homogeneização geral das estruturas foi lograda.

---

<sup>8</sup> Em Ibáñez e Insight Software Consortium (2005) recomenda-se usar  $\Delta t = 0.0625$ ,  $K \sim 3$  e em torno de 5 iterações.

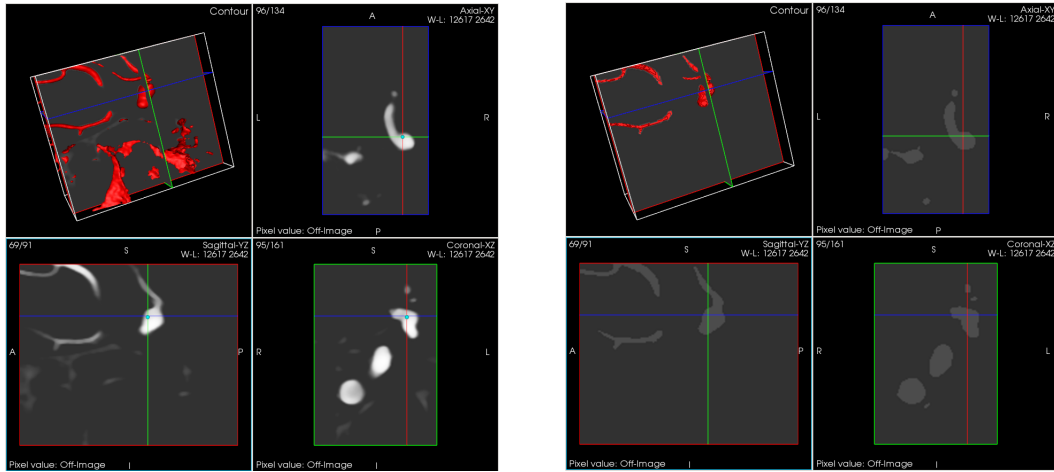


**Figura 8.3:** Ilustração do procedimento de *smoothing*, na esquerda a imagem de entrada, na direita, o resultado da operação. A visualização da iso-superfície manteve-se inalterada.

#### 8.1.4 Crescimento de região com semente

Os algoritmos de crescimento de região são uns dos métodos mais simples para segmentar estruturas conexas que satisfazem um critério baseado na intensidade dos *voxels*. De forma geral, o algoritmo tem que ser inicializado com um conjunto de *voxels* sementes, a partir do qual a região vai crescendo através da sua vizinhança, sempre que esta última satisfazer o critério adotado<sup>9</sup>. Neste trabalho utiliza-se como critério uma faixa de intensidade, próxima à utilizada no *general threshold*, e que se define por um processo de prova e erro. A saída deste filtro é uma imagem binária com um valor para a estrutura arterial segmentada, e outro para o fundo. Na Figura 8.4 ilustra-se a segmentação final via crescimento de região.

<sup>9</sup> Utiliza-se o filtro *connected threshold* implementado na biblioteca ITK.



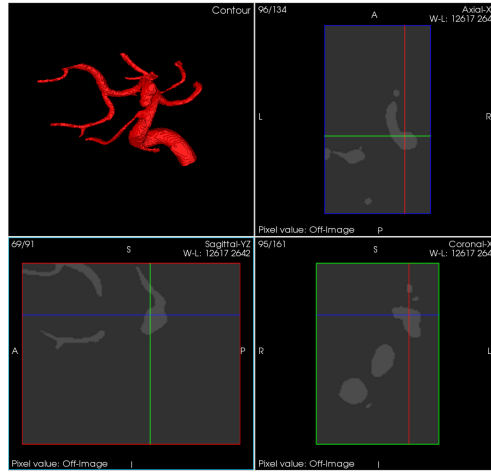
**Figura 8.4:** Ilustração do procedimento de *region growing*, na esquerda a imagem de entrada, na direita, o resultado da operação. A visualização da iso-superfície foi trocada pela malha associada à segmentação.

### 8.1.5 Geração da triangulação inicial

Embora a segmentação tenha terminado no passo anterior, uma malha de triângulos precisa ser gerada para um posterior refinamento e pós-processamento, com o fim de usá-la em simulações hemodinâmicas e, na presença de aneurismas, para medição de índices geométricos.

A geração da malha de triângulos realiza-se via a uma variante do método *marching cubes* (Lorenson e Cline, 1987) implementada no contacto da biblioteca denominada *Visualization Toolkit* (VTK<sup>10</sup>), que gera uma iso-superfície a partir da imagem.

<sup>10</sup> <http://www.vtk.org>



**Figura 8.5:** Malha inicial de triângulos associada à segmentação.

### 8.1.6 Segmentação de imagens de 3DRA

O *pipeline* de segmentação baseado em crescimento de região aplica-se de forma direta em imagens provenientes de estudos de 3DRA em condições de alto contraste (conjunto de imagens disponíveis no momento de finalização deste trabalho). Na Tabela 8.1 apresentam-se valores médios para os parâmetros das diferentes operações da metodologia, usados para segmentar estruturas arteriais no pescoço (artéria carótida interna), na base do crânio (sifão carotídeo e círculo de Willis), e na região cerebral (artérias cerebrais).

Devido à variabilidade no posicionamento do paciente e à dimensionalidade das imagens, decidiu-se não colocar valores para o filtro de *cropping*. O alto contraste nas imagens disponíveis permitiu definir valores de *threshold* iguais em todos os casos, e dado que o agente contrastante usado tem um coeficiente de absorção maior que o ósseo, não foi necessário definir um limite superior. Em relação ao filtro de suavizado, como consequência do realce das bordas provocado pelo *threshold*, valores relativamente altos (e constantes) de condutância e número de iterações são efetivos na homogeneização das intensidades das estruturas. Por fim, as intensidades usadas para o crescimento de região novamente requerem da intensidade mínima, a qual é maior que na operação de *threshold*, para evitar a inclusão de estruturas ósseas, e a união de segmentos arteriais muito próximos.

Operação	Pescoço	Base do Crânio	R. Cerebral
1. <i>Cropping</i>			
2. <i>Threshold</i>	$I_{ref} = -1$		
	$I_{min} = 500$		
	$I_{max} = MAX$		
3. <i>Smoothing</i>	$K = 4$		
	$\Delta t = 0.0625$		
	# Iter. = 10		
4. <i>Region Growing</i>	$I_{min} = 1025$	$I_{min} = 1142$	$I_{min} = 1212$
	$I_{max} = MAX$		

**Tabela 8.1:** Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas vasculares em quatro estudos de 3DRA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU). MAX é o valor máximo de intensidade presente na imagem, que muda de uma imagem para outra.

### 8.1.7 Segmentação de imagens de CTA

A metodologia de segmentação baseada em crescimento de região apresenta dificuldades em zonas de proximidade e contato entre estruturas ósseas e arteriais (como ocorre na base do crânio e na região vertebral), devido ao já mencionado solapamento de intensidades entre estes tipos de tecidos em imagens provenientes de estudos de CTA. Na Tabela 8.2 apresentam-se valores médios para os parâmetros das diferentes operações da metodologia, usados para segmentar estruturas arteriais no pescoço (artéria carótida interna), na região vertebral (artérias vertebrais) na base do crânio (sifão carotídeo e círculo de Willis), e na região cerebral (artérias cerebrais).

Contrastando a configuração dos diferentes filtros para imagens 3DRA e CTA, a principal diferença surge na definição da faixa de intensidades no *threshold* e no crescimento de região. Em ambos procedimentos pode-se perceber a necessidade de diminuir a faixa de valores associados a estruturas arteriais assim como

também a inclusão de um limite superior para esta faixa. No entanto, a estratégia de diminuir a faixa de intensidades admissíveis no crescimento de região em relação ao *threshold* foi mantida. Em relação à operação de suavizado, a mesma parametrização que no caso de imagens 3DRA foi usada, com exceção da região vertebral, onde a proximidade entre estruturas arteriais e ósseas dificulta muito a segmentação, e um incremento na quantidade de iterações na filtragem de *smoothing* foi encontrada de utilidade.

Operação	Pescoço	R. Vertebral	Base do Crânio	R. Cerebral
<i>1. Cropping</i>				
<i>2. Threshold</i>	$I_{ref} = -1$			
	$I_{min} = 280$	$I_{min} = 133$	$I_{min} = 112$	$I_{min} = 105$
	$I_{max} = 550$		$I_{max} = 575$	$I_{max} = 666$
<i>3. Smoothing</i>	$K = 4$			
	$\Delta t = 0.0625$			
	$\# \text{ Iter.} = 10$	$\# \text{ Iter.} = 13$	$\# \text{ Iter.} = 10$	
<i>4. Region Growing</i>	$I_{min} = 216$	$I_{min} = 268$	$I_{min} = 274$	$I_{min} = 130$
	$I_{max} = 537$	$I_{max} = 525$	$I_{max} = 464$	$I_{max} = 541$

**Tabela 8.2:** Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas arteriais em três estudos de CTA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU).

## 8.2 Um *pipeline* de segmentação baseado em *level set*

Como mencionado na Seção 7.2 muitos grupos de pesquisa focados no estudo de hemodinâmica y caracterização de estruturas arteriais a partir de imagens médicas, utilizam metodologias de segmentação baseadas em alguma adaptação dos métodos deformáveis implícitos, conhecidos também como *Level Set* (Sethian (1999), Caselles et al. (1997)). Neste trabalho em particular utilizar-se-á a metodologia proposta em Antiga et al. (2008), consistente de quatro passos, explicados

nas Seções 8.2.1 – 8.2.3.

Da mesma maneira que no *pipeline* clássico de segmentação apresentado na Seção 8.1, o primeiro passo é a seleção de uma região de interesse, via a operação de *cropping*.

### 8.2.1 Escolha do método deformável implícito

Seguindo a definição de (Antiga et al., 2008), neste trabalho denominar-se-á um modelo deformável implícito como a superfície deformável  $S(t) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^3$ , descrita pela iso-superfície de nível zero da função escalar  $\phi(\mathbf{x}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , tal que  $S(t) = \{\mathbf{x}, \phi(\mathbf{x}, t) = 0\}$ . A técnica usada para calcular a evolução temporal da iso-superfície dentro da imagem, denomina-se método *Level Set*, e a modelagem desta evolução descreve-se por um processo de minimização de um funcional custo determinado, cujo formato como PDE está dada por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -w_p P(\mathbf{x}) |\nabla \phi| + 2w_k K(\mathbf{x}) \kappa(\mathbf{x}) |\nabla \phi| - w_a \nabla A(\mathbf{x}) \cdot \nabla \phi, \quad (8.3)$$

onde o primeiro termo do lado direito representa a inflação da superfície com uma velocidade (dependente da posição) modelada pela função  $P(\mathbf{x})$ , também chamado termo de propagação, geralmente depende de características da imagem (por exemplo as bordas) ou restrições topológicas. O segundo termo representa uma restrição de suavidade sobre a iso-superfície, sendo que  $\kappa(\mathbf{x}) = \operatorname{div} \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|}$  é a curvatura média da superfície de nível zero, sujeita à ação do modificador espacial  $K(\mathbf{x})$ . O último termo representa a advecção da iso-superfície em termos do campo vectorial  $\nabla A(\mathbf{x})$ . As constantes  $w_p$ ,  $w_k$  e  $w_a$  regulam a influência de cada termo sobre a evolução da superfície. A equação (8.3) é resolvida empregando a biblioteca ITK (Antiga et al., 2008).

Na implementação provista por VMTK,  $K(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})$ , e tanto  $P(\mathbf{x})$  como  $A(\mathbf{x})$  são calculadas sobre a denominada imagem característica (ou em inglês *Featured Image*)  $I_f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^+$ , ver Seção 8.2.3, tal que  $I_f$  anula-se em zonas homogêneas da imagem, e cresce nas bordas da imagem. Logo, definem-se



$$P(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + I_f(\mathbf{x})} \tag{8.4}$$

$$A(\mathbf{x}) = -P(\mathbf{x})$$

portanto, o termo de propagação  $P$  tende a se anular nas bordas, o efeito de suavizado por curvatura é maior nas zonas de baixo gradiente, e o termo de advecção tende a aproximar a iso-superfície para as bordas.

Em Antiga et al. (2008) comenta-se que baseando a segmentação em variações espaciais locais da intensidade da imagem em lugar de intensidades absolutas (*thresholding*), a metodologia torna-se mais robusta, dado que a localização do lumen arterial é feita em relação às intensidades circundantes.

Por fim, neste passo, a escolha da função de evolução da iso-superfície fica restrita a determinar os pesos  $w_p$ ,  $w_k$  e  $w_a$ . Em Antiga et al. (2008) comenta-se que a penalização de altas curvaturas (escolha de  $w_k > 0$ ) serve como um termo regularizador<sup>11</sup> que pode ser usado para contornar a eventual presença de ruído nas imagens, tornando-se uma alternativa as filtrações de *smoothing* usualmente usadas como pré-processamento da imagens de entrada. Nas Seções 8.2.4 e 8.2.5 apresentam-se os valores de  $w_k$  usados neste trabalho na segmentação de imagens de 3DRA e CTA respetivamente.

### 8.2.2 Inicialização do *level set*

A implementação do resolvidor algébrico para o método *Level Set* fornecida pela biblioteca ITK, utilizada por VMTK para resolver a equação (8.3), baseia-se em um “enfoque de resolução esparsa” (Antiga et al., 2008), onde uma banda finita de *voxels* em torno da iso-superfície (denominado conjunto ativo) é usada e atualizada durante a evolução do *Level Set*. Assim, reduz-se o custo computacional. Como desvantagem, uma boa inicialização é necessária. Neste trabalho utilizar-se-

---

<sup>11</sup> Sempre que o termo de advecção for o suficientemente forte, por exemplo em imagens de 3DRA com alto contraste. Caso contrario pode produzir um “encolhimento” severo das estruturas e inclusive colapsá-las.

á o método conhecido como *colliding fronts*, introduzido em Antiga et al. (2008) na detecção inicial de segmentos arteriais com baixo número de bifurcações (pescoço, base do crânio e Circulo de Willis), e uma inicialização por *threshold* na segmentação de zonas com alto número de artérias (região cerebral).

Quando a inicialização por *threshold* é usada, a imagem é dividida em duas regiões, uma que satisfaz a faixa de intensidades definidas pelo operador, e outra que não. Estas regiões definem a condição inicial  $\phi(\mathbf{x}, t = 0) = \phi_0$ . Neste procedimento o usuário deve indicar os valores de intensidades do *threshold*. Embora esta inicialização consiga capturar multiples bifurcações arteriais, outros elementos como estruturas ósseas também são incluídos na inicialização, e deverão ser eliminados posteriormente (em um procedimento denominado refinamento da malha).

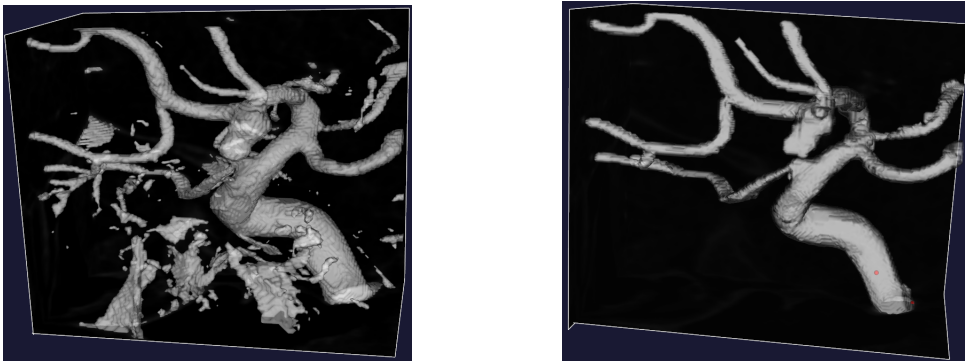
Quando a inicialização por *colliding fronts* é usada, o usuário deve selecionar dois pontos  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$  (sementes) que definem os extremos do segmento arterial que se deseja segmentar. Logo, dos “frentes de propagação de onda” independentes são calculadas a partir das sementes. Estes frentes de onda viajam com uma velocidade proporcional à intensidade da imagem, seguindo a denominada equação Eikonal (Sethian, 1999)

$$|\nabla T(\mathbf{x})| = F^{-1}(\mathbf{x}), \quad (8.5)$$

onde  $T(\mathbf{x})$  é o tempo de chegada do frente de propagação no ponto  $\mathbf{x}$ , usualmente denominado *time-crossing map*. Enquanto que  $F^{-1}(\mathbf{x})$  representa a velocidade de propagação do “frente de onda” em cada *voxel* da imagem, tal que a velocidade é máxima em zonas de intensidades homogêneas, e tende a se anular nas bordas. Neste trabalho,  $F^{-1}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})$  definida na equação (8.4). Para resolver a equação Eikonal (8.5) utiliza-se o método conhecido como *fast marching* (Sethian, 1999), implementado pela biblioteca ITK. Depois que foram calculados os tempos de chegada  $T_1$  e  $T_2$  a partir de  $\mathbf{s}_1$  e  $\mathbf{s}_2$ , calcula-se a condição inicial do *Level Set* como

$$\phi_0 = \nabla T_1 \cdot \nabla T_2 \quad (8.6)$$

Esta inicialização para  $\phi_0$  é negativa em todos os *voxels* onde os frentes de propagação estejam dirigidos em direções opostas, definindo ao *Level Set* inicial como a região compreendida entre as duas sementes. Adicionalmente a implementação do método fornecida na biblioteca VMTK permite a utilização de uma faixa de valores válida (*threshold*), para a qual o frente de propagação será calculado. Eventuais bifurcações são excluídas automaticamente da inicialização dado que ambos frentes penetram na bifurcação na mesma direção, fazendo que a inicialização seja positiva. Para inicializar segmentos arteriais com bifurcações, a metodologia adotada neste trabalho é a utilização reiterada do método de *colliding fronts* para cada artéria. Na Figura 8.6 apresenta-se a inicialização de varias artérias cerebrais e um aneurisma na mesma imagem usada de exemplo ilustrativo na metodologia baseada em métodos clássicos apresentada na Seção 8.1.

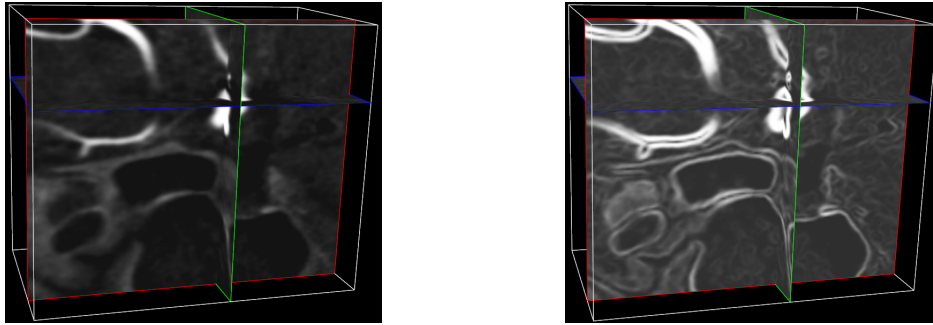


**Figura 8.6:** Ilustração do procedimento de inicialização com os métodos de *threshold* (esquerda) e *colliding fronts* (direita). Nas duas imagens visualiza-se a iso-superfície inicial.

### 8.2.3 Escolha da imagem característica

A denominada imagem característica (ou em inglês *feature image*)  $I_f \in \mathbb{R}^+$ , que é a imagem utilizada para calcular os términos “forçantes” ( $P$ ,  $K$  e  $A$ ) da equação (8.3), deve ser tal que alcance o máximo valor em zonas onde a imagem de entrada  $I$  apresente bordas, e mínima em regiões de  $I$  com intensidade homogênea. Portanto, uma escolha natural, e comumente utilizada, é  $I_f(\mathbf{x}) = |\nabla I|$ .

Em Antiga et al. (2008) propõe-se calcular as derivadas espaciais com diferenças finitas centradas, e no caso de artérias pequenas recomenda-se utilizar um enfoque *upwind*<sup>12</sup> tal que as derivadas são calculadas desde o *voxel* para os vizinhos com menor intensidade (na medida que isto for possível), de forma a prevenir o colapso do *Level Set* nos casos de artérias muito pequenas.



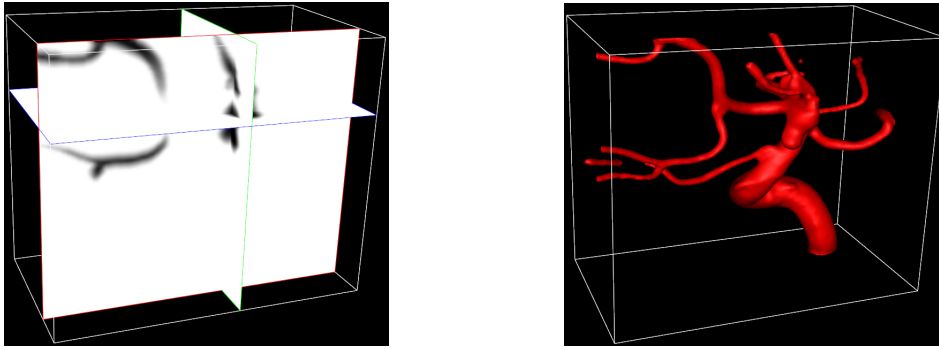
**Figura 8.7:** Ilustração do procedimento de criação da imagem característica. Na esquerda a imagem original, na direita o módulo do gradiente.

Quando o método de *Level Set* termina o processo iterativo, a iso-superfície de nível zero da imagem resultante é extraída em forma de uma malha de triângulos, via o método de *marching cubes*. A Figura 8.8 ilustra a função  $\phi$  resultante e a correspondente iso-superfície, para a estrutura arterial de exemplo. Em comparação com a Figura 8.5 pode-se apreciar que a superfície obtida via o *pipeline* baseado em *Level Set* é muito mais suave que a obtida via crescimento de região, isto pode ser vantajoso na diminuição do processamento necessário para utilizar o modelo geométrico em caracterizações geométricas assim como também em análises hemodinâmicas, sobretudo na fase de geração de malhas de triângulos e tetraedros para simulações de dinâmica de fluidos.

<sup>12</sup> Baseando-se no fato que as estruturas arteriais tem uma intensidade maior que o tecido circundante, aproxima-se o gradiente como  $|\nabla I| \approx \sqrt{|D_x I|^2 + |D_y I|^2 + |D_z I|^2}$  tomando

$$D_x I(x, y, z) = \max \left( -\frac{I(x+1, y, z) - I(x, y, z)}{\Delta x}, \frac{I(x, y, z) - I(x-1, y, z)}{\Delta x} \right)$$

e as outras derivadas parciais são calculadas de forma análoga. Note que  $x+1$  e  $x-1$  denotam deslocamentos de um pixel em ambas as direções no eixo  $x$ .



**Figura 8.8:** Na esquerda apresenta-se a função de *Level Set*  $\phi$ , e na direita a iso-superfície de nível zero associada.

#### 8.2.4 Segmentação de imagens de 3DRA

Na Tabela 8.3 apresentam-se valores médios para os parâmetros em cada uma das etapas do *pipeline* baseado em *Level Set*, na segmentação de estruturas arteriais de imagens provenientes de estudos de 3DRA para a regiões do pescoço (artéria carótida interna), na base do crânio (sifão carotídeo e círculo de Willis), e na região cerebral (artérias cerebrais). A principal diferença na segmentação das diversas zonas anatômicas, é a inicialização do *Level Set*, que depende do número do tamanho e quantidade de artérias e bifurcações. Na região cerebral portanto utiliza-se uma inicialização via *threshold*, enquanto que no pescoço utiliza-se *colliding fronts*. Na zona do círculo de Willis, uma combinação de *threshold* (com valores altos para evitar inclusão de osso na inicialização), seguida por *colliding front* para conectar artérias de menor tamanho (e intensidade). Embora a segmentação de estruturas arteriais na região cerebral inclui segmentos arteriais desconexos e fragmentos ósseos devido à inicialização por *threshold*, estes elementos não desejados serão eliminados no processamento<sup>13</sup> da construção do modelo geométrico final.

Em relação à escolha dos parâmetros, estes foram obtidos via um processo de prova e erro. Em particular, as ponderações dos coeficientes do *Level Set* geram estruturas arteriais “suaves” ( $w_k > 0$ ), e que se ajustam bem nas bordas da artéria

<sup>13</sup> Estes tipos de processos escapam ao escopo do presente trabalho.

em curvas, onde a inicialização por *colliding fronts* pode ficar longe ( $w_p \approx 1$ ) ao mesmo tempo que evita o colapso de artérias pequenas. Na definição de faixas de intensidades na inicialização por *threshold* não é necessário a especificação de valores máximos, e quando *colliding fronts* é usado nenhuma faixa de valores é necessária. Em relação à regularização por suavizado, utilizou-se a configuração padrão provista por VMTK. No cálculo das derivadas espaciais necessárias para a construção da imagem característica, utilizou-se um esquema *upwind* na região cerebral (artérias de menor calibre), e de diferenças finitas centradas nas outras regiões.

Operação	Pescoço	Base do Crânio	R. Cerebral
1. <i>Cropping</i>			
2. Seleção do <i>Level Set</i>	$w_p = 1.0$	$w_p = 0.7$	$w_p = 1.0$
	$w_k = 0.2$		
	$w_a = 1.0$		
	# Iter. = 500		
3. Inicialização	<i>colliding fronts</i>	<i>threshold</i> & <i>colliding fronts</i>	<i>threshold</i>
	$I_{min} = MIN$	$I_{min} = 2500$ & $I_{min} = MIN$	$I_{min} = 1925$
	$I_{min} = MAX$		
4. Imagem característica	<i>Central Diff.</i>		<i>Upwind.</i>

**Tabela 8.3:** Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas vasculares em quatro estudos de 3DRA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU). MIN e MAX correspondem-se com os valores de intensidade mínimo e máximo de cada imagem.

### 8.2.5 Segmentação de imagens de CTA

De forma similar à metodologia baseada em crescimento de região, o *pipeline* baseado em *Level Set* também apresenta problemas em zonas de proximidade e contato entre estruturas ósseas e arteriais (como a base do crânio e a região ver-

tebral), devido ao já mencionado solapamento de intensidades entre estes tipos de tecidos em imagens provenientes de estudos de CTA. Embora a segmentação será muito mais robusta sempre que a inicialização não contiver estruturas ósseas. Na Tabela 8.4 apresentam-se valores médios para os parâmetros das diferentes operações da metodologia, usados para segmentar estruturas arteriais no pescoço (artéria carótida interna), na região vertebral (artérias vertebrais) na base do crânio (sifão carotídeo e círculo de Willis), e na região cerebral (artérias cerebrais). A diferença principal em termos da utilização da metodologia em imagens provenientes de CTA em relação à imagens provenientes de estudos de 3DRA, é que a inicialização via *threshold* só é utilizada para a região cerebral, no resto das zonas anatômicas o método *colliding fronts* é utilizado. Na inicialização de artérias com muita proximidade estruturas ósseas, a inicialização gradual da artérias contorna o problema de incluir osso na inicialização, ao custo de incrementar o nível de interação do usuário.

As principais diferenças na parametrização usada para segmentar imagens provenientes de CTA em relação às provenientes de 3DRA são a definição do *Level Set* e na inicialização. Os coeficientes que definem o *Level Set* foram escolhidos de forma tal que incrementaram a regularidade da segmentação (aumentando  $w_k$  e diminuindo a influência das bordas, decrementando  $w_a$ ), evitaram o desbordamento da iso-superfície para regiões ósseas (diminuindo  $w_p$ ). O número de iterações prescrito também foi diminuído para evitar o colapso de estruturas. Em relação às faixas de intensidades usadas na inicialização, tanto em *colliding fronts* como em *threshold* foi necessário especificar limites mínimos e máximos para evitar a inclusão de estruturas ósseas na iso-superfície inicial.

Operação	Pescoço	R. Vertebral	Base do Crânio	R. Cerebral
1. <i>Cropping</i>				
2. <i>Level Set</i>	$w_p = 0.44$		$w_p = 0.4$	$w_p = 1.0$
	$w_k = 0.46$		$w_k = 0.47$	$w_k = 1.0$
	$w_a = 0.72$		$w_a = 0.66$	$w_a = 0.7$
	# Iter. = 100			# Iter. = 300
3. Inicialização	<i>colliding fronts</i>			<i>threshold</i>
	$I_{min} = 210$	$I_{min} = 290$	$I_{min} = 270$	$I_{min} = 170$
	$I_{max} = 570$	$I_{max} = 300$	$I_{max} = 500$	$I_{max} = 640$
4. <i>Featured Image</i>	<i>Central Diff.</i>			<i>Upwind.</i>

**Tabela 8.4:** Valores médios usados na segmentação de diferentes zonas arteriais em três estudos de CTA. Os parâmetros de intensidade estão em unidades de Hounsfield (HU).

### 8.3 Resultados

Nesta seção apresenta-se uma validação das metodologias de segmentação apresentadas através de um fantasma arterial (Seção 8.3.1), assim como também comparações qualitativas de segmentações em diferentes regiões vasculares (Seção 8.3.2), com recomendações sobre a conveniência de empregar um determinado *pipeline* em cada caso.

#### 8.3.1 Validação das metodologias de segmentação

Com o objetivo de validar a qualidade das segmentações, um fantasma representando uma estrutura arterial idealizada, cilíndrica, com bifurcações idealizadas de diferentes tamanhos, e um aneurisma idealizado, esférico, foi desenvolvido. As especificações do fantasma fornecem-se no Apêndice E. Na geração do volume a ser segmentado, um procedimento que introduz artefatos e ruído similares aos encontrados em imagens médicas foi estabelecido, dito procedimento consta de quatro passos

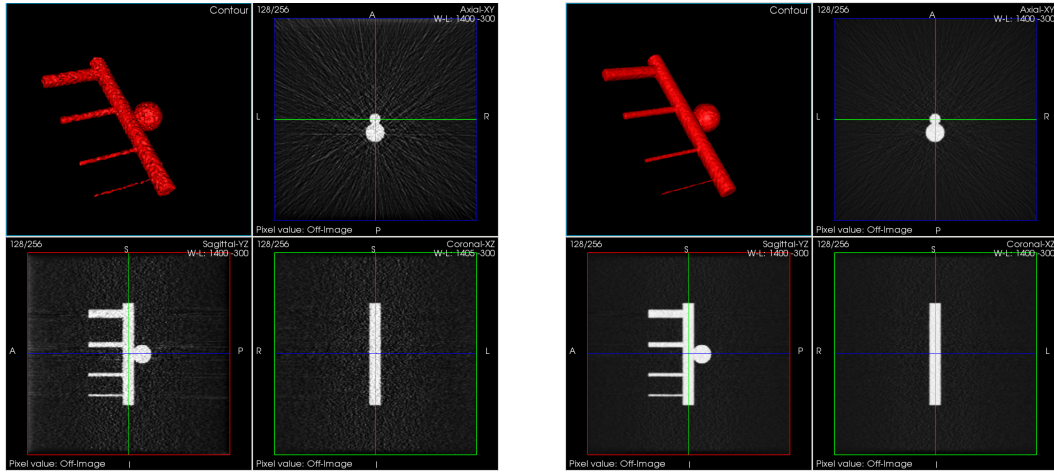


- Geração do fantasma, tomando um espaçamento isotrópico de  $0.27mm$ .
- Cálculo de *forward projection* com 126 projeções cobrindo  $180^\circ$  (3DRA), e 1080 projeções cobrindo  $360^\circ$  (CTA). Usando geometria de amostragem *cone-beam* com detectores quadrados de lado  $0.3mm$ , e distâncias  $750mm$  e  $1174mm$  entre a fonte e o centro de rotação e a fonte e o plano de detecção, de forma a simular condições de um escâner de C-Arm.
- Simulação do ruído nas projeções<sup>14</sup>.
- Reconstrução via método FDK, usando filtragem *Hamming* com  $\eta = 0.5$
- Conversão para a escala de Hounsfield.

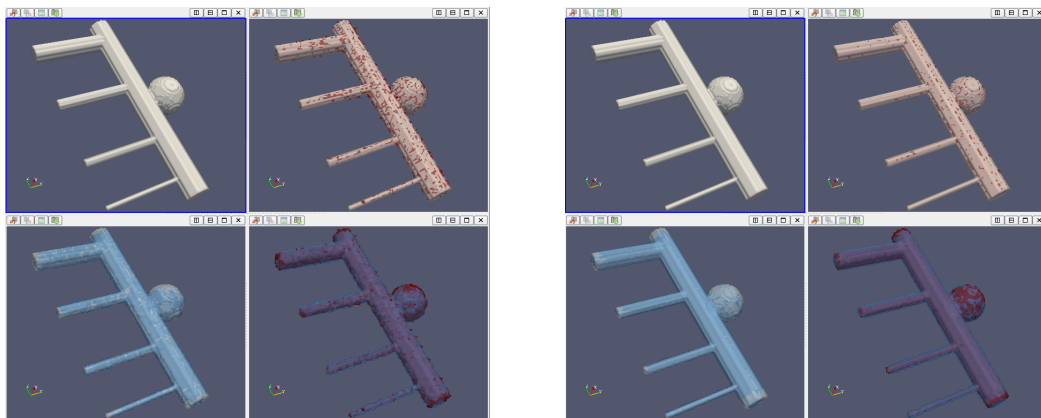
As reconstruções resultantes visualizam-se na Figura 8.9, apresentando o corte axial, coronal e sagital centrados junto com a iso-superfície de nível zero. Nas Figuras 8.10 apresentam-se as iso-superfícies correspondente ao fantasma (branco) e as segmentações baseadas em crescimento de região (vermelho), e em *Level Set* (azul), tomando como entrada as reconstruções com 126 e 1080 projeções. Embora a segmentação via crescimento de região obtenha resultados mais próximos ao fantasma, para estas condições de ruído e artefatos numéricos, em condições reais onde a proximidade entre estruturas ósseas e arteriais com solapamento de intensidade é um problema maior que os níveis de ruído, a segmentação via *Level Set* resulta de maior utilidade, como será visto na Seção 8.3.2.

---

<sup>14</sup> Os parâmetros do ruído foram fixados para uma corrente de tubo de  $300mA$ , um tempo de exposição de  $0.02s$  por projeção, detectores quadrados de lado  $0.3mm$ , e uma constante de quanta  $K = 3288 \times 10^4$



**Figura 8.9:** Reconstrução do fantasma arterial via o método de FDK com filtro de Hamming ( $\eta = 0.5$ ), com simulação de ruído para 126 projeções (esquerda) e 1080 projeções (direita).



(a)

(b)

**Figura 8.10:** Comparações de segmentações usando reconstrução a partir de 126 projeções (a), e 1080 projeções (b). Em ambas figuras, apresentam-se a iso-superfície do fantasma arterial em branco (esquerda acima), comparação entre fantasma e segmentação via crescimento de região em vermelho (direita acima), comparação entre fantasma e segmentação via *Level Set* em azul (esquerda abaixo), e uma comparação entre ambas segmentações (direita abaixo).

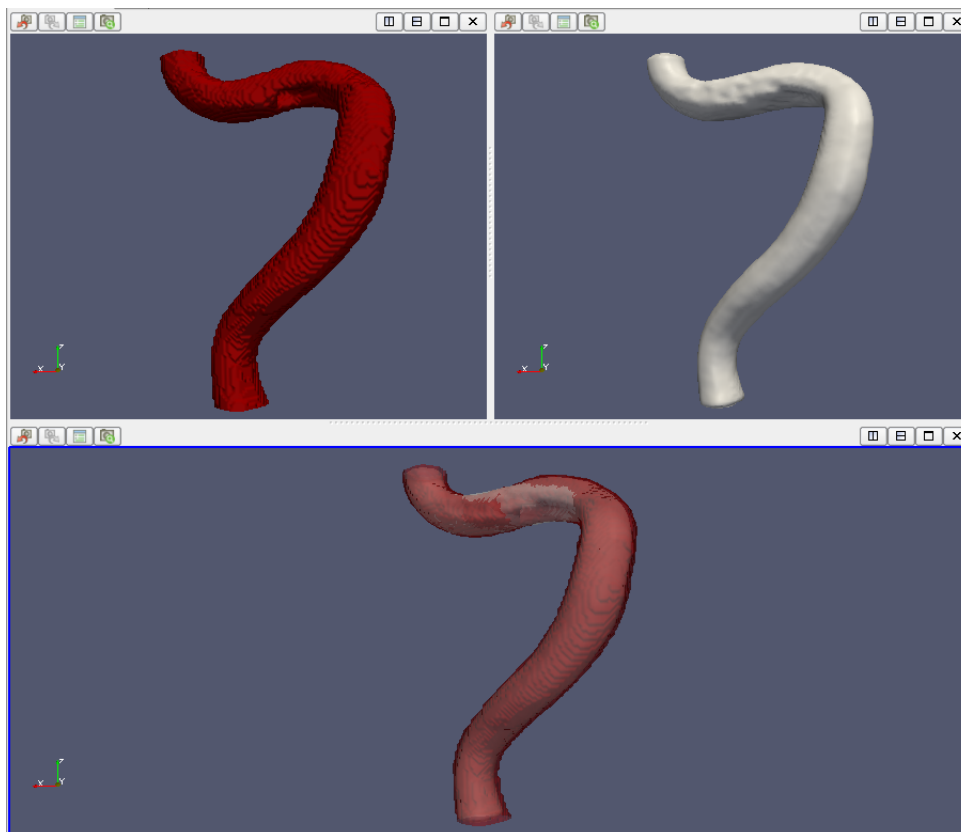
### 8.3.2 Segmentação de imagens 3DRA e CTA

Nesta seção apresentam-se comparações qualitativas de segmentações usando as metodologias explicadas nas Seções 8.1 e 8.2, para diferentes regiões vasculares disponíveis em estudos de angiografia cerebral. Ao longo desta seção dois estudos, um de 3DRA e outro de CTA, serão utilizados para exemplificar e comparar as metodologias de segmentação em diferentes regiões anatômicas.

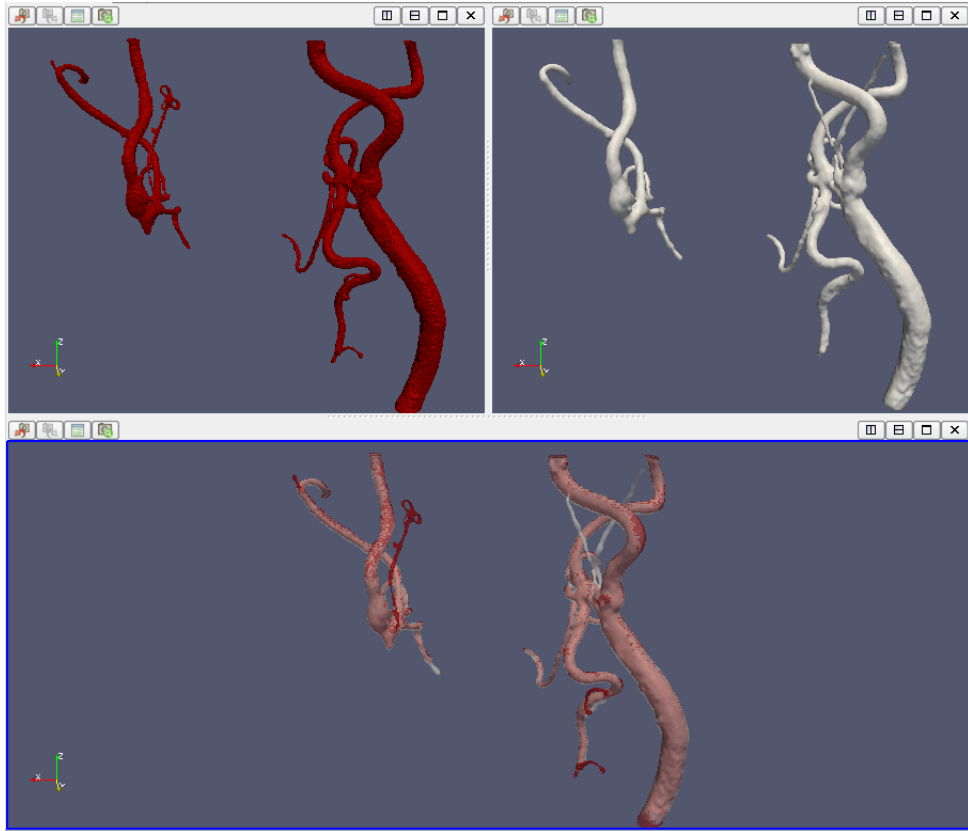
Na Figura 8.11 apresentam-se segmentações da artéria carótida interna na região superior do pescoço, após a bifurcação carotídea e até entrar na região cavernosa da base do crânio, para a imagem proveniente do estudo de 3DRA. A iso-superfície resultante da segmentação baseada em crescimento de região (em cor vermelha) apresenta um furo devido a uma diferença de intensidades, que embora possam salvar-se incrementando a faixa de valores no algoritmo de crescimento de região, acaba por incluir estruturas ósseas na região distal da artéria. Estes inconvenientes são contornados naturalmente na segmentação baseada em *Level Set*. Com efeito, a inicialização por *colliding fronts* evita a inclusão de estruturas ósseas, enquanto que o furo na artéria é provocado por uma diminuição gradual da intensidade, o que implica que o gradiente é o suficientemente pequeno como para não frenar o frente de propagação do *Level Set*. O fato de que as artérias que se desejam segmentar são poucas e de tamanho considerável, e o tipo de situações mencionadas anteriormente, fazem com que a escolha da metodologia de segmentação baseada em *Level Set* seja a mais recomendável na segmentação de imagens provenientes de estudos 3DRA, para a região do pescoço.

Nas Figuras 8.12 e 8.13 apresentam-se segmentações das artérias carótidas internas (esquerda e direita) e das vertebrais (esquerda e direita) respetivamente, na região do pescoço até a base do crânio, para a imagem proveniente do estudo de CTA. Embora ambas metodologias obtêm resultados similares nas artérias carótidas, a proximidade osso-artéria na região vertebral torna muito dificultosa a segmentação por crescimento de região e degrada a qualidade da mesma. Por outro lado, a metodologia baseada em *Level Set* com inicialização de *colliding fronts*

consegue bons resultados. Considerando que ainda se tem um baixo número de artérias e considerando o tamanho delas, recomenda-se como a escolha mais adequada a metodologia baseada em *Level Set*.



**Figura 8.11:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). O segmento arterial corresponde à artéria carótida interna após a bifurcação carotídea até a região cavernosa da base do crânio. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de 3DRA.



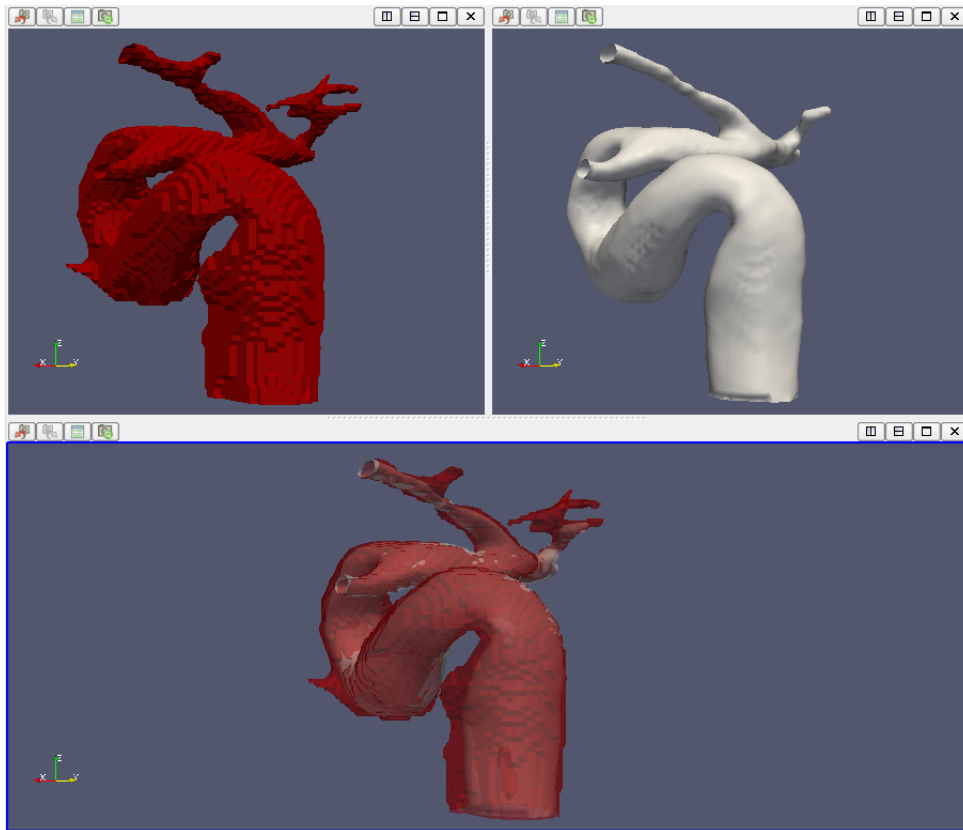
**Figura 8.12:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias carótidas. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA.



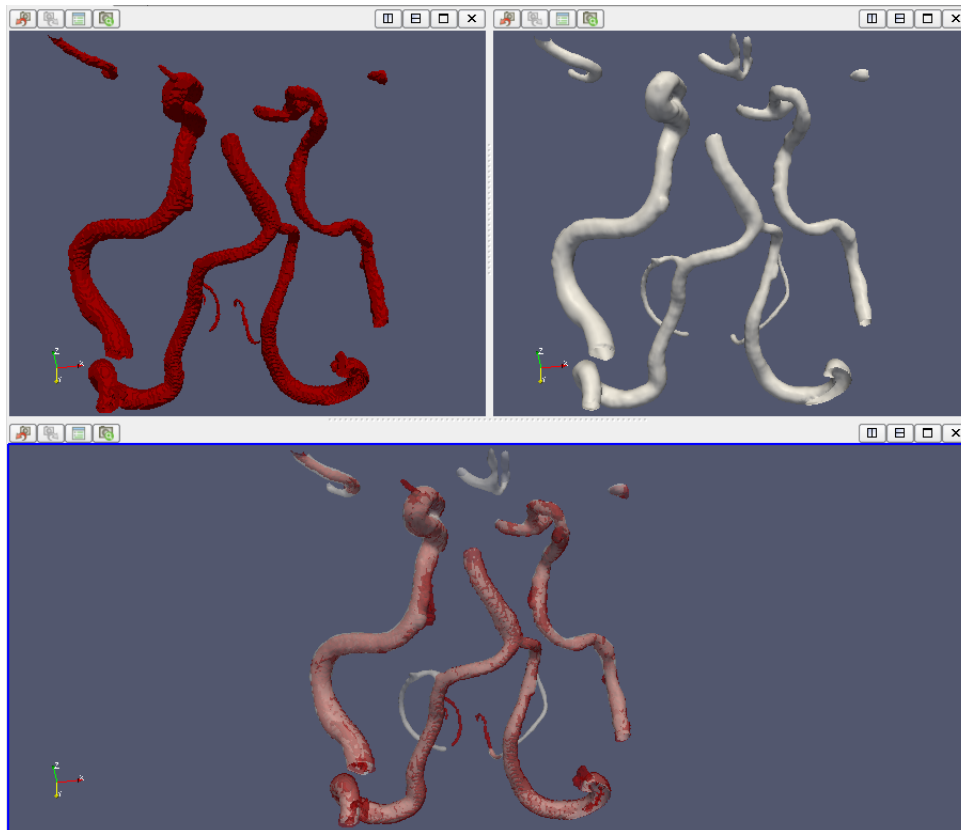
**Figura 8.13:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias vertebrais. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA.

Na Figura 8.14 apresentam-se segmentações de artérias na região cavernosa da base do crânio e do círculo de Willis, para a imagem proveniente do estudo de 3DRA. Desde o ponto de vista da segmentação arterial, esta região apresenta dificuldades tanto pela proximidade entre as estruturas ósseas e arteriais, como pela tortuosidade no sifão carotídeo. Somado a que o círculo de Willis é uma das regiões com maior tendência a apresentar aneurismas, fazem com que esta região anatômica seja das mais desafiantes para segmentar. Embora o número de segmentos arteriais é maior que na zona do pescoço, ainda é viável a utilização da metodologia de segmentação baseada em *Level Set* com inicialização por *colliding fronts*, contornando assim as dificuldades comentadas. Por tanto, recomenda-se a utilização deste *pipeline* para segmentar estruturas arteriais nos locais do círculo

de Willis e da base do crânio. Estas dificuldades de segmentação tomam força em imagens provenientes de estudos de CTA, pelo já mencionado solapamento de intensidades entre estruturas ósseas e arteriais, como pode ser apreciado nas Figuras 8.15 e 8.16. Ali, a metodologia de segmentação via *Level Set* surge novamente como a escolha mais adequada. Nesta última figura, a presença de um *clip* na comunicante anterior esquerda produz artefatos na segmentação por crescimento de região, que não estão presentes quando a metodologia baseada em *Level Set* é usada.

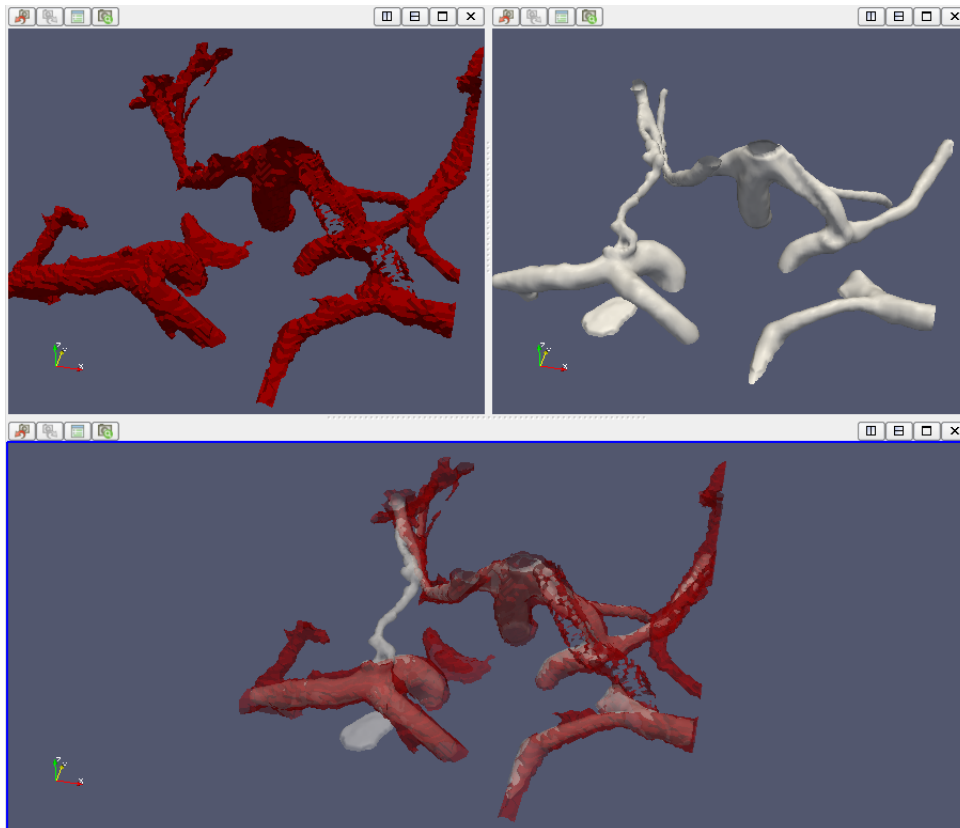


**Figura 8.14:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). Os segmento arterial corresponde à artéria carótida interna dentro da região cavernosa da base do crânio e no círculo de Willis. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de 3DRA.



**Figura 8.15:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias carótidas internas e vertebrais/basilar, na região da base do crânio. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA.





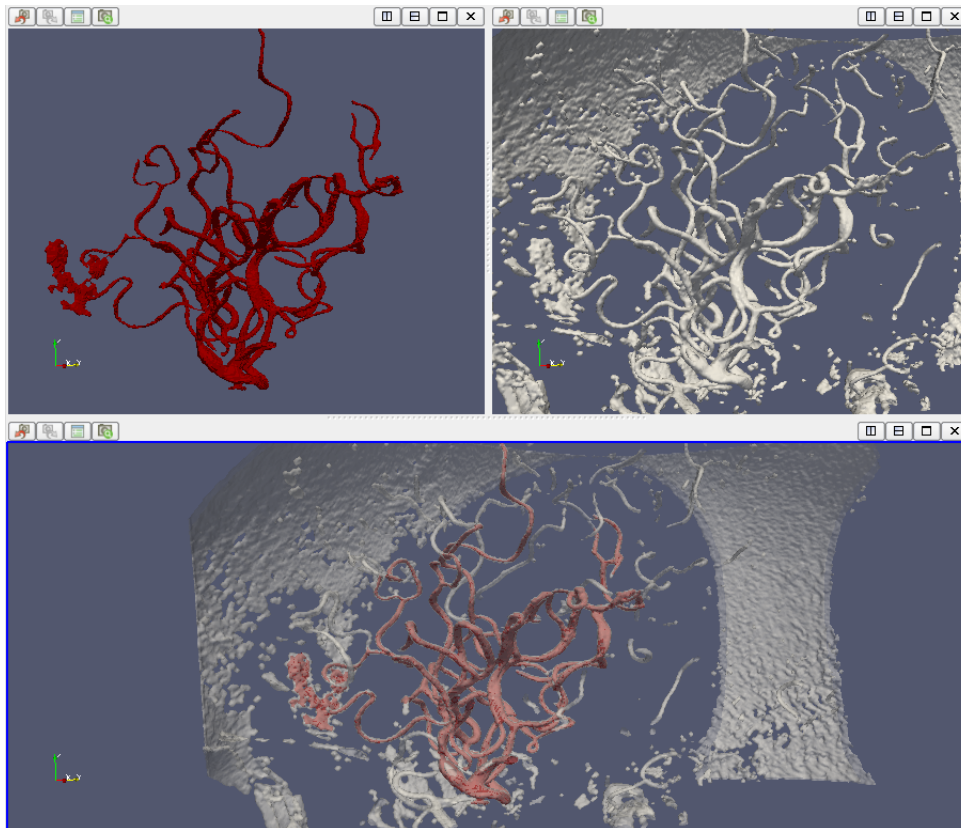
**Figura 8.16:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). Os segmentos arteriais correspondem-se com as artérias carótidas internas e basilar, na região do círculo de Willis. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA.

Na Figura 8.17 apresenta-se o resultado de segmentar artérias na região cerebral a partir da imagem obtida do estudo de 3DRA. As principais dificuldades neste região vascular são o menor tamanho das artérias, a proximidade entre segmentos arteriais (aparentam ter anastomoses inexistentes)<sup>15</sup>, proximidade osso-artéria, e a alta quantidade de artérias. Como pode ser apreciado na Figura 8.17, a reconstrução via crescimento de região consegue capturar as principais artérias cerebrais, enquanto as artérias de menor calibre não são capturadas<sup>16</sup>. Contudo, o problema

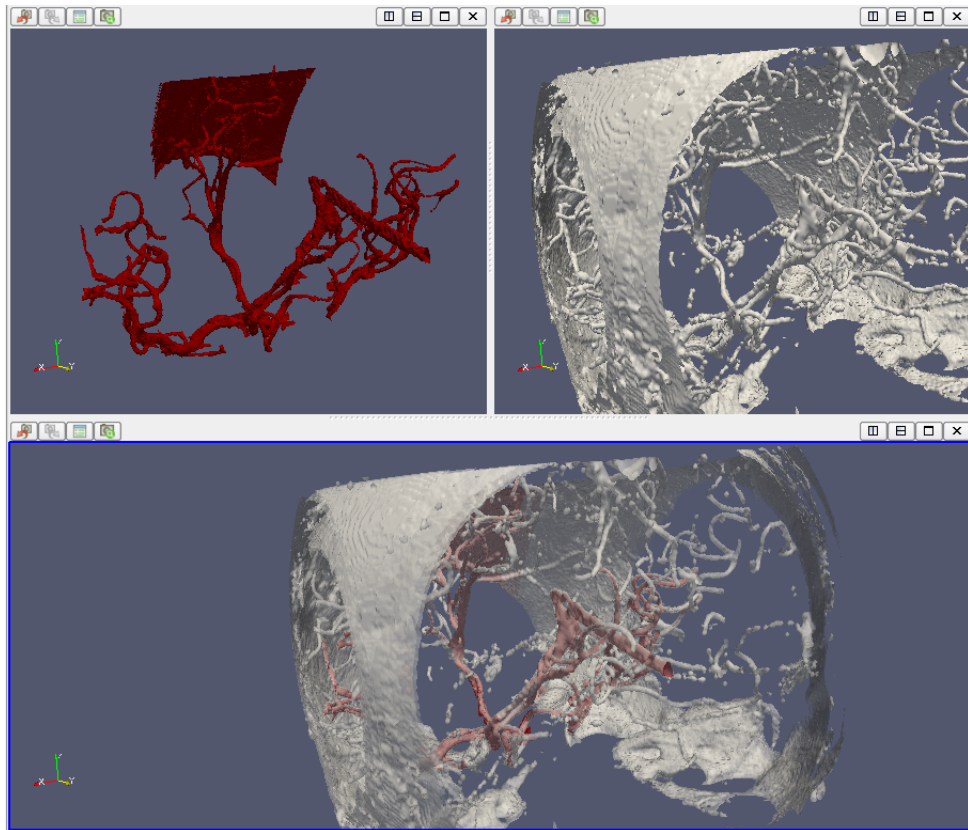
<sup>15</sup> Produzidas por baixa resolução e limitações do algoritmo de reconstrução.

<sup>16</sup> Tendo em vista que as segmentações servirão como entrada na construção de modelos geométricos para simulações hemodinâmicas, onde as artérias pequenas geralmente são substituídas por condições de contorno adequadas, a incapacidade de capturá-las na etapa de segmentação não representaria um problema.

de anastomoses fictícias não pode ser eliminado e deverá ser solucionado em posteriores refinamentos na definição da iso-superfície. Por fim, veja que há estruturas ósseas que são incluídas na segmentação, em locais periféricos, o que facilita a sua remoção em posteriores pós-processamentos da iso-superfície. Por outro lado, a metodologia via *Level Set* deve ser inicializada por *threshold* (*colliding fronts* requer interação exaustiva se muitas artérias querem ser segmentadas), agravando o problema de inclusão de estruturas ósseas, e embora um esquema *upwind* no cálculo de diferenças finitas é usado para prevenir o colapso de artérias pequenas, muitas delas ficam desconexas das artérias pais. Com a exceção de que poucos segmentos arteriais específicos tenham que ser segmentados, onde o método de *Level Set* possa ser usado inicializando-o com *colliding fronts*, a recomendação geral é usar a metodologia baseada em crescimento de região. Estas observações também são válidas para imagens provenientes de estudos CTA, como pode ser apreciado na Figura 8.18.



**Figura 8.17:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). Os segmentos arteriais encontram-se na região cerebral direita. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de 3DRA.



**Figura 8.18:** Comparação das iso-superfícies resultado da segmentação via crescimento de região (vermelho), e via *Level Set* (branco). Os segmentos arteriais encontram-se na região cerebral. As segmentações foram feitas a partir de uma imagem resultante de um estudo de CTA.

# Capítulo 9

## Conclusão e trabalhos futuros

Neste capítulo final se apresentam as conclusões e perspectivas futuras para cada uma das duas partes abordadas ao longo deste trabalho.

### 9.1 Conclusões acerca do problema de reconstrução

Na primeira parte deste trabalho, o problema da reconstrução de imagens a partir de projeções foi apresentado para diferentes geometrias de amostragem em duas e três dimensões. Como foi colocado no capítulo introdutório, o desenvolvimento de métodos de reconstrução alternativos robustos é uma das linhas de pesquisa dentro da área de tomografia computadorizada (Wang et al., 2008), o que foi o foco deste trabalho.

Os métodos mais usados nos equipamentos de obtenção de imagens convencionais, *Filtered Back-Projection* e FDK foram estudados e implementados com sucesso (fazendo uso de paralelismo *OpenMP*), e as reconstruções tanto com fantasmas numéricos como de forma qualitativa perante imagens de equipamentos convencionais foram avaliadas. Desta forma foi alcançado o objetivo de desenvolver uma ferramenta que permita a reutilização de estudos de 3DRA para os quais o Hospital ou instituição de pesquisa médica só possui o formato de projeções.

Um tipo de algoritmo de reconstrução iterativo baseado em análise de sensibilidade (o método do Gradiente Topológico), introduzido por Larrabide et al. (2009) foi implementado e otimizado para executar de forma paralela e em versão

*matrix-free*, o que permite utilizá-lo para reconstruir imagens de tamanho considerável, o que de outra forma não seria possível. Uma das vantagens deste método é que permite reutilizar uma reconstrução feita por outro método, por exemplo FBP ou FDK como condição inicial, e logo refinar esta reconstrução. Como possíveis trabalhos futuros relacionados ao método do TG, que por razões de tempo não puderam ser exploradas neste trabalho são: estudar a utilização de um coeficiente de perturbação  $k$  variável que tome proveito do módulo da sensibilidade e assim perturbar a solução de forma a alcançar a convergência mais rapidamente. Embora o método do TG tenha demonstrado ser o mais robusto perante corrupções nas projeções, a sua formulação não leva em conta o ruído, portanto outros trabalhos futuros focados em considerar ruído dentro da função objetivo poderiam melhorar os resultados do método nestas condições.

Em relação ao método variacional proposto neste trabalho, ficou demonstrada a sua potencialidade e robustez nos casos de projeções sem ruído e pouca quantidade de projeções em relação aos métodos empregados atualmente em escâneres de tomografia computadorizada. As implementações realizadas seguindo um esquema paralelo, com resolvidor algébrico iterativo (CG) *matrix-free* permitem compará-lo com os outros métodos estudados não só na qualidade de reconstrução mais também em recursos computacionais e, como mostrou-se na Seção 5.6, embora a implementação atual do método requeira mais memória e tempo por iteração, é capaz de reconstruir as estruturas de interesse em poucas iterações e com boa qualidade. Em contrapartida, a formulação inicialmente proposta era sensível a diferentes tipos de corrupção dos sinogramas como ruído, escala de reconstrução e quantidade de projeções muito baixas. Evidentemente, este tipo de perturbações devem ser contornadas pelo método para ser utilizado em projeções reais. Neste trabalho se propôs uma modificação do funcional original, que penaliza os saltos da imagem reconstruída, e demonstrou-se que a minimização deste novo funcional resulta robusta às corrupções nos dados, e o custo computacional adicional é desprezível. A adaptação do funcional para melhorar os resultados pe-

rante dados corruptos abre uma nova linha de trabalhos futuros, por exemplo a criação de esquemas de resolução iterativos que imponham a restrição de positividade da solução e parâmetros de relaxamento dependentes do ruído esperado nas projeções, por exemplo. A pesquisa de preconditionadores para matrizes cheias que possam reduzir os custos computacionais é outra ramificação interessante para a área de métodos numéricos. Embora neste trabalho se realizaram esforços para implementar de forma eficiente e paralela o algoritmo, ramificações na área de computação para otimizar o desempenho computacional também são trabalhos futuros desafiantes.

Cabe mencionar também que o trabalho que segue a partir do método variacional aqui proposto, é a sua generalização como metodologia de resolução do problema inverso da reconstrução a partir de projeções, e sua aplicação em problemas da área de tomografia não linear<sup>1</sup>. Em Natterer et al. (2001), comenta-se que a abordagem mais empregada neste tipo de problemas é a modelagem como problemas inversos de equações diferenciais parciais. A linearização destes modelos leva a problemas similares ao apresentado para raios-X, exceto que as linhas retas trocam-se por formas mais complicadas. Portanto, especializando o operador que modela a forma em que são obtidas as projeções, levaria teoricamente a formulações variacionais para reconstruir o objeto amostrado. Alguns problemas da tomografia não linear são a tomografia com *scattering*, tomografia óptica (raios infravermelhos), tomografia por impedância e tomografia por ultrassom.

É importante explicar que embora o enfoque variacional e o método do Gradiente Topológico, assim como os métodos iterativos em geral, estão longe de ser competitivos (em termos de custos computacionais) com os métodos padrão FBP e FDK usados nos equipamentos de obtenção de imagens convencionais, seu ganho em termos de qualidade de reconstrução, tolerância ao ruído e baixa quantidade de projeções (que em princípio permitiriam diminuir a dose de radiação ministrada ao paciente) são as principais motivações para estudá-los. Existem numerosos esfor-

---

<sup>1</sup> Técnicas de reconstrução tomográfica que requerem da resolução de problemas não lineares intrínsecos.

ços por parte da comunidade científica no desenvolvimento de métodos analíticos exatos, métodos iterativos e na otimização do desempenho em arquiteturas de *hardware* paralelo (Wang et al., 2008), no entanto os custos computacionais fazem com que atualmente sejam inviáveis para o uso clínico. Contudo, no contexto da modelagem do sistema cardiovascular humano, onde simulações hemodinâmicas podem consumir dias de cálculo em *clusters* de computadoras, custos elevados para reconstruir imagens mais acuradas tornam-se aceitáveis.

Por último, é importante mencionar que explorar alternativas aos métodos analíticos padrões, abre as portas para atacar outros problemas associados à reconstrução espaço-temporal. A possibilidade de reconstruir uma artéria em distintos instantes de tempo ao longo do ciclo cardíaco possibilitaria uma eventual caracterização das propriedades físicas da parede arterial, e isto levaria eventualmente a simulações hemodinâmicas paciente-específicas mais acuradas.

## 9.2 Conclusões relacionadas ao problema de segmentação

Nos últimos capítulos deste trabalho abordou-se o problema da segmentação de estruturas arteriais em imagens tridimensionais provenientes de estudos médicos 3DRA e CTA. Uma revisão bibliográfica da área, focada na aplicação da segmentação como passo prévio (e necessário) no estudo geométrico e hemodinâmico de estruturas arteriais, foi apresentada com o objetivo de justificar a escolha das metodologias baseadas em crescimento de região e em *Level Set*. Posteriormente, uma validação qualitativa das metodologias via um fantasma numérico foi apresentado, para mostrar que ambas metodologias de segmentação conseguem recuperar as principais características estruturais em condições de ruído similares.

Duas estratégias de segmentação foram exploradas neste trabalho, a primeira delas baseia-se em crescimento de região, e foi desenvolvida com o objetivo de utilizar a ferramenta ImageLab de forma direta, combinando filtros existentes na mesma. Este *pipeline* consegue resultados aceitáveis na segmentação de estruturas arteriais com bom contraste e intensidades relativamente homogêneas que



se encontram afastadas de estruturas ósseas ou aparelhos médicos como *clips* ou *coils*. A metodologia é de maior utilidade na segmentação simultânea de múltiplas artérias na região cerebral, onde o número de estruturas ósseas pode ser reduzido ao mínimo.

A segunda alternativa apresentada utiliza um método *Level Set* inicializado pela técnica de *colliding fronts*. Uma vantagem desta metodologia é a sua disponibilidade via o software VMTK, o que permitiu testar e utilizar o *pipeline* de forma direta. Como VMTK está construído a partir da biblioteca ITK, o mesmo *software* base do ImageLab, facilitará a posterior integração da metodologia dentro de este último. Outra vantagem dos métodos *Level Set* é que a incorporação da penalização de curvatura leva a iso-superfícies mais suaves, que facilitam o pós-processamento da malha para estudos geométricos e hemodinâmicos. Este *pipeline* mostrou os melhores resultados em condições de baixo contraste e proximidade entre estruturas ósseas e arteriais, para artérias de tamanho considerável. Estas vantagens são causadas pela boa inicialização que resulta do método *colliding fronts*. Em contrapartida, usar esta inicialização resulta trabalhosa para um alto número de segmentos arteriais, por exemplo na região cerebral. Neste local anatômico, pode-se inicializar o método de *Level Set* via *thresholding*, resultando na inclusão severa de estruturas ósseas.

Para sumarizar, a escolha de uma metodologia de segmentação depende do número de artérias que se deseja segmentar, da proximidade com estruturas ósseas, e do contraste. Estes fatores permitem fazer as seguintes recomendações em função de regiões anatômicas de interesse.

- Segmentação via crescimento de região: Usar para segmentar múltiplas artérias na região cerebral, ou na segmentação da artéria carótida na zona do pescoço até a região cavernosa da base do crânio.
- Segmentação via *Level Set* com inicialização de *colliding fronts*: Usar em todas as regiões anatômicas, sempre que o número de estruturas arteriais seja baixo. Isto descarta a região cerebral, com exceção do caso em que

o objetivo seja segmentar poucas artérias específicas. Nesta situação uma inicialização via *colliding fronts* é viável, tornando a segmentação mais robusta.

Como trabalhos futuros na área de segmentação de estruturas arteriais, é importante abordar o problema da definição automática de parâmetros que atualmente são escolhidos via prova e erro. Para isto é necessária a aplicação das metodologias em um conjunto maior de imagens, assim como a standardização de intensidades, usando por exemplo o trabalho de Bogunovic et al. (2008). Uma possível forma de contornar problemas relacionados à presença de estruturas ósseas é explorar a possibilidade de realizar diferenças entre imagens prévia injeção de contraste arterial e pós-injeção. Em Lell et al. (2005) sugere-se a utilização de registro rígido de imagens com esta finalidade, a desvantagem é o incremento na dose de radiação para o paciente (dois escâneres em lugar de um). Por fim, seria interessante realizar uma comparação entre as diferentes metodologias consideradas como estado da arte, usando um mesmo conjunto de imagens médicas e/ou fantasmas numéricos/físicos. Um estudo comparativo deste tipo não foi realizado até o momento.

# Referências Bibliográficas

E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, e D. Sorensen. **LAPACK Users' Guide**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, third edição, 1999. ISBN 0-89871-447-8 (paperback).

Luca Antiga. **Patient-Specific Modeling of Geometry and Blood Flow in Large Arteries**. 2002.

Luca Antiga, Marina Piccinelli, Lorenzo Botti, Bogdan Ene-Iordache, Andrea Remuzzi, e David A. Steinman. An image-based modeling framework for patient-specific computational hemodynamics. **Medical & Biological Engineering & Computing**, 46(11):1097–1112, Novembro 2008. ISSN 0140-0118, 1741-0444.

Gilles Aubert e Pierre Kornprobst. **Mathematical problems in image processing : partial differential equations and the calculus of variations**. Springer, New York, 2002. ISBN 0387953264 9780387953267.

P.J. Blanco. **Incompatibilidade cinemática, imersão de domínios e modelagem constitutiva de multiescala: nexos com a modelagem do sistema cardiovascular**. Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2008.

H. Bogunovic, J.M. Pozo, M.C. Villa-Uriol, C.B.L.M. Majoie, R. van den Berg, H.A.F.G. van Andel, J.M. Macho, J. Blasco, L. San Román, e A.F. Frangi. Automated segmentation of cerebral vasculature with aneurysms in 3DRA and

- TOF-MRA using geodesic active regions: an evaluation study. **Medical Physics**, 38:210, 2011.
- Hrvoje Bogunovic, Alessandro G. Radaelli, Mathieu De Craene, David Delgado, e Alejandro F. Frangi. Image intensity standardization in 3D rotational angiography and its application to vascular segmentation. volume 6914, páginas 691419–691419–11. SPIE, 2008.
- Jerrold T Bushbert. **The essential physics of medical imaging**. Lippincott Williams and Wilkins, Philadelphia, 2001. ISBN 0683301187 9780683301182.
- V. Caselles, R. Kimmel, e G. Sapiro. Geodesic active contours. **International journal of computer vision**, 22(1):61?79, 1997. URL <http://www.springerlink.com/index/W63MP82M702NK816.pdf>.
- M. A. Castro, C. M. Putman, e J. R. Cebal. Computational fluid dynamics modeling of intracranial aneurysms: effects of parent artery segmentation on intra-aneurysmal hemodynamics. **American Journal of Neuroradiology**, 27(8):1703?1709, 2006a.
- Marcelo A. Castro, Christopher M. Putman, e Juan R. Cebal. Patient-specific computational modeling of cerebral aneurysms with multiple avenues of flow from 3D rotational angiography images. **Academic Radiology**, 13(7):811–821, Julho 2006b. ISSN 10766332.
- J. R. Cebal, F. Mut, J. Weir, e C. Putman. Quantitative characterization of the hemodynamic environment in ruptured and unruptured brain aneurysms. **American Journal of Neuroradiology**, Dezembro 2010. ISSN 0195-6108, 1936-959X.
- Juan Raul Cebal e Rainald Löhner. From medical images to anatomically accurate finite element grids. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 51(8):985–1008, Julho 2001. ISSN 00295981, 10970207.

- Herng-Hua Chang, Gary R. Duckwiler, Daniel J. Valentino, e Woei Chyn Chu. Computer-assisted extraction of intracranial aneurysms on 3D rotational angiograms for computational fluid dynamics modeling. **Medical Physics**, 36(12): 5612, 2009. ISSN 00942405.
- Herng-Hua Chang, Daniel J Valentino, Gary R Duckwiler, e Arthur W Toga. Segmentation of brain MR images using a charged fluid model. **IEEE transactions on bio-medical engineering**, 54(10):1798–1813, Outubro 2007. ISSN 0018-9294. PMID: 17926678.
- Robert Cierniak. **X-Ray computed tomography in biomedical engineering**. Springer,, New York, 2011. ISBN 9780857290274.
- A. M. Cormack. Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications. **Journal of Applied Physics**, 34(9):2722, 1963. ISSN 00218979.
- M Defrise e R Clack. A cone-beam reconstruction algorithm using shift-variant filtering and cone-beam backprojection. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, 13(1):186–195, 1994. ISSN 0278-0062. PMID: 18218496.
- R Fahrig, A J Fox, S Lownie, e D W Holdsworth. Use of a c-arm system to generate true three-dimensional computed rotational angiograms: preliminary in vitro and in vivo results. **AJNR. American Journal of Neuroradiology**, 18(8):1507–1514, Setembro 1997. ISSN 0195-6108. PMID: 9296192.
- Timothy G Feeman. **The mathematics of medical imaging a beginner's guide**. Springer, New York, 2010. ISBN 9780387927121 0387927123.
- L.A. Feldkamp, L.C. Davis, e J.W. Kress. Practical Cone-Beam algorithm. **Optical Society of America**, Junho 1984.
- Azadeh Firouzian, Rashindra Manniesing, Zwenneke H. Flach, Roelof Risselada, Fop van Kooten, Miriam C.J.M. Sturkenboom, Aad van der Lugt, e Wiro J.

- Niessen. Intracranial aneurysm segmentation in 3D CT angiography: Method and quantitative validation with and without prior noise filtering. **European Journal of Radiology**, 79(2):299–304, Agosto 2011. ISSN 0720048X.
- A. J. Geers, I. Larrabide, A. G. Radaelli, H. Bogunovic, H. A. F. G. van Andel, C. B. Majoie, e A. F. Frangi. Reproducibility of image-based computational hemodynamics in intracranial aneurysms: comparison of CTA and 3DRA. In: **Biomedical Imaging: From Nano to Macro, 2009. ISBI'09. IEEE International Symposium on**, página 610?613, 2009.
- L. W. Goldman. Principles of CT and CT technology. **Journal of Nuclear Medicine Technology**, 35(3):115–128, Setembro 2007. ISSN 0091-4916.
- M Hernandez e A Frangi. Non-parametric geodesic active regions: Method and evaluation for cerebral aneurysms segmentation in 3DRA and CTA. **Medical Image Analysis**, 11(3):224–241, Junho 2007. ISSN 13618415.
- G N Hounsfield. Historical notes on computerized axial tomography. **Journal of the Canadian Association of Radiologists**, 27(3):135–142, Setembro 1976. ISSN 0008-2902. PMID: 789383.
- Jiang Hsieh. **Computed tomography principles, design, artifacts, and recent advances**. Wiley Interscience; SPIE Press,, Hoboken, N.J. ;Bellingham, Wash. :, 2 edição, 2009. ISBN 9780470563533.
- Luis Ibáñez e Insight Software Consortium. **The ITK software guide : updated for ITK version 2.4**. Kitware, [Clifton Park, N.Y.], 2005. ISBN 1930934157 9781930934153.
- Intel®MKL. Mkl, 2012. URL <http://software.intel.com/en-us/articles/intel-mkl/>.
- Anil K Jain. **Fundamentals of digital image processing**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989. ISBN 0133361659 9780133361650 0133325784 9780133325782.

- C. Kirbas e F. Quek. A review of vessel extraction techniques and algorithms. **ACM computing surveys**, 36(2):81-121, 2004.
- I. Larrabide. **Image processing via topological derivative and its applications to Human Cardiovascular System modelling and simulation**. Tese de Doutorado, Laboratório Nacional de Computação Científica, 2007.
- I. Larrabide, A.A. Novotny, R.A. Feijóo, e R. de Souza Leão Lima. A simple method for tomography reconstruction. **Inverse Problems in Science and Engineering**, 17:365–380, Abril 2009. ISSN 1741-5977, 1741-5985.
- M. Lell, K. Anders, E. Klotz, H. Ditt, W. Bautz, e B. F. Tomandl. Clinical evaluation of bone-subtraction CT angiography (BSCTA) in head and neck imaging. **European Radiology**, 16(4):889–897, Novembro 2005. ISSN 0938-7994, 1432-1084.
- David Lesage, Elsa D. Angelini, Isabelle Bloch, e Gareth Funka-Lea. A review of 3D vessel lumen segmentation techniques: Models, features and extraction schemes. **Medical Image Analysis**, 13(6):819–845, Dezembro 2009. ISSN 13618415.
- William E. Lorensen e Harvey E. Cline. Marching cubes: A high resolution 3d surface construction algorithm. **SIGGRAPH Comput. Graph.**, 21(4):163–169, Agosto 1987. ISSN 0097-8930.
- R. Manniesing, M. A. Viergever, A. van der Lugt, e W. J. Niessen. Cerebral arteries: Fully automated segmentation from CT angiography—a feasibility study. **Radiology**, 247(3):841–846, Junho 2008. ISSN 0033-8419, 1527-1315.
- Rashindra Manniesing, Max A Viergever, e Wiro J Niessen. Vessel axis tracking using topology constrained surface evolution. **IEEE transactions on medical imaging**, 26(3):309–316, Março 2007. ISSN 0278-0062. PMID: 17354637.
- Parinaz Massoumzadeh, Steven Don, Charles F. Hildebolt, Kyongtae T. Bae, e

- Bruce R. Whiting. Validation of CT dose-reduction simulation. **Medical Physics**, 36(1), 2009. ISSN 00942405.
- Amar Mitiche. **Variational and level set methods in image segmentation**. Springer,, 2010. ISBN 9783642153525.
- F Natterer, Frank Wübbeling, e Knovel (Firm). **Mathematical methods in image reconstruction**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2001. ISBN 9781613443217 1613443218 9780898718324 0898718325 0898714729 9780898714722.
- P. Perona e J. Malik. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion. **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, 12(7):629–639, Julho 1990. ISSN 01628828.
- Oleg S Pinykh. **Digital imaging and communications in medicine (DICOM) a practical introduction and survival guide**. Springer, Berlin; Heidelberg, 2012. ISBN 9783642108501 3642108504.
- Marina Piccinelli, David A. Steinman, Yiemeng Hoi, Frank Tong, Alessandro Veneziani, e Luca Antiga. Automatic neck plane detection and 3D geometric characterization of aneurysmal sacs. **Annals of Biomedical Engineering**, 40(10):2188–2211, Abril 2012. ISSN 0090-6964, 1573-9686.
- Hough PVC. Methods and means for recognizing complex patterns. **U.S. patent 3,069,654**, 1962.
- J. Radon. On the determination of functions from their integral values along certain manifolds. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, 5(4):170–176, Dezembro 1986. ISSN 0278-0062, 1558-254X.
- R A Robb. The dynamic spatial reconstructor: An X-Ray Video-Fluoroscopic CT scanner for dynamic volume imaging of moving organs. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, 1(1):22–33, 1982. ISSN 0278-0062. PMID: 18238255.



Marina de Sa Rebelo, Sergio Shiguemi, Lincoln de Assis Moura Jr, Eduardo Tavares, e Marco Antonio. Identification of structures in medical images. In: Okechukwu Felix Erundu (editor), **Medical Imaging**. InTech, Dezembro 2011. ISBN 978-953-307-774-1.

Kris Buschelman Victor Eijkhout William D. Gropp Dinesh Kaushik Matthew G. Knepley Lois Curfman McInnes Barry F. Smith Hong Zhang Satish Balay, Jed Brown. PETSc users manual. Relatório Técnico ANL-95/11 - Revision 3.3, Argonne National Laboratory, 2012a.

Kris Buschelman William D. Gropp Dinesh Kaushik Matthew G. Knepley Lois Curfman McInnes Barry F. Smith Hong Zhang Satish Balay, Jed Brown. PETSc Web page, 2012b. URL <http://www.mcs.anl.gov/petsc>.

Lois Curfman McInnes Barry F. Smith Satish Balay, William D. Gropp. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In: E. Arge, A. M. Bruaset, e H. P. Langtangen (editores), **Modern Software Tools in Scientific Computing**, páginas 163–202. Birkhäuser Press, 1997.

James Albert Sethian. **Level set methods and fast marching methods : evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science**. Cambridge University Press, Cambridge, 1999. ISBN 0521645573 9780521645577.

L.A. Shepp e B.F. Logan. The fourier reconstruction of a head section. **IEEE Transactions on Nuclear Science**, NS-21:21–43, 1974.

R. L. Siddon. Fast calculation of the exact radiological path for a three-dimensional CT array. **Medical Physics**, 12(2):251–255, 1985.

Henrik Turbell. **Cone-beam reconstruction using filtered backprojection**. 2001. ISBN 9789172199194.

Heang K. Tuy. An inversion formula for Cone-Beam reconstruction. **SIAM Journal on Applied Mathematics**, 43(3):546, 1983. ISSN 00361399.

- W.J. van Rooij, M.E. Sprengers, A.N. de Gast, J.P.P. Peluso, e M. Sluzewski. 3D rotational angiography: The new gold standard in the detection of additional intracranial aneurysms. **American Journal of Neuroradiology**, 29(5):976–979, Fevereiro 2008. ISSN 0195-6108, 1936-959X.
- Ge Wang, Hengyong Yu, e Bruno De Man. An outlook on x-ray CT research and development. **Medical Physics**, 35(3):1051, 2008. ISSN 00942405.
- R. T. Whitaker e X. Xue. Variable-conductance, level-set curvature for image denoising. In: **Image Processing, 2001. Proceedings. 2001 International Conference on**, volume 3, página 142?145, 2001.
- B. R. Whiting, Parinaz Massoumzadeh, Orville A. Earl, Joseph A. O’Sullivan, Donald L. Snyder, e Jeffrey F. Williamson. Properties of preprocessed sinogram data in x-ray computed tomography. **Medical Physics**, 33(9), 2006. ISSN 00942405.
- B.R. Whiting. Signal statistics in x-ray computed tomography. volume 4682, páginas 53–60. SPIE, 2002.
- P. J. Yim, J. J. Cebra, R. Mullick, H. B. Marcos, e P. L. Choyke. Vessel surface reconstruction with a tubular deformable model. **Medical Imaging, IEEE Transactions on**, 20(12):1411?1421, 2001.
- P.J. Yim, G. Boudewijn, C. Vasbinder, V.B. Ho, e P.L. Choyke. Isosurfaces as deformable models for magnetic resonance angiography. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, 22(7):875–881, Julho 2003. ISSN 0278-0062.

# Apêndice A

## Especificação de fantasmas matemáticos

Um dos fantasmas matemáticos mais usado na avaliação de métodos de reconstrução, e considerado um *standard* para tomografia computadorizada, foi proposto por Shepp e Logan (1974) para simular uma seção transversal de uma cabeça. Este modelo consiste de um conjunto de elementos elípticos, cada um com um coeficiente de atenuação de valor constante. A equação (A.1) descreve os parâmetros para uma elipse centrada no ponto  $(x_0, y_0)$  e rotacionada sobre seu centro um ângulo  $\alpha_0$

$$\frac{((x - x_0) \cos \alpha_0 + (y - y_0) \sin \alpha_0)^2}{a^2} + \frac{(-(x - x_0) \sin \alpha_0 + (y - y_0) \cos \alpha_0)^2}{b^2} \leq 1 \quad (\text{A.1})$$

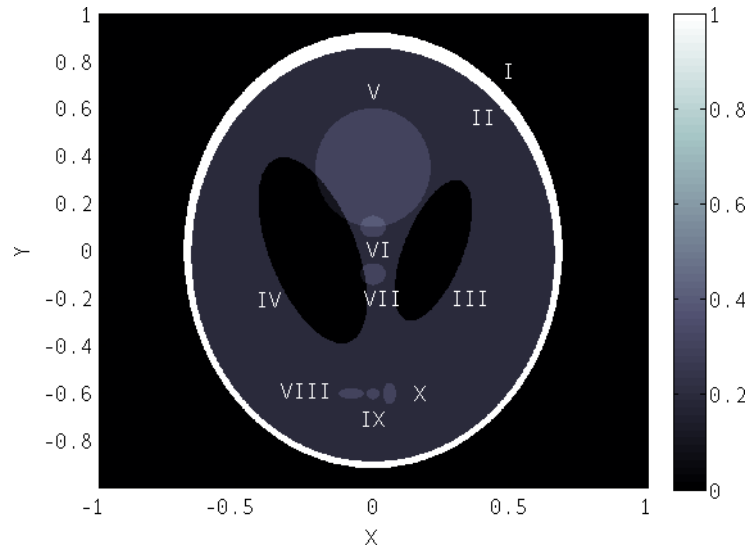
Na criação do fantasma, as coordenadas da imagem são escaladas ao intervalo  $[-1, 1]$  em ambos eixos, e o valor de cada *pixel*  $(x, y)$  é calculado como o somatório das distribuições  $\mu_i(x, y)$  (coeficiente de atenuação da elipse  $i$ ) definidas como

$$\mu_i(x, y) = \begin{cases} \mu_i^{\text{const}} & \text{Se o } \textit{pixel} (x, y) \text{ satisfaz (A.1).} \\ 0 & \text{Caso contrario.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A Tabela A.1 apresenta o conjunto de parâmetros para cada uma das dez elipses do fantasma apresentado na Figura A.1.

Elipse	Coordenadas do centro		Eixo maior	Eixo menor	Ângulo de rotação (graus)	Valor do <i>voxel</i>
	$x_0$	$y_0$				
I	0.0000	0.0000	0.6900	0.9200	0.0	1.00
II	0.0000	-0.0184	0.6624	0.8740	0.0	-0.8
III	0.2200	0.0000	0.1100	0.3100	-18.0	-0.2
IV	-0.2200	0.0000	0.1600	0.4100	18.0	-0.2
V	0.0000	0.3500	0.2100	0.2500	0.0	0.1
VI	0.0000	0.1000	0.0460	0.0460	0.0	0.1
VII	0.0000	-0.1000	0.0460	0.0460	0.0	0.1
VIII	-0.0800	-0.6050	0.0460	0.0230	0.0	0.1
IX	0.0000	-0.6050	0.0230	0.0230	0.0	0.1
X	0.0600	-0.6050	0.0230	0.0460	0.0	0.1

**Tabela A.1:** Parâmetros das elipses que compõem o fantasma matemático de Shepp-Logan em 2D.



**Figura A.1:** Fantasma de Shepp-Logan em 2D, dimensão  $1024 \times 1024$ .

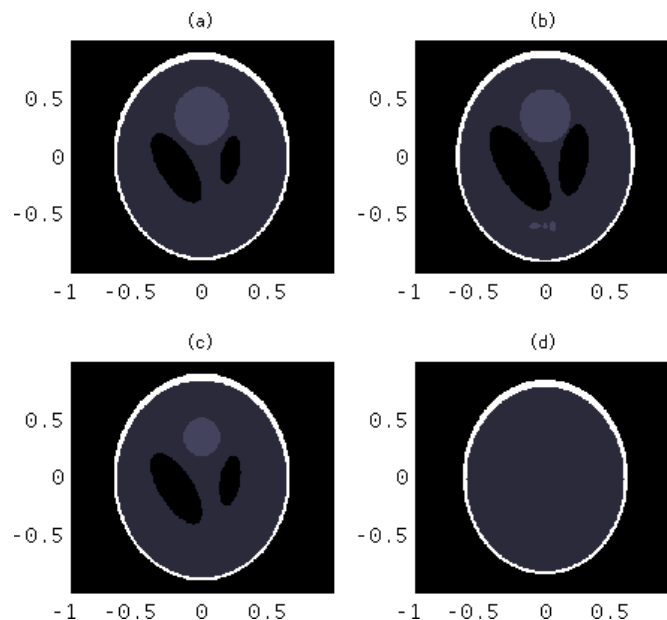
Nos estudos com geometrias de amostragem *Cone-Beam*, é necessário definir fantasmas matemáticos em três dimensões. A extensão direta do fantasma de Shepp-Logan gera-se trocando as elipses por elipsoides

$$\frac{((x - x_0) \cos \alpha_0 + (y - y_0) \sin \alpha_0)^2}{a^2} + \frac{(-(x - x_0) \sin \alpha_0 + (y - y_0) \cos \alpha_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} \leq 1 \quad (\text{A.3})$$

Elipsoide	Coordenadas do centro			Eixo x	Eixo y	Eixo z	Ângulo de	Valor do
	$x_0$	$y_0$	$z_0$				rotação	
	$x_0$	$y_0$	$z_0$	$a$	$b$	$c$	$\alpha_0$	
I	0.00	0.0000	0.00	0.6900	0.920	0.81	0.0	1.0
II	0.00	-0.0184	0.00	0.6624	0.874	0.78	0.0	-0.8
III	0.22	0.0000	0.00	0.1100	0.310	0.22	-18.0	-0.2
IV	-0.22	0.0000	0.00	0.1600	0.410	0.28	18.0	-0.2
V	0.00	0.3500	-0.15	0.2100	0.250	0.41	0.0	0.1
VI	0.00	0.1000	0.25	0.0460	0.046	0.05	0.0	0.1
VII	0.00	-0.1000	0.25	0.0460	0.046	0.05	0.0	0.1
VIII	-0.08	-0.6050	0.00	0.0460	0.023	0.05	0.0	0.1
IX	0.00	-0.6050	0.00	0.0230	0.023	0.02	0.0	0.1
X	0.06	-0.6050	0.00	0.0230	0.046	0.02	0.0	0.1

**Tabela A.2:** Parâmetros dos elipsoides que compõem o fantasma matemático de Shepp-Logan em 3D.

Sendo que cada elipsoide é tomado como um volume sólido, com coeficiente de atenuação constante. A Tabela A.2 descreve cada um dos parâmetros para o fantasma tridimensional resultado de converter as elipses do fantasma bidimensional em elipsoides. A figura A.2 apresenta alguns planos sobre o eixo  $Z$ .



**Figura A.2:** Fantasma de Shepp-Logan em 3D de dimensão  $256 \times 256 \times 256$ . Planos  $z = 108$  (a),  $z = 128$  (b),  $z = 148$  (c),  $z = 168$  (d).



# Apêndice B

## Conjunto de dados de teste

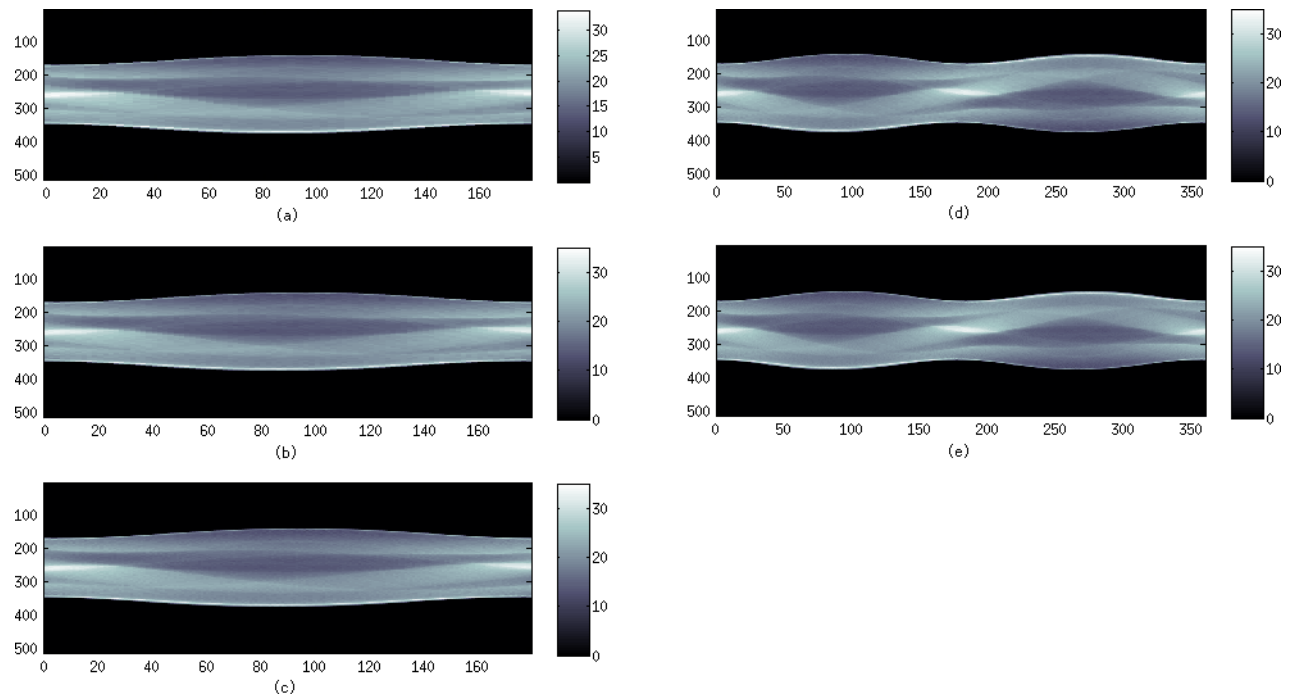
A Tabela B.1 sumariza os parâmetros usados na geração dos sinogramas de teste, a partir do fantasma de Shepp-Logan definido no apêndice A, os conjuntos de projeções são apresentados nas Figuras B.1 e B.2.

Os nomes dos sinogramas seguem a nomenclatura  $S_nD_{ac-np-ea}$ . Onde  $n$  é a dimensionalidade do fantasma,  $ac$  é o ângulo coberto na projeção,  $np$  é o número de projeções e  $ea$  é o espaçamento do ângulo entre projeções sucessivas.

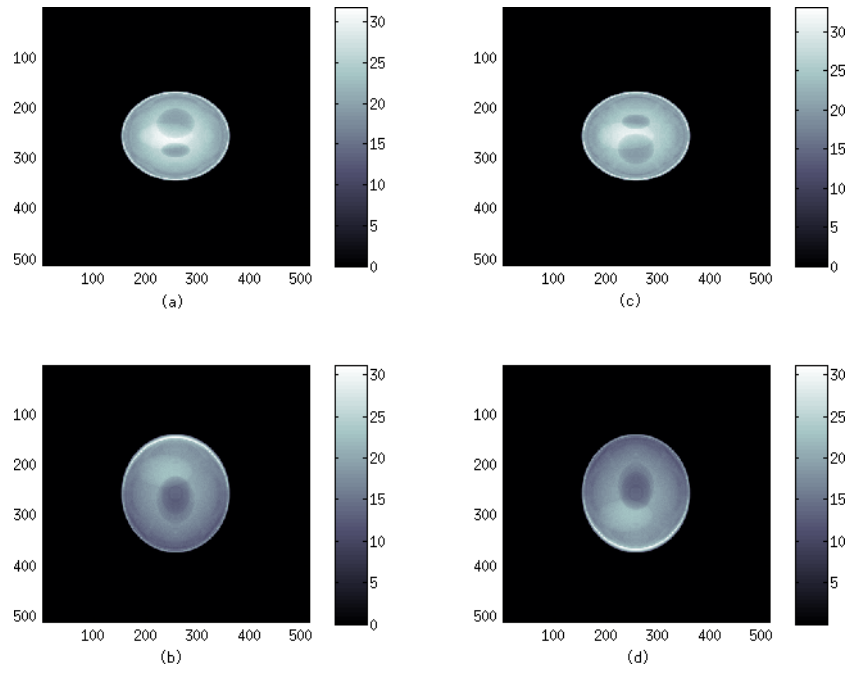
<b>Reconstrução em 2D</b>			
<b>Dim. do fantasma</b>	$256 \times 256$	<b>Espaç. do fantasma</b>	0.5 mm
<b>Dim. do detector</b>	512	<b>Espaç. do detector</b>	0.79 mm
<b>Dist. fonte-isocentro</b>	750 mm	<b>Dist. fonte-detetor</b>	1200 mm
<b>Sinograma ID</b>		<b># Proj.</b>	<b>Espaç.</b>
S2D360-1080-0.3		1080	$1/3^\circ$
S2D360-720-0.5		720	$1/2^\circ$
S2D360-360-1		360	$1^\circ$
S2D360-180-2		180	$2^\circ$
S2D180-180-1		180	$1^\circ$
S2D180-090-2		90	$2^\circ$
S2D180-060-3		60	$3^\circ$
<b>Reconstrução em 3D</b>			
<b>Dim. do fantasma</b>	$256 \times 256 \times 256$	<b>Espaç. do fantasma</b>	0.5 mm
<b>Dim. do detector</b>	$512 \times 512$	<b>Espaç. do detector</b> ( $t, s$ )	(0.79, 0.79) mm
<b>Dist. fonte-isocentro</b>	750 mm	<b>Dist. fonte-detetor</b>	1200 mm
<b>Sinograma ID</b>		<b># Proj.</b>	<b>Espaç.</b>
S3D360-360-1		360	$1^\circ$
S3D360-180-2		180	$2^\circ$
S3D180-180-1		180	$1^\circ$
S3D180-090-2		90	$2^\circ$
S3D180-060-3		60	$3^\circ$

**Tabela B.1:** Configuração do conjunto de sinogramas.





**Figura B.1:** Sinogramas gerados com o método de Siddon para o fantasma de Shepp-Logan em 2D, a partir dos parâmetros da Tabela B.1. No eixo- $x$  o ângulo de projeção  $\theta$  (em graus), no eixo- $y$  o detector  $t$ . (a) S2D180-60-3, (b) S2D180-90-2, (c) S2D180-180-1, (d) S2D360-180-2, (e) S2D360-360-1.



**Figura B.2:** Sinogramas gerados com o método de Siddon para o fantasma de Shepp-Logan em 3D, a partir dos parâmetros da Tabela B.1. No eixo- $x$  o detetor  $s$ , no eixo- $y$  o detetor  $t$ . (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = 90$ , (c)  $\theta = 180$ , (d)  $\theta = 270$ .

# Apêndice C

## Modelo de ruído

Nos equipamentos de CT existem duas fontes de ruído principais, o denominado ruído estatístico dos fótons, e o ruído eletrônico. O ruído eletrônico é o resultado de flutuações eletrônicas nos componentes do detetor. O ruído estatístico dos fótons corresponde-se com o ruído *quantum* relacionado ao mecanismo de interação dos raios-X com a matéria, e depende de forma inversa da intensidade da fonte de radiação (o ruído aumenta quando a intensidade da fonte diminui). Existem esforços para melhorar o modelo de detecção da radiação-X que consideram, por exemplo, *beams* policromáticos e detetores realistas (Whiting, 2002). Estes modelos podem ser incorporados em métodos de reconstrução iterativos (como ponderações ou penalizações em função ao ruído), ou para gerar modelos de ruído sofisticados na simulação de redução de doses de radiação (Massoumzadeh et al., 2009).

Considerando o modelo de radiação-X apresentado na Seção 3.1, somado à natureza estatística tipo Poisson dos detetores de raios-X tipo *photon-counting* (Bushbert, 2001), uma metodologia para simular o ruído nos sinogramas associada às doses de radiação é proposta a continuação. Na mesma, só é modelado o ruído *quantum*, o ruído eletrônico é descartado por ser pequeno, e significativo só frente a situações de sinais com intensidade muito baixas (Whiting et al., 2006).

Seja  $I$  a intensidade, em termos de *quantum*, do sinal medido em um detetor determinada pela equação (3.1) tal que

$$I = I_0 e^{-\int_L \mu(\mathbf{x}) d\ell} = I_0 e^{-A}$$

$$A = -\ln \frac{I}{I_0}$$

onde  $A$  é a atenuação equivalente e calcula-se mediante *Forward Projection* para os fantasmas ou como  $A = -\ln \frac{I}{I_0}$  para imagens médicas. Em um escâner tomográfico, a intensidade inicial se pode calcular em função da corrente<sup>1</sup> usada na geração da radiação, o tempo de exposição, o tamanho do *detector row collimation*<sup>2</sup> e uma constante dependente do escâner que relaciona a corrente com a *quantum* de fótons (Massoumzadeh et al., 2009). Neste modelo não se considera o potencial da fonte,<sup>3</sup> que equivale a assumir que o espectro de energia segue uma distribuição *delta de Dirac*, que produz uma influência equivalente a multiplicar por uma constante (Whiting et al., 2006), neste caso unitária. Logo, a intensidade se pode expressar como

$$I_0 = KCFt \tag{C.1}$$

onde  $F$  é a corrente da fonte,  $C$  é a área do *detector row collimation*,  $t$  é o tempo de exposição, e  $K$  é uma constante dependente do escâner que pode ser calculada a partir de medições experimentais (Massoumzadeh et al., 2009). Na Seção C.1 se fornecem os valores adotados para cada parâmetro na geração de ruído.

Interpretando  $I$  como a meia da intensidade registrada em um detetor (Bushbert, 2001), o desvio padrão  $\sigma$  na medição define-se como

$$\sigma = \sqrt{I}$$

O ruído relativo definido-se como o coeficiente de variação (COV)

---

<sup>1</sup> Conhecido como *tube current*, é um parâmetro dos escâneres que controla corrente (medida em mA) que passa pela fonte. A relação entre a corrente e a quantidade de fótons gerados pela fonte é linear.

<sup>2</sup> O *detector row collimation*, também chamado *detector row aperture* é uma placa de um material com alto coeficiente de absorção colocado diante do detetor, com o objetivo de filtrar a radiação, definindo o tamanho da amostra.

<sup>3</sup> É um parâmetro do escâner que controla a diferença de potencial (em KeV) usada para gerar a radiação-X, relaciona-se com a energia dos fótons produzidos, uma maior energia implica em uma melhor capacidade de penetração dos raios.

$$\text{COV} = \frac{\sigma}{I} = \frac{1}{\sqrt{I}} = \frac{1}{\sqrt{I_0}e^{-\frac{1}{2}A}} \quad (\text{C.2})$$

O inverso do ruído relativo é o *Signal to Noise Ratio* (SNR)

$$\text{SNR} = \frac{I}{\sigma} = \sqrt{I} = \sqrt{I_0}e^{-\frac{1}{2}A} \quad (\text{C.3})$$

Note-se que para duplicar o SNR em uma imagem, a intensidade  $I_0$  tem que ser quadruplicada, o que aumenta a doses de radiação no paciente quatro vezes, e diminui o erro relativo à metade.

Uma medição ruidosa  $I^r$  de um detetor pode ser gerada somando um valor aleatório proporcional ao ruído, tal que

$$\begin{aligned} I^r &= I + \sigma G \\ &= I_0e^{-A} + \sqrt{I_0}e^{-\frac{1}{2}A}G \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

onde  $G$  é um número gerado aleatoriamente obedecendo uma distribuição Gaussiana (aproximação da distribuição de Poisson) com média zero e desvio unitário. O ultimo passo é aplicar o logaritmo, para obter uma atenuação equivalente com ruído  $A^r$  tal que

$$A^r = -\ln \frac{I^r}{I_0} \quad (\text{C.5})$$

Para avaliar os algoritmos em relação ao ruído, os sinogramas especificados no Apêndice B foram modificados usando as equações (C.4) e (C.5), com distintos graus de ruído, gerando assim um conjunto de dados de teste com ruído<sup>4</sup>, especificado na Seção C.1.

### C.1 Parâmetros na geração de ruído

A intensidade inicial da fonte, definida em termos de quantum (Massoumzadeh et al., 2009) é

---

<sup>4</sup> A nomenclatura usada para os sinogramas foi estendida com os caracteres  $-Ii$ , donde  $i$  é a energia  $I_0$  usada na simulação do ruído

$$I_0 = KC Ft$$

onde  $F$  é a corrente da fonte,  $C$  é a área do *detector row collimation*,  $t$  é o tempo de exposição, e  $K$  é uma constante dependente do escâner que pode ser calculada a partir de medições experimentais. Com a finalidade de gerar ruído nas *Forward Projections*, se assumiram os seguintes valores no cálculo de  $I_0$ :  $t = 0.02s$ ,  $C = 0.6241mm^2$ , e  $K = 3288 \times 10^4 \frac{1}{mm^2 mAs}$ . O valor de  $F$  definirá o grau do ruído simulado. Neste trabalho se usaram três graus de ruído correspondentes a valores de  $F$  iguais a 150, 300 e 500  $mA$ . A nomenclatura do conjunto de dados de teste definida no Apêndice B foi estendida com os caracteres - $Fi$ , donde  $i$  é o valor de  $F$  usada na simulação do ruído. As Figuras C.1 e C.2 apresentam exemplos de sinogramas com distintos graus de ruído.

É de importância comentar que após uma revisão bibliográfica, não se conseguiu achar conjuntos de sinogramas (numéricos ou experimentais) para comparar o modelo de ruído proposto. Geralmente os trabalhos referentes a métodos de reconstrução avaliam a tolerância ao ruído simulando este último como ruído branco gaussiano, ou centrando-se na robustez do método perante baixo número de projeções (Larrabide et al., 2009). Enquanto os trabalhos que propõem modelos de ruído orientam-se na redução de doses, trabalhado diretamente com escâneres e usando modelos que simulam a utilização de diferentes intensidades de fonte (Whiting et al. (2006), (Massoumzadeh et al., 2009)).

A Tabela C.1 apresenta o *Signal to Noise Ratio* (SNR) dos sinogramas ruidosos (no espaço dos coeficientes de atenuação) gerados com o modelo proposto. O SNR nas projeções foi calculado como

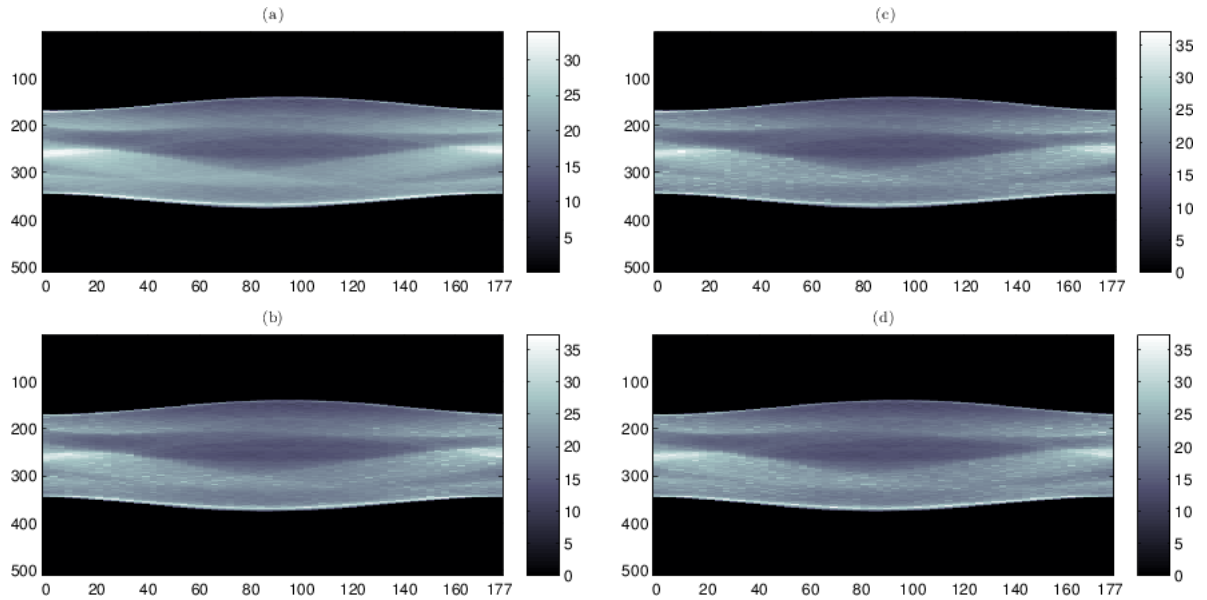
$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\bar{\mathbf{s}}^2}{\bar{\mathbf{n}}^2} \quad (C.6)$$

onde  $\bar{\mathbf{s}}^2$  é a media aritmética do quadrado do sinograma, e  $\bar{\mathbf{n}}^2$  é a media aritmética do quadrado do ruído, tal que  $\mathbf{n}$  obtêm-se restando o sinograma original e o

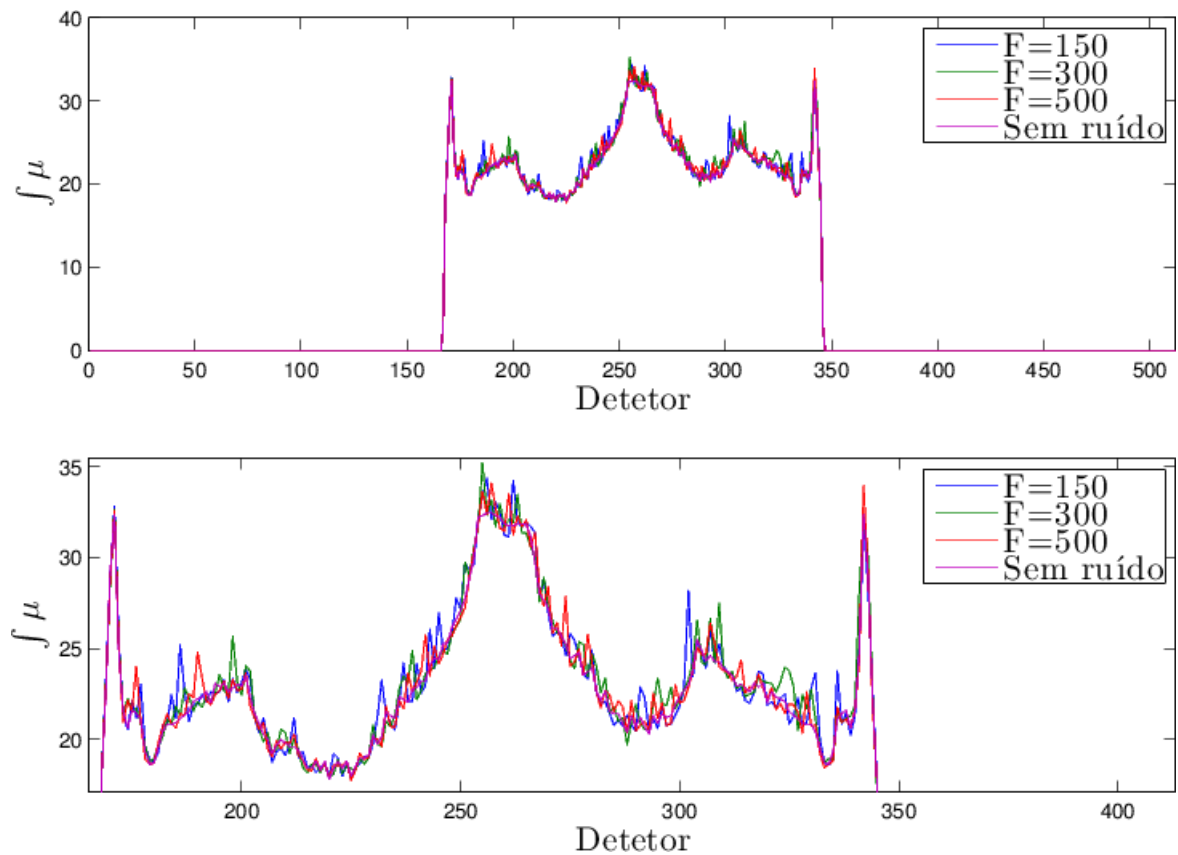
sinograma ruidoso gerado.

<b>Sinograma (2D)</b>	<b>SNR</b>	<b>Sinograma (3D)</b>	<b>SNR</b>
S2D180-060-3-I150	28.7305 dB	S3D180-060-3-I150	28.6939 dB
S2D180-060-3-I300	29.4652 dB	S3D180-060-3-I300	29.1300 dB
S2D180-060-3-I500	30.2012 dB	S3D180-060-3-I500	30.0604 dB
S2D180-090-2-I150	28.8257 dB	S3D180-090-2-I150	28.3373 dB
S2D180-090-2-I300	29.3944 dB	S3D180-090-2-I300	29.5116 dB
S2D180-090-2-I500	30.3552 dB	S3D180-090-2-I500	29.6706 dB
S2D180-180-1 -I150	28.6654 dB	S3D180-180-1-I150	28.8149 dB
S2D180-180-1 -I300	29.3871 dB	S3D180-180-1-I300	29.5167 dB
S2D180-180-1 -I500	29.9288 dB	S3D180-180-1-I500	30.1029 dB
S2D360-180-2-I150	28.7633 dB	S3D360-180-2-I150	28.7915 dB
S2D360-180-2-I300	29.4207 dB	S3D360-180-2-I300	29.5176 dB
S2D360-180-2-I500	30.1779 dB	S3D360-180-2-I500	30.1036 dB
S2D360-360-1-I150	28.6108 dB	S3D360-360-1-I150	28.8017 dB
S2D360-360-1-I300	29.3309 dB	S3D360-360-1-I300	29.5157 dB
S2D360-360-1-I500	29.8935 dB	S3D360-360-1-I500	30.0998 dB

**Tabela C.1:** SNR dos sinogramas ruidosos gerados, no espaço dos coeficientes de atenuação.



**Figura C.1:** Sinograma S2D180-60-3 modificado com distintos graus de ruído. No eixo- $x$  o ângulo de projeção  $\theta$  (em graus), no eixo- $y$  o detector  $t$ . (a) Sem ruído, (b)  $F = 500mA$ , (c)  $F = 300mA$ , (d)  $F = 150mA$ .



**Figura C.2:** Projeção  $\theta = 0$  do sinograma S2D180-60-3. No eixo- $x$  o o detector  $t$ , no eixo- $y$  o coeficiente de atenuação equivalente medido nos detectores.





# Apêndice D

## *Pipeline* de reconstrução de 3DRA

Neste apêndice se comentam alguns detalhes referentes à implementação do *pipeline* de reconstrução introduzido no Capítulo 6. O *pipeline* é genérico e define um conjunto de passos que devem ser feitos para conseguir uma reconstrução comparável com a da máquina. Para implementá-lo se devem especificar um conjunto de parâmetros dependentes de dados contidos nos arquivos DICOM específicos de cada fabricante de aparelhos de 3DRA. Neste trabalho utilizaram-se imagens obtidas com máquinas AXIOM-Artis fabricadas por Siemens<sup>1</sup>. A continuação se detalham cada um dos passos do *pipeline* desenvolvido.

- **Passo 1:** Os arquivos DICOM são lidos utilizando o *software* MATLAB, com a função `dicomread`, que retorna uma matriz de três dimensões  $(s, t, \theta)$  contendo as projeções em formato `unsigned int`. Nesta implementação em particular, a matriz é convertida ao tipo `double` e as dimensões são trocadas de forma que o **sinograma** resultante têm dimensões  $(t, s, \theta)$ .
- **Passo 2:** A conversão do **sinograma** desde o espaço de valor de *pixel* (PV) ao de coeficientes de atenuação depende do campo DICOM *Pixel Intensity Relationship* (0028,1040) que especifica como se devem interpretar os valores dos *pixels*, e pode conter três valores: LIN, LOG, DISP. As máquinas AXIOM-Artis do hospital estão configuradas para armazenar as projeções em formato LIN, o que significa que existe uma relação linear

---

<sup>1</sup> <http://www.siemens.com/>

entre os valores dos *pixels* e a integral de linha, do tipo  $\mu = ax_p + b$ , onde os parâmetros  $a$  e  $b$  correspondem-se com os campos DICOM (0028,1053) e (0028,1052) respetivamente. Por último o campo DICOM *Pixel Intensity Relationship Sign* (0028,1041),<sup>2</sup> indica a interpretação dos valores de *pixel*, podendo ser 1 ou  $-1$ , o primeiro caso, intensidades de pixel altas indicam intensidades de radiação altas, no segundo caso a relação é inversa.

Lamentavelmente estes três parâmetros necessários para converter as projeções ao espaço de coeficientes de atenuação não estão presentes em nenhum dos estudos recebidos do Hospital. Via inspeção visual do sinograma, pode-se deduzir que (0028,1041) é  $-1$ , portanto uma inversão dos *pixels* do sinograma deve ser feita, tal que

***sinograma*** = max { ***sinograma*** } - ***sinograma***. Em relação aos parâmetros (0028,1053) e (0028,1052), forma assumidos como 1 e 0 respetivamente.

- **Passo 3:** Para efetuar a reconstrução da **imagem volumétrica** a partir do ***sinograma***, usando qualquer um dos métodos apresentados, é necessário ter o ângulo de cada projeção, esta informação é especificada no campo DICOM *Positioner Primary Angle Increment* (0018,1520). Outro dado importante é a posição da projeção ortogonal da fonte sobre o plano de detetores. Embora não foi possível encontrar esta informação no DICOM, porque parece ser algum parâmetro interno de calibração, um *offset* pode ser encontrado via tentativa e erro, levando em consideração a técnica de *quarter offset* (Turbell, 2001), desta forma a fonte de radiação projeta-se no pixel  $(T/2 - 2.75, S/2 - 2.75)$  de cada imagem (iniciando a numeração dos *pixels* desde zero), donde cada imagem tem dimensão  $T \times S$ .

Uma operação adicional é realizada sobre o volume reconstruído, onde todos os *voxels* com valor negativo são zerados, desta forma o pipeline se assegura de que a reconstrução seja válida.

---

<sup>2</sup> Mais informação em <http://www.dabsoft.ch/dicom/3/C.8.11.3.1.2/>

- **Passo 4:** A **imagem volumétrica** contendo os coeficientes de atenuação é normalizada para a escala de Hounsfield. Para isto é preciso conhecer o  $\mu_{agua}$  para a energia da fonte usada na aquisição das imagens. A energia dos fótons encontra-se no campo KVP (0018,0060) do DICOM. O laboratório de medições físicas NIST disponibiliza tabelas<sup>3</sup> com os coeficientes lineares de atenuação de materiais vários para diferentes energias dos fótons. Devido à simplificação efetuada no **passo 2** na obtenção das projeções, os coeficientes de atenuação obtidos nas reconstruções poderão ser diferentes aos reais. Esta diferença dificulta a escolha de  $\mu_{agua}$ . Em particular, nos conjuntos de imagens analisados, foi observado que os coeficientes de atenuação das imagens reconstruídas aproximavam-se aos valores associados a energias de 10KeV, portanto a normalização foi feita usando  $\mu_{agua} \sim 7.3$ .

---

<sup>3</sup> <http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/tab4.html>

# Apêndice E

## Definição do fantasma arterial

O fantasma de estruturas arteriais (ASP) foi desenvolvido neste trabalho com o objetivo de validar os processos de segmentação apresentados nas Seções 8.1 e 8.2. A utilização de fantasmas numéricos na validação foi usada em Yim et al. (2001) e Antiga (2002). No primeiro caso o fantasma consistiu de um cilindro com estenoses, e no segundo caso vários fantasmas compostos por um único cilindro (de diferentes raios) com diferentes orientações foi utilizado. Para simular condições realistas, em ambos trabalhos adicionou-se ruído branco gaussiano.

### E.1 Especificações

Apresentam-se nesta seção as especificações técnicas do ASP. O fantasma está contido em um cubo de lado 256 *voxels*, com espaçamento isotrópico igual a 0.270356mm. Cinco inclusões cilíndricas representam artérias idealizadas de diferentes raios, e uma inclusão esférica representa um aneurisma idealizado sobre o cilindro de maior raio. A seguir detalham-se os parâmetros das inclusões, tomando como origem de coordenadas o vértice do cubo (*voxel* de índice (0,0,0)),

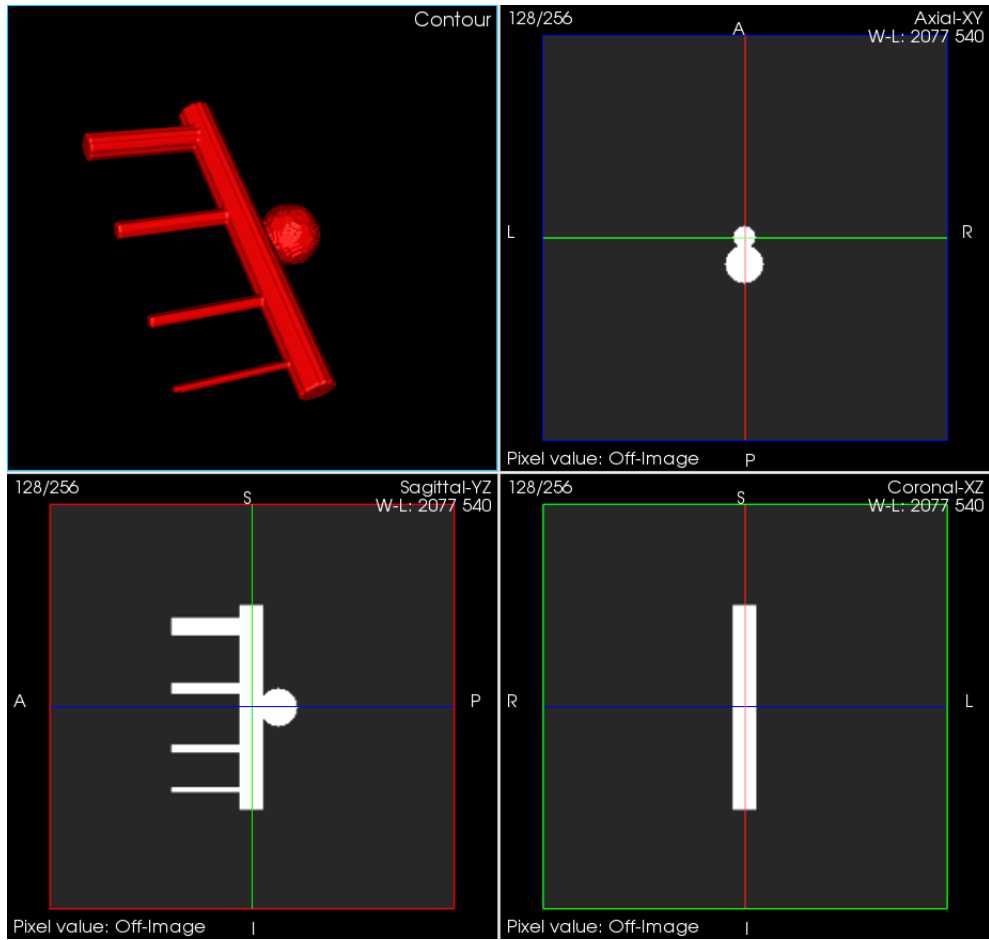
- **Cilindro 1:** Paralelo ao eixo  $Z$ , com Centro em (128, 128, 128), raio 7 *voxels* (1.89mm) e comprimento 64 *voxels* (17.3mm).
- **Cilindro 2:** Paralelo ao eixo  $Y$ , com Centro em (128, 102, 179), raio 5 *voxels* (1.35mm) e comprimento 25 *voxels* (6.7mm).

- **Cilindro 3:** Paralelo ao eixo  $Y$ , com Centro em  $(128, 102.4, 140.8)$ , raio 3 *voxels* ( $0.81mm$ ) e comprimento 25 *voxels* ( $6.7mm$ ).
- **Cilindro 4:** Paralelo ao eixo  $Y$ , com Centro em  $(128, 102.4, 102.4)$ , raio 2 *voxels* ( $.54mm$ ) e comprimento 25 *voxels* ( $6.7mm$ ).
- **Cilindro 5:** Paralelo ao eixo  $Y$ , com Centro em  $(128, 102, 76)$ , raio 1 *voxels* ( $0.27mm$ ) e comprimento 25 *voxels* ( $6.7mm$ ).
- **Esfera:** Centro em  $(128, 145.92, 128)$ , raio 12 *voxels* ( $3.24mm$ ).

A intensidade<sup>1</sup> das inclusões é de  $\mu = 0.229 \times 2.5$  (2118.8 HU), e do fundo  $\mu = 0.1831 \times 1.040$  (41.74 HU), na conversão para escala de Hounsfield tomaram-se os valores de atenuação da água e aire como  $\mu = 0.1837 \times 1$  e  $\mu = 0.1662 \times 0.0012041$  respectivamente. Na Figura E.1 apresentam-se visualizações dos diferentes planos (axial, sagital e coronal centrados no fantasma), assim como uma visualização de superfície em 3D.

---

<sup>1</sup> Aqui as intensidades são o coeficiente de atenuação linear, calculado como o *mass attenuation coefficient* (<http://physics.nist.gov/PhysRefData/XrayMassCoef/tab4.html>) vezes uma densidade característica. Para as inclusões foram tomadas os valores equivalentes a osso denso, e para o fundo valores equivalentes a matéria cinza/branca.



**Figura E.1:** Imagens do fantasma ASP nos planos axial, sagital e coronal, junto com a visualização de superfície em 3D.